Electromagnétisme - 14 janvier 2014
4 problèmes recto-verso. Durée de l'épreuve 2 heures
Calculettes standards autorisées / Formulaire Page A4 autorisée

1. (4.5pts) On considère un condensateur constitué par deux armatures métalliques de section circulaire ayant un rayon $a = 10\,\text{cm}$. Les deux armatures sont séparées par de l'air et distantes de $e = 10\,\text{mm}$. La plaque supérieure porte une charge $-Q$ et la plaque inférieure porte une charge $+Q$. Ce condensateur est isolé et fonctionne en influence totale, les effets de bords sont négligés, son comportement peut donc être assimilé à celui d'un condensateur idéal.

   (a) (½) Exprimer le champ électrique à l'intérieur du condensateur.

   Il y a une densité surfacique de charges $\sigma_{\text{inf}} = \frac{Q}{\pi a^2} \equiv \sigma$ sur la plaque inférieure, et une densité surfacique, $\sigma_{\text{sup}} = -\frac{Q}{\pi a^2} = -\sigma$, sur la plaque supérieure. Avec le théorème de Gauss, on trouve :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{e}}_z = \frac{Q}{S\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{e}}_z = \frac{Q}{\pi a^2\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

   (b) (½) Exprimer et calculer la capacité de ce condensateur.

$$U = \int_{\text{inf}}^{\text{sup}} \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{dl} = e\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{e\frac{Q}{\epsilon_0 S}} = \frac{\epsilon_0 S}{e} = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{e} = \frac{4\pi\epsilon_0(10^{-1})^2}{4\times 10^{-2}} \simeq \frac{1}{4\times 9\times 10^9} \simeq 2.78\times 10^{-11}\text{F}$$

   On glisse une lame de cuivre, non initialement chargée, de section circulaire (avec un rayon a) et d'épaisseur $d = 2\,\text{mm}$ entre les deux armatures du condensateur. La distance entre le milieu de cette lame et chacune des armatures est égale à $\frac{e}{2}$.
   En appliquant le théorème de Gauss :

   (c) (1) Déterminer la nouvelle répartition des charges.

   Il y a une charge surfacique, $\frac{Q}{\pi a^2} = \sigma$, sur la surface supérieure de la lame et une charge surfacique, $-\frac{Q}{\pi a^2} = -\sigma$, sur la surface inférieure de la lame.

   (d) (1) Exprimer le champ électrique à l'intérieur du condensateur.

   Entre la lame et les armatures le champ électrique est toujours :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{e}}_z = \frac{Q}{\pi a^2\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

   et le champ est électrique est nul à l'intérieur de la lame.

(e) (1½) Exprimer et calculer la nouvelle capacité du condensateur. Comparer cette capacité avec la capacité initiale.

Donnée : lorsque deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 sont associés en série, la capacité C_{eq} du condensateur équivalent s'exprime : $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

Après l'énoncé, la distance entre la lame et les armatures est 4mm$=0,4 \times e$ de chaque côté. Ce système se comporte comme deux condensateurs en série, chacun de capacité

$$C_1 = C_2 = \frac{S\epsilon_0}{0,4e}$$

La capacité équivalente est donc :

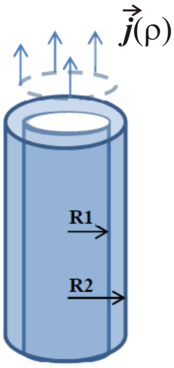
$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{\frac{\epsilon_0 \pi a^2}{0,4e}} + \frac{1}{\frac{\epsilon_0 S}{0,4e}} = 0,8 \times \frac{e}{\epsilon_0 S} \Rightarrow C_{\text{eq}} = \frac{5}{4} \times \frac{\epsilon_0 S}{e} = 1,25 \times \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

donc un quart plus grand que la capacité sans la lame.

2. (4.5pts) Soit un cylindre creux dont la fine couche conductrice est comprise entre R_1 et R_2. Ce cylindre est très long par rapport aux rayons R_1 et R_2. La densité de courant est décrite par la loi ci-dessous :

$$\vec{\boldsymbol{j}}(\rho) = A\frac{e^{-\rho/a}}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad (\text{A/m}^2)$$

(exprimée en coordonnées cylindiques, où A et a sont des constantes positives)



(a) (1) Déterminer la direction du champ, $\vec{\boldsymbol{B}}$, en tout point de l'espace (justifier).

Le champ $\vec{\boldsymbol{B}}$ est dans la direction $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ puisque c'est la seule direction qui est contenue dans les plans d'antisymétrie avec $z =$ Cte, et perpendiculaire aux plans de symétrie avec $\phi =$ Cte.

