Formulaire de magnétostatique et Induction

1 Champ magnétostatique

$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ créé par une particule en mouvement à vitesse constante :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{PM}}}{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right\|^3} = \frac{1}{4\pi c^2\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \wedge \widehat{\boldsymbol{u}}$$

$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ créé par une distribution continue de courant :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{j}}(P) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{PM}}}{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right\|^3} d\mathcal{V}$$

$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ créé par un circuit filiforme (**Loi de Biot Savart**) :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{\text{circuit}} \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{dl}}_P \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{PM}}}{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right\|^3}$$

(**N.B.** μ_0 est la perméabilité du vide
$\mu_0 \equiv 4\pi 10^{-7}$SI (Henry m^{-1}))
Flux magnétique à travers une surface

$$\Phi \equiv \iint_S \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{dS}}$$

2 Propriétés fondamentales

1. **Flux conservatif :**

Forme intégrale	**Forme différentielle**
$\oiint_S \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{dS}} = 0$	$\operatorname{div} \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0$

2. **Théorème d'Ampère : la circulation de $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ sur un contour fermé est égal à μ_0 fois le courant traversant une surface qui s'appuie sur ce contour** :

Forme intégrale	**Forme différentielle**
$\oint_C \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{dl}} = \mu_0 \iint_S \overrightarrow{\boldsymbol{j}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{dS}} = \mu_0 I_{\text{enl}}$	$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\, \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \overrightarrow{\boldsymbol{j}}$

3 Action magnétique

Sur une particule chargée (**Force de Lorentz**) :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = q\left(\overrightarrow{\boldsymbol{E}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{B}}\right)$$

Sur un circuit filiforme (**Force de Laplace**) :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_L = \oint_{\text{circuit}} I\overrightarrow{\boldsymbol{dl}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{B}}$$

Théorème de Maxwell : Quand le champ magnétique est **statique**, le travail fait par la force de Laplace, $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_L \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{dr}}$, lors d'un déplacemnt, $\overrightarrow{\boldsymbol{dr}}$, du circuit, est égal au courant dans le circuit fois le changement du flux magnétique traversant le circuit, $d\Phi_c$:

$$\boxed{dW = Id\Phi_c \quad \Rightarrow \quad W = I\Delta\Phi_c}$$

Conséquences du Th. de Maxwell :
Energie potentielle d'interaction magnétique, $\mathcal{U}_m$:

$$\mathcal{U}_m = -I\Phi_c + Cst$$

Force (à partir de l'énergie potentielle)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_L = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{U}_m = I\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi_c$$

Couple (à partir de l'énergie potentielle)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Gamma}}_L = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\Gamma}_i \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i \qquad \text{avec} \qquad \boldsymbol{\Gamma}_i = I\frac{\partial \Phi_c}{\partial \alpha_i}$$

4 Dipôle magnétique

Définition du moment dipolaire magnétique, $\overrightarrow{\boldsymbol{m}}$:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{m}} \equiv \frac{1}{2}\iiint \overrightarrow{\boldsymbol{OP}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{j}}\, d\mathcal{V}$$

D'un circuit filiforme dans un plan de surface S :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{m}} = IS\widehat{\boldsymbol{n}}$$

Energie d'interaction magnétique :

$$\mathcal{U}_m = -\overrightarrow{\boldsymbol{m}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\text{ext}}$$

Couple magnétique sur un dipôle :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Gamma}} = \overrightarrow{\boldsymbol{m}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\text{ext}}$$

Force magnétique sur un dipôle :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{m}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\text{ext}}\right)$$

5 Induction

L'induction s'applique à des circuits en mouvement et/ou des champs magnétiques qui varient dans le temps.

