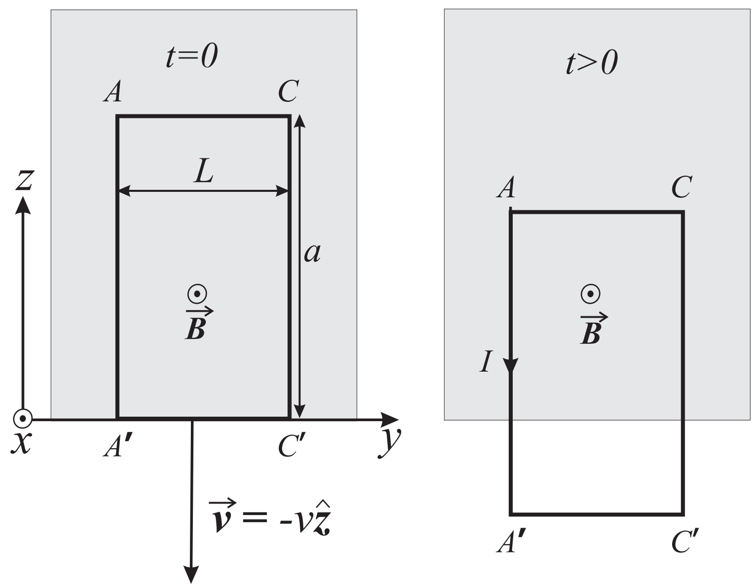
Electromagnétisme - Exercices Induction

1. *Chute d'un cadre dans un champ magnétique* Un cadre rectangulaire de résistance R est situé dans un plan vertical. Le cadre est placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = B\widehat{\boldsymbol{x}}$ constant, uniforme et perpendiculaire au plan du cadre. On prend comme origine du temps le dernier instant où le cadre est entièrement plongé dans le champ magnétique (voir figure). On donne au cadre un mouvement de translation uniforme de vitesse $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = -v\widehat{\boldsymbol{z}}$ parallèle au côté $AA' = a$.



(a) Calculer la force électromotrice, $e(t)$, dans ce circuit en utilisant la formule générale de la force électromotrice (Remarque : Il faut séparer le temps t en deux intervalles : $0 < t < t_{\mathrm{m}} = \frac{AA'}{v}$ et $t > t_{\mathrm{m}}$.)

Par la formule générale pour la force électromotrice, nous avons

$$\begin{aligned} e(t) &= -\int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \cdot \widehat{\boldsymbol{n}}\, d\mathcal{S} + \oint_{\mathcal{C}} \left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{\text{fil}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{B}}\right) \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{l}} \\ &= \oint_{\mathcal{C}} \left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{\text{fil}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{B}}\right) \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{l}} \qquad (\text{puisque } \partial \overrightarrow{\boldsymbol{B}}/\partial t = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}\ ) \end{aligned}$$

Pour les quatre cotés du cadre on a

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{\text{fil}} = -v\widehat{\boldsymbol{z}}$$

Pour chaque portion du cadre immergée dans la région $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = B\widehat{\boldsymbol{x}}$ *nous trouvons donc*

$$\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{\text{fil}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{B}}\right) = -vB\left(\widehat{\boldsymbol{z}} \wedge \widehat{\boldsymbol{x}}\right) = -vB\widehat{\boldsymbol{y}}$$

Sur les cotés AA' *et* CC', $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{\text{fil}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ *est perpendiculaire à* $\overrightarrow{d\boldsymbol{l}}$ *mais sur le coté* AC,*nous avons*

$$\overrightarrow{d\boldsymbol{l}} = -dy\widehat{\boldsymbol{y}}$$

donc

$$e\left(t\right)=\int_0^L\left(\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_{\text{fil}}\wedge\overrightarrow{\boldsymbol{B}}\right)\boldsymbol{\cdot}\,\overrightarrow{d\boldsymbol{l}}=vB\int_0^L dy=vBL \qquad 0<t<t_{\text{m}}=\frac{AA'}{v}=\frac{a}{v}$$
$$e\left(t\right)=0 \qquad t>t_{\text{m}}=\frac{AA'}{v}$$

(b) Calculer la force électromotrice, $e\left(t\right)$, en utilisant la loi de Faraday pour les circuits matériels de constitution constante : $e\left(t\right)=-\frac{d\Phi}{dt}$. (comparer avec le résultat de (a)

Le flux magnétique est

$$\Phi\left(t\right)=BLz\left(t\right)$$
$$z\left(t\right)=a-vt$$

Donc

$$\Phi\left(t\right)=BL\left(a-vt\right)$$
$$\frac{d\Phi}{dt}=-vBL$$
$$e\left(t\right)=-\frac{d\Phi}{dt}=vBL \qquad 0<t<t_{\text{m}}=\frac{AA'}{v}=\frac{a}{v}$$
$$e\left(t\right)=0 \qquad t>t_{\text{m}}=\frac{AA'}{v}$$

On remarque aue la force électromotrice déduite avec la loi de Faraday est précisément la même que nous avons trouvé en (a) avec l'expression générale de l'induction.