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\rho) = B_\phi(\rho)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$

(b) (1) Calculer l'intensité de courant I.

$$I = \iint_S \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \vec{d\boldsymbol{S}} = A\int_{R_1}^{R_2} d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\phi \frac{e^{-\rho/a}}{\rho} = 2\pi A \int_{R_1}^{R_2} e^{-\rho/a} d\rho$$
$$= -2\pi A a \left[e^{-\rho/a}\right]_{R_1}^{R_2} = 2\pi A a \left(e^{-R_1/a} - e^{-R_2/a}\right)$$

(c) (1½) Calculer le champ $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ en tout point de l'espace.

- Comme $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}(\rho) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ pour $\rho < R_1$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = B_\phi(\rho)\,\widehat{\boldsymbol{e}}_\phi$, le théorème d'Ampère donne :

$$B_\phi(\rho) = 0 \qquad \rho < R_1$$

- Dans la région $R_2 > \rho > R_1$, I_{enl} par un cercle de rayon ρ centré sur l'axe est :

$$I_{\text{enl}}(\rho) = \iint \overrightarrow{\boldsymbol{j}}(\rho) \cdot \overrightarrow{d\mathbf{S}} = A \int_{R_1}^{\rho} \int_0^{2\pi} d\phi\, e^{-\rho/a} d\rho = 2\pi A a \left(e^{-R_1/a} - e^{-\rho/a}\right)$$

On peut ensuite déduire le champ $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ à partie du théorème d'Ampère :

$$\oint \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{l}} = 2\pi\rho B_\phi(\rho) = \mu_0 I_{\text{enl}} = \mu_0 2\pi A a \left(e^{-R_1/a} - e^{-\rho/a}\right)$$

$$\Rightarrow B_\phi(\rho) = \mu_0 A a \frac{\left(e^{-R_1/a} - e^{-\rho/a}\right)}{\rho}$$

- Pour $\rho > R_2$, $I_{\text{enl}} = 2\pi A a \left(e^{-R_1/a} - e^{-R_2/a}\right)$, et le théorème d'Ampère nous donne :

$$\oint \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{l}} = 2\pi\rho B_\phi(\rho) = 2\mu_0 \pi A a \left(e^{-R_1/a} - e^{-R_2/a}\right)$$

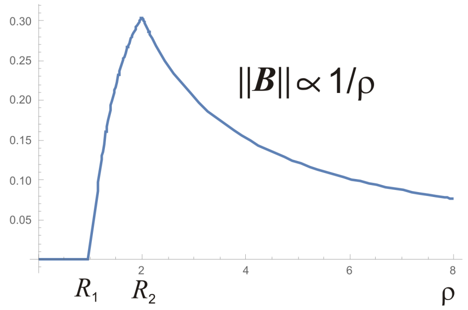
$$\Rightarrow B_\phi(\rho) = \mu_0 \frac{A a \left(e^{-R_1/a} - e^{-R_2/a}\right)}{\rho}$$

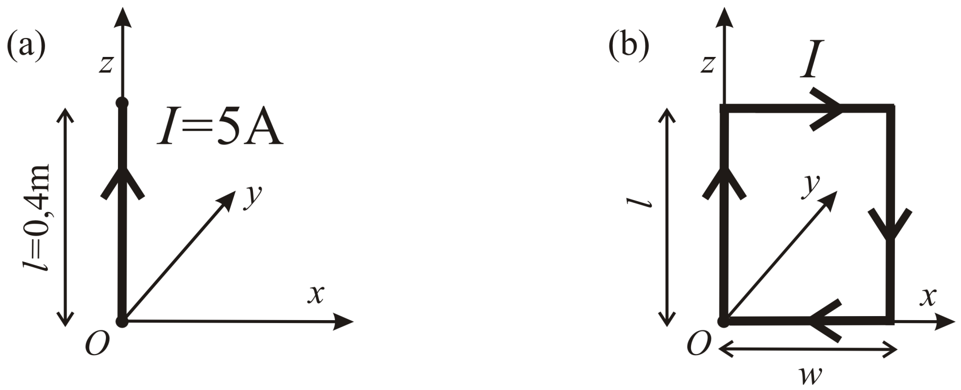
En résumé :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}(\rho) = \begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{0}} & \rho < R_1 \\ \mu_0 A a \frac{\left(e^{-R_1/a} - e^{-\rho/a}\right)}{\rho} \widehat{\boldsymbol{e}}_\phi & R_2 > \rho > R_1 \\ \mu_0 A a \frac{\left(e^{-R_1/a} - e^{-R_2/a}\right)}{\rho} \widehat{\boldsymbol{e}}_\phi & \rho > R^B_{\text{int}} \end{cases}$$

(d) (1) Tracer la courbe $||\overrightarrow{\boldsymbol{B}}(\rho)||$.