Loi de Faraday : la force électromotrice e dans un circuit est donné par le changement du flux magnétique à travers le circuit :

$$e \equiv \oint_{\text{circuit}} \left(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}\right) \cdot \vec{dl}$$
$$= -\iint_S \frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{d^2S} - \frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Ceci mène à une loi fondamentale

Forme différentielle $\quad$ **Forme intégrale**

$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \qquad \oint_C \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{dl} = -\iint_S \frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$$

Coefficient d'**induction mutuelle**

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$$

Coefficient d'auto induction

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

Force électromotrice produit dans un solénoïde :

$$e = -L\frac{dI}{dt}$$

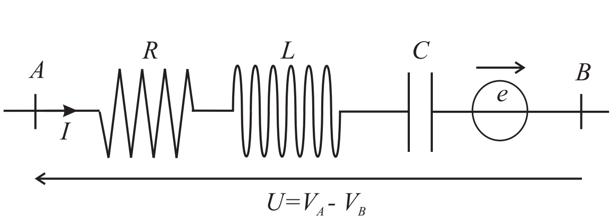
Energie magnétique emmagasinée (champ) :

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \mu_r \left\|\vec{\boldsymbol{B}}\right\|^2 d\mathcal{V}$$

Energie magnétique emmagasinée **dans une bobine :**

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

6 Circuits en régime quasi stationnaires



$$U_{AB} = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} - e$$

Circuit fermé : $U_{AB} = 0$

$$e = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}$$

7 « Potentiel vecteur »

Une conéquence mathématique de la loi $\text{div}\vec{\boldsymbol{B}} = 0$, est qu'on peut toujours définir un champ vectoriel $\vec{\boldsymbol{A}}$ tel que $\vec{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}}$. On appel $\vec{\boldsymbol{A}}$ le « potentiel vecteur » même si il n'a pas les propriétés d'un potentiel. De plus est, le champ $\vec{\boldsymbol{A}}$ n'est pas bien définie puisqu'on peut toujours ajouter le gradient d'un champ scalaire f à $\vec{\boldsymbol{A}}$ sans changer sa rotationnelle

$$\vec{\boldsymbol{A}}' = \vec{\boldsymbol{A}} + \overrightarrow{\text{grad}} f$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}}' = \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} + \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}} f = \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{B}}$$

Insérant $\vec{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}}$ dans $\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \vec{\boldsymbol{j}}$, on obtient une équation différentielle pour $\vec{\boldsymbol{A}}$:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} \equiv \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{\boldsymbol{A}} - \Delta\vec{\boldsymbol{A}} = \mu_0 \vec{\boldsymbol{j}} \qquad (1)$$

où nous avons utilisé une autre identité mathématique $\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{rot}} \equiv \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div} - \Delta$. On peut enlever une partie de la liberté dans la définition de $\vec{\boldsymbol{A}}$ en imposant la contrainte de la «gauge de Coulomb», c.-à.-d. on impose la condition :

$$\text{div}\,\vec{\boldsymbol{A}} = 0$$

Ainsi l'équation (1) dans cette gauge devient

$$\Delta\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0 \vec{\boldsymbol{j}}$$

et la solution de $\vec{\boldsymbol{A}}$ prend une forme intégrale analogue à celle de V en électrostatique :

$$\vec{\boldsymbol{A}}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(P)\, d\mathcal{V}}{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right\|}$$

et pour un circuit filiforme

$$\vec{\boldsymbol{A}}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{\vec{\boldsymbol{dl}}_P}{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right\|}$$

8 Matériaux magéntiques

Puisque les électrons tounant autour de leurs noyaux ont le comportement de circuits microscopiques, tout milieu matériel à une réponse magéntique non nulle même si celle-ci est généralement très faible (sauf pour les matériaux feromagnétiques). La réponse magéntique des matériaux est caractérisée par un **vecteur de polarisation magnétique**, $\vec{\boldsymbol{M}}$, qui peut être interprété comme une densité volumique de moment dipolaire magnétique telle que le moment diplolaire $\overrightarrow{dm}$ d'un volume $d\mathcal{V}$ soit donné par $\overrightarrow{dm} = \overrightarrow{M} d\mathcal{V}$.