(c) Calculer l'intensité du courant I dans le cadre pour $t>0$. Vérifier que la loi de Lenz est satisfaite.

$$I\left(t\right)=\frac{e\left(t\right)}{R}$$

Donc

$$I\left(t\right)=\frac{vBL}{R} \qquad 0<t<t_{\text{m}}=\frac{AA'}{v}$$
$$I\left(t\right)=0 \qquad t>t_{\text{m}}=\frac{AA'}{v}$$

Le flux magnétique généré par $I\left(t\right)$ est positif, donc en accord avec la loi de Lenz, le courant essaie de remplacer le flux magnétique perdu.

(d) Calculer la force $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_a$ (amplitude et direction) à appliquer pour vaincre les forces magnétiques (i.e. la force appliquée nécessaire pour garder la vitesse constante).

La Force de Laplace sur un segment du coté AC est :

$$\overrightarrow{d\boldsymbol{F}}_L=I\overrightarrow{d\boldsymbol{l}}\wedge\overrightarrow{\boldsymbol{B}}=-IBdy\left(\widehat{\boldsymbol{y}}\wedge\widehat{\boldsymbol{x}}\right)$$
$$=-IBdy\left(\widehat{\boldsymbol{y}}\wedge\widehat{\boldsymbol{x}}\right)=IBdy\widehat{\boldsymbol{z}}$$

La force de Laplace sur les cotés AA' et CC' sont égales et opposées (puisque les $\overrightarrow{d\boldsymbol{l}}$ sont égales et opposées). Il n'y a pas de Force sur le coté La force de Laplace totale est donc

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_L=IB\widehat{\boldsymbol{z}}\int_0^L dy=IBL\widehat{\boldsymbol{z}}$$

La force appliquée afin de garder la vitesse constante est donc :

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{a}} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{L} = -IBL\widehat{\boldsymbol{z}}$$

(e) Calculer le travail dépensé pour sortir le cadre du champ. Comparer avec le travail obtenu en utilisant le théorème de Maxwell.

$$W_a = \int_0^a \vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{a}} \cdot \vec{d\boldsymbol{r}} = IBLa \qquad \left(\vec{d\boldsymbol{r}} = -dz\widehat{\boldsymbol{z}}\right)$$

$$d\Phi = -BLvdt$$

Par le théorème de Maxwell :

$$W_L = I\Delta\Phi = I\left(\Phi_f - \Phi_i\right) = -IBLa$$

Donc :

$$W_{\mathrm{a}} = -W_L = IBLa$$

(f) Calculer la puissance dissipée par effet Joule, $P(t) = I^2 R$.

$$P(t) = I^2 R = \frac{v^2 B^2 L^2}{R^2} R = \frac{v^2 B^2 L^2}{R} \qquad 0 < t < t_{\mathrm{m}} = \frac{AA'}{v}$$

$$P(t) = 0 \qquad t > t_{\mathrm{m}} = \frac{AA'}{v}$$

(g) Calculer l'énergie dissipée par effet Joule, $W_{\mathrm{disp}} = \int_0^{t_{\mathrm{m}}} P(t)\, dt$. Comparer avec le travail appliqué.

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{disp}} &= \int_0^{t_{\mathrm{m}}} P(t)\, dt = \int_0^{t_{\mathrm{m}}} I^2 R dt = I^2 R t_{\mathrm{m}} = I^2 R \frac{AA'}{v} \\ &= I\left(\frac{vBL}{R}\right) R \frac{a}{v} = IBLa \end{aligned}$$

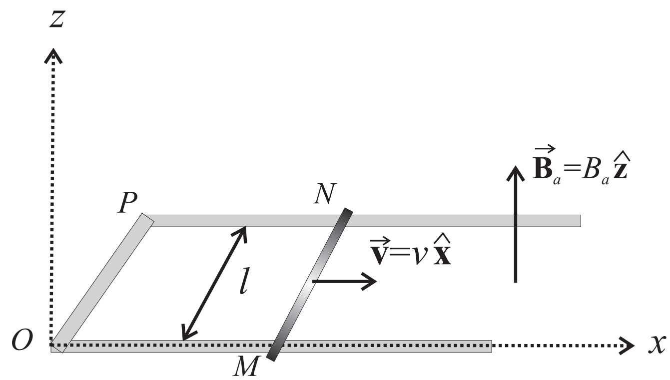
On remarque que l'énergie dissipée par joule est égale au travail fournit, W_{a}, pour sortir le cadre de la région avec $\vec{\boldsymbol{B}}$ non nulle.

