Partiel d'Electromagnétisme : 3 novembre 2015

4 problèmes - recto verso / Durée de l'épreuve 2 heures. Calculettes standards autorisées / Formulaire A4

1. (6pts) On considère deux charges ponctuelles : $Q_1 = 1690\mu C$ aux coordonnées $P_1 = (4, 14, 4)$m et $Q_2 = -1690\mu C$ aux coordonnées $P_2 = (9, 2, 4)$m. **Spécifier les unités et A.N dans vos réponses**.

   (a) Trouver le champ $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1\,(P_2)$ créé par la particule 1 à la poistion de la particule 2.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1(P_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_1 \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P}}_2}{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P}}_2\right\|^3}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{P_1O}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_2 - \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_1 = (9, 2, 4) - (4, 14, 4) = (5, -12, 0)\text{m}$$

$$\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P}}_2\right\| = \sqrt{25 + 144} = 13\text{m}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1(P_2) &= 9.10^9.1690.10^{-6}\frac{(5, -12, 0)}{13^3} \\ &= 9\frac{(5, -12, 0)}{13}10^4\text{Vm}^{-1} \end{aligned} \tag{1}$$

   (b) Calculer la force $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{1\to 2}\,(P_2)$ exercée sur la particule 2.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{1\to 2} = Q_2\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1(P_2) = -1690.10^{-6}.\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1(P_2) &= 9.169.10^{-5}.10^4\frac{(-5, 12, 0)}{13}\text{N} \\ &= 9.169.10^{-1}\frac{(-5, 12, 0)}{13}\text{N} \\ &= 152.1\frac{(-5, 12, 0)}{13}\text{N} \\ &= 11.7(-5, 12, 0)\text{N} \end{aligned} \tag{2}$$

   (c) Spécifier le moment dipolaire, $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$, du sytème de charges.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{p}} &= Q_1\overrightarrow{\boldsymbol{P_2P}}_1 = 1690.10^{-6}.13\frac{(-5, 12, 0)}{13} \\ &\simeq 0.022\frac{(-5, 12, 0)}{13}\text{Cm} \end{aligned} \tag{3}$$

   (d) Trouver l'énergie électrostatique, W_e, du système.

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{P_1P_2} = -9.10^9\frac{[1690.10^{-6}]^2}{13} \\ &\simeq -1977\text{J} \end{aligned} \tag{4}$$

2. (6pts) On considère une distribution de charge linéique uniforme et infini dans le vide portant une densité $\lambda_0 = 4\mu\text{Cm}^{-1}$ sur l'axe z.

   (a) Trouver le flux, Φ_E, du champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ traversant une sphère de rayon $r = 3$m.

$$\Phi_E \equiv \oiint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{S}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \qquad Q_{\text{int}} = 6.\lambda_0 = 24\mu\text{C}$$
$$\Phi_E \equiv \frac{24\mu\text{C}}{\epsilon_0} = \frac{96\pi\mu\text{C}}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9.96.10^{-6}\pi$$
$$= 864\pi 10^3\text{V.m} = 2714.10^3\text{V.m} \tag{5}$$

   (b) Trouver le flux, Φ_D, du champ $\vec{\boldsymbol{D}}$ traversant ce même sphère de rayon $r = 3$m (indice : dans le vide $\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}}$) (**A.N.**).

$$\Phi_D = \epsilon_0 \Phi_E = 24\mu\text{C} \tag{6}$$

   (c) Ecrire le champ $\vec{\boldsymbol{E}}(\rho, \phi, z)$ en coordonnées cylindriques.

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\rho, \phi, z) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\rho}\widehat{\boldsymbol{\rho}} \tag{7}$$

   (d) Ecrire le champ $\vec{\boldsymbol{E}}(x, y, z)$ en coordonnées cartésiennes.

$$\vec{\boldsymbol{E}}(x, y, z) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2}}(\cos\phi\widehat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\widehat{\boldsymbol{y}})$$
$$= \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\widehat{\boldsymbol{x}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\widehat{\boldsymbol{y}}\right)$$
$$= \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0(x^2+y^2)}(x\widehat{\boldsymbol{x}} + y\widehat{\boldsymbol{y}}) \tag{8}$$

   (e) Trouver le pourcentage du flux qui traverse une bande infine dont la surface est spécifié par $(x = 1, -1 < y < 1, -\infty < z < \infty)$

$$\frac{\Phi_{\text{bande}}}{\Phi_{\text{tot}}} = 0,25 \Rightarrow \Phi_{\text{bande}} = \frac{1}{4}\Phi_{\text{tot}} = 25\%\Phi_{\text{tot}} \tag{9}$$

3. (4pts) On considère un champ $\vec{\boldsymbol{E}} = 500 \times e^{-2x}\text{Vm}^{-1}\widehat{\boldsymbol{x}}$ dans le vide.