La densité de courant, $\overrightarrow{j}_m$, (de nature atomique) associée avec l'existance de $\overrightarrow{M}$, se trouve avec la relation :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \overrightarrow{M} = \overrightarrow{j}_m$$

L'équation d'ampère s'écrit donc

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \overrightarrow{B} = \mu_0 \left(\overrightarrow{j}_m + \overrightarrow{j}_{\text{libre}} \right)$$

où $\overrightarrow{j}_{\text{libre}}$ correspond à la densité de courant présent dans des circuits.

Puisque nous n'avons pas de contôle direct de $\overrightarrow{j}_m$, il est pratique en présence de milieux matériels de définir le champ $\overrightarrow{H}$:

$$\overrightarrow{H} \equiv \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{M} \tag{2}$$

L'équation différentielle de $\overrightarrow{H}$ en magnétostatique est :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \overrightarrow{H} = \overrightarrow{j}_{\text{libre}} \tag{3}$$

Si la symétrie du problème est suffisament élevée, on peut obtenir $\overrightarrow{H}$ en faisant appel à la forme intégrale de l'éq.(3) :

$$\oint_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dl} = I_{\text{enl}} \tag{4}$$

Très souvent, il y a une relation linéaire entre $\overrightarrow{M}$ et $\overrightarrow{B}$

$$\overrightarrow{M} = \chi_m \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} \tag{5}$$

où χ_m est la **susceptibilité** magnétique du matériau.

Mettant (5) dans (2), on obtient une relation linéaire entre $\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{B}$ (**relation constitutive**) :

$$\overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} (1 - \chi_m) \overrightarrow{B} \equiv \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_r \mu_0} \tag{6}$$

où $\mu_r = 1/(1 - \chi_m)$ est la perméabilité magnétique relative du matériau.

9 Equations de Maxwell

Maxwell a modifié l'équation $\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\, \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$ afin que les équations d'électromagnétisme soient consistantes avec l'équation de conservation de charge :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \textbf{conservation de charge}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\, \overrightarrow{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{E} + \mu_0 \overrightarrow{j} \qquad \textbf{équation modifiée}$$

Les équations d'un champ électromagnétique dans le vide sont appelées les ***quatre équations de Maxwell*** :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{div} \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \operatorname{div} \overrightarrow{B} = 0 \\ \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\, \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} & \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\, \overrightarrow{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{E} + \mu_0 \overrightarrow{j} \end{array}}$$

On peut également exprimer ces quatre équations sous ***forme intégrale :***

$$\oiint_S \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{d^2 S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad , \quad \oiint_S \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

$$\oint_C \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\iint_S \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS}$$

$$\oint_C \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \varepsilon_0 \mu_0 \iint_S \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS} + \mu_0 \iint_S \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{dS}$$

10 Equations de Maxwell en milieux matériels :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{div} \overrightarrow{D} = \rho\,, & \operatorname{div} \overrightarrow{B} = 0 \\ \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\, \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\,, & \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\, \overrightarrow{H} = \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{D} + \overrightarrow{j} \end{array}}$$

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \overrightarrow{B} \qquad \overrightarrow{D} = \epsilon_0 \varepsilon_r \overrightarrow{E}$$

11 Conditions limites à des interfaces

$$\widehat{\boldsymbol{n}}_{12} \cdot \left(\overrightarrow{B}_2 - \overrightarrow{B}_1 \right) = 0$$

$$\widehat{\boldsymbol{n}}_{12} \wedge \left(\overrightarrow{H}_2 - \overrightarrow{H}_1 \right) = \overrightarrow{j}_s$$

$$\widehat{\boldsymbol{n}}_{12} \cdot \left(\overrightarrow{D}_2 - \overrightarrow{D}_1 \right) = \sigma$$

$$\widehat{\boldsymbol{n}}_{12} \wedge \left(\overrightarrow{E}_2 - \overrightarrow{E}_1 \right) = \overrightarrow{0}$$