L'idée ici est de faire un dessin qualitatif. Prenant $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, et $a = 3$ par exemple :





3. (4.5pts) On considère un conducteur filamentaire droit de longueur, $l = 0,4$m, orienté le long de l'axe z parcouru par un courant d'intensité $I = 5$A (cf. figure (a))

   (a) (1½) Trouver la force de Laplace sur le fil (amplitude et direction) dans la présence d'un champ magnétique extérieur de $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\text{ext}} = 0,3\,(\hat{\boldsymbol{e}}_x + \hat{\boldsymbol{e}}_y + \hat{\boldsymbol{e}}_z)$T. (*donner la réponse analytique et l'application numérique*)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_L &= \int I\,\overrightarrow{d\boldsymbol{l}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = I\left(\int \overrightarrow{d\boldsymbol{l}}\right) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = I\left(\int dl\right)\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{B}}\right\| \hat{\boldsymbol{e}}_z \wedge (\hat{\boldsymbol{e}}_x + \hat{\boldsymbol{e}}_y + \hat{\boldsymbol{e}}_z) \\ &= Il\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{B}}\right\|(\hat{\boldsymbol{e}}_y - \hat{\boldsymbol{e}}_x) \\ &= 5\frac{4}{10}\frac{3}{10}(\hat{\boldsymbol{e}}_y - \hat{\boldsymbol{e}}_x)\,\text{N} = 0,6\,(\hat{\boldsymbol{e}}_y - \hat{\boldsymbol{e}}_x)\,\text{N}\end{aligned}$$

$$\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_L\right\| = 0,6\sqrt{1+1} \simeq 8.5\text{N}$$

   On considère maintenant que la tige fait partie d'un cadre rectangulaire dans le plan xOz de largeur w (voir figure (b)) et que le champ magnétique produit par la source extérieure est $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\text{ext}} = Ce^{-x}\hat{\boldsymbol{e}}_y$T où C est une constante. *Trouver les expressions analytiques pour :*

   (b) (1) La force laplace totale, $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_L$, sur le cadre.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_L &= \oint I\,\overrightarrow{d\boldsymbol{l}} \wedge \boldsymbol{B} = IlC\hat{\boldsymbol{e}}_z \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_y\left(1 - e^{-w}\right) \\ &= -IlC\hat{\boldsymbol{e}}_x\left(1 - e^{-w}\right) = IlC\left(e^{-w} - 1\right)\hat{\boldsymbol{e}}_x\end{aligned}$$

   (c) (1) Le flux magnétique, Φ_m, de $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\text{ext}}$ à travers le cadre.

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \iint \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{S}} = 0,6\int_0^l dl \int_0^w dx e^{-x} C\hat{\boldsymbol{e}}_y \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_y \\ &= Cl\left(1 - e^{-w}\right)\end{aligned}$$

(d) (1) Le travail effectué par la force de Laplace sur le cadre lors d'un déplacement du cadre le long de l'axe x jusqu'à l'infini. *Indice : utiliser le théorème de Maxwell.*

$$W_L = I\left(\Phi_f - \Phi_i\right) = I\left(0 - \Phi_m\right) = -IlC\left(1 - e^{-w}\right)$$

$$U_L\left(x\right) = -I\Phi_m\left(x\right) = -IlCe^{-x}\left(1 - e^{-w}\right)$$

4. (4.5pts) On considère un solénoïde de longueur h constitué de N spires de section circulaire de diamètre D parcourues par un courant i. h est suffisamment grand pour que le solénoïde puisse être considéré comme infini dans le calcul du champ magnétique. L'axe du solénoïde est selon $\hat{\boldsymbol{e}}_z$. Ce solénoïde est placé dans un champ uniforme de la forme $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\text{ext}} = B_0 \cos\left(\omega t\right)\left[\cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_z + \sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_x\right]$

(a) (1) Calculer l'inductance propre L du solénoïde.

$$L = N\Phi_m = \pi\frac{D^2}{4}\frac{N^2}{l}$$

(b) (1½) Calculer le flux de $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\text{ext}}$ à travers une spire du solénoïde, puis à travers tout le solénoïde.

Le flux magnétique à travers une spire est :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{spire}} &= \iint_S \overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\text{ext}} \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{S}} = \iint_S B_0\cos\left(\omega t\right)\left[\cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_z + \sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_x\right]\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z dS \\ &= B_0\cos\left(\omega t\right)\cos\theta\iint_S dS = B_0\cos\left(\omega t\right)\cos\theta\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Le flux à travers la bobine est N fois celui d'une spire dans la bobine, et nous avons donc :

$$\Phi_{\text{bobine}} = N\Phi_{\text{spire}} = N\pi\frac{D^2}{4}B_0\cos\theta\cos\left(\omega t\right)$$

(c) (1) En déduire la force électromotrice totale aux bornes de la bobine.

$$e\left(t\right) = -\frac{d}{dt}\left[N\pi\frac{D^2}{4}B_0\cos\theta\cos\left(\omega t\right)\right] = \left[N\pi\frac{D^2}{4}B_0\omega\cos\theta\sin\left(\omega t\right)\right]$$

(d) (1) En considérant la résistance R du solénoïde, calculer le courant $i(t)$ en régime permanent.

Le courant $i(t)$ est la solution de l'équation :

$$e\left(t\right) = L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t)$$

Puisque $N\pi\frac{D^2}{4}B_0\omega\cos\theta$ de 5