   (a) Trouver le flux, Φ_E, traversant une surface plane, S de 2m^2 et de normale parallèle à $\widehat{\boldsymbol{x}}$, à la position $x_1 = 1$m, et $x_2 = 2$m ? (**A.N.**)

$$\Phi_{E,1} \equiv \iint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \widehat{\boldsymbol{n}}\vec{d\boldsymbol{S}} = \iint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \widehat{\boldsymbol{x}}dS = 500 \times e^{-2x_1}\iint dS$$
$$= 500.e^{-2x_1}\iint dS = 10^3.e^{-2}\text{Vm} \simeq 135,3\text{Vm} \tag{10}$$

$$\Phi_{E,2} = 10^3 e^{-2x_2}\text{Vm} = 10^3 e^{-4}\text{Vm}$$
$$\simeq 18.3\text{Vm} \tag{11}$$

   (b) Trouver la différence de potentiel $V(x_1) - V(x_2)$ (**A.N.**).

$$V(x_1) - V(x_2) = \int_1^2 \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{l}} = \int_1^2 \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \widehat{\boldsymbol{x}}dx = 500 \times \int_{x_1}^{x_2} e^{-2x}dx$$
$$= -\frac{500}{2} \times \left[e^{-2x}\right]_{x_1}^{x_2} = -250 \times \left(e^{-4} - e^{-2}\right)$$
$$\simeq 29.25\text{V} \tag{12}$$

4. (6 pts) Une des valeurs numériques de cette correction diffère de celui de l'énoncé d'origine afin de tomber sur les valeurs numériques plus « sympathiques ». Cliqué ici ci-dessous pour la correction de l'énoncé d'origine `http://www.fresnel.fr/perso/stout/electromag/correction_orig_PEIP_15.pdf` . Une charge ponctuelle de $Q = 10\pi\text{nC}$ se trouve à l'origine d'une sphère. Une couche sphérique concentrique, S_1, de rayon $R_1 = \frac{1}{2}\text{m}$ porte une charge surfacique uniforme de $\sigma_1 = -4\text{nC/m}^2$. Une deuxième distribution uniforme de charge surfacique, σ_2, se trouve sur une surface S_2 de rayon $R_2 = 1\text{m}$ telle que $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$ pour $r > R_2$.

(a) Ecrire le champ $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ dans la région $0 < r < R_1$.

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{13}$$

(b) Ecrire le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ dans la région $R_1 < r < R_2$ en fonction de Q et de la charge totale de la première couche, Q_1.

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{Q + Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{14}$$

où

$$Q_1 = S_1\sigma_1 = 4\pi R_1^2\sigma_1 = -4\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 4 = -4\pi\text{nC}$$

(c) Trouver la charge totale, Q_2, sur la surface S_2.

Afin d'arriver à $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$ pour $r > R_2$, il faut que la charge total, $Q_2 + Q_1 + Q = 0$ donc :

$$Q_2 = -(Q + Q_1) = -6\pi\text{nC} \tag{15}$$

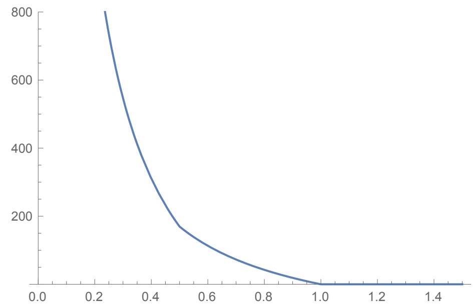
(d) Quelle est le potentiel V_2 par rapport à l'infini sur la surface S_2 ? (On prend $V(\infty) = 0$).

$$V_2 = 0 \tag{16}$$

(e) Quelle est le potentiel V_1 sur la surface S_1 ?.

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \int_1^2 \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{l}} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q + Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{R_1}^{R_2} \frac{(Q + Q_1)}{r^2} dr \\ &= -\frac{Q + Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right] \\ &= \frac{Q + Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] = \frac{Q + Q_1}{4\pi\epsilon_0}[2 - 1] = 6\pi 10^{-9}.9.10^9 \\ &= 54\pi V \simeq 170\text{V} \end{aligned} \tag{17}$$

(f) Faire un schéma de $V(r)$. Peut-on déterminer le potentiel à l'origine ?



Non, car le potentiel au centre d'une charge ponctuelle est indéfini (c.-à-d. infiniment grand).