2. Considérons le système constitué d'un barreau conducteur MN de résistance R, avec MN perpendiculaire aux rails et M et N glissant sur deux rails parallèles séparés par une distance l. Le système est placé dans un champ uniforme $\vec{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{a}}$, perpendiculaire au plan du barreau et des rails. Le circuit est refermé avec un conducteur de résistance négligeable aux extrémités O et P des barreaux, et on considère que la résistance des barreaux est négligeable. Soit $\vec{\boldsymbol{v}} = v\widehat{\boldsymbol{x}}$ la vitesse de déplacement du barreau.

(a) Calculer la force électromotrice, $e(t)$, dans le circuit.

$$e(t) = \oint \left(\vec{\boldsymbol{v}}_{MN} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{a}}\right) \cdot \vec{dl} = \int_M^N vB\left(\widehat{\boldsymbol{x}} \wedge \widehat{\boldsymbol{z}}\right) \cdot \left(\widehat{\boldsymbol{y}}\right) dl = -lvB = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(lvtB\right)$$

où on a choisi la normale du circuit dans la direction $\widehat{\boldsymbol{n}} = \widehat{\boldsymbol{z}}$ et donc courant positif dans la direction contraire aux aiguilles d'une montre.



(b) Calculer le courant, $I(t)$, dans le circuit (spécifier le sens de I).

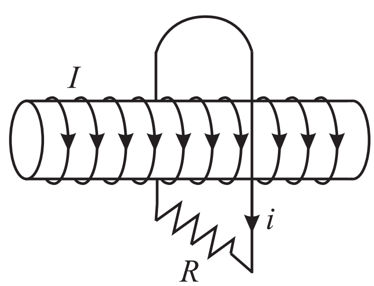
$$I(t) = \frac{e(t)}{R} = -\frac{lvB}{R}$$

Donc le courant circule dans la direction des aiguilles d'une montre autour de l'axe z*.(Loi de Lenz)*

(c) Calculer la force de Laplace sur le barreau.

$$\vec{F}_L = \int_M^N d\vec{F}_L = I\int_M^N \left(\vec{dl} \wedge \vec{B}\right) = -\frac{lvB^2}{R}\left(\hat{y} \wedge \hat{z}\right)\int_0^l dy$$
$$= -\frac{l^2vB^2}{R}\left(\hat{\boldsymbol{y}} \wedge \hat{\boldsymbol{z}}\right) = -\frac{l^2vB^2}{R}\hat{\boldsymbol{x}}$$

3. Un long solénoïde de rayon a comportant n tours par unité de longueur est entouré par un circuit fermé avec une résistance R (voir la figure).



(a) Si le courant du solénoïde est en train d'augmenter de façon constant ($dI/dt = k$), donner l'expression pour le courant $i(t)$ du circuit.
Spécifier le sens (de gauche à droite ou de droite à gauche).
On sait que le champ à l'intérieur d'un long solénoïde est constant (d'amplitude $\mu_0 nI$*) et orienté le long de l'axe. Selon le sens du courant* I *dans le dessin, on voit que le champ appliqué,* $\vec{B}_a$*, est orienté le long de l'axe de gauche à droite. Si l'on veut que le flux magnétique,* Φ_m*, soit positif, il faut donc définir le sens de* i *positif passe à travers la résistance dans le sens du devant vers l'arrière (c.-à-d. dans le sens*

droite à gauche dans le dessin)

$$\Phi_m(t) = \iint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{d\boldsymbol{S}} = \pi a^2 \mu_0 n I(t)$$
$$e(t) = -\frac{d}{dt}\Phi_m$$
$$i(t) = \frac{e}{R} = -\pi a^2 \mu_0 n \frac{d}{dt} I$$

Ce courant induit, i, est négatif, ce qui veut dire qu'il circule dans le sens opposé à celui que nous avons choisit au dpart. Donc le courant circule dans le sens de derrière la bobine vers l'avant dans la résistance (c.-à-d. dans le sens gauche à droite dans le dessin). On voit que le champ $\vec{\boldsymbol{B}}_i$ induit par ce courant sera dans le sens opposé à l'augmentation du champ appliqué $\vec{\boldsymbol{B}}_a$ en accord avec la loi de Lenz.

(b) Si maintenant on tient le courant dans le fil constant à I_0 et on retire le solénoïde en dehors du circuit et on le réinsère dans le sens opposé, quelle charge totale passe à travers la résistance ?

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_m}{dt}$$
$$\int \frac{dQ}{dt}dt = -\frac{1}{R}\int \frac{d\Phi_m}{dt}dt$$
$$\Rightarrow \left|\int dQ\right| = \left|\frac{1}{R}\int d\Phi_m\right|$$
$$|\Delta Q| = \left|\frac{1}{R}\Delta\Phi_m\right|$$
$$|\Delta\Phi_m| = 2\mu_0 n I_0 \pi a^2$$
$$|\Delta Q| = \left|\frac{1}{R}\Delta\Phi_m\right| = \frac{2\mu_0 n I_0 \pi a^2}{R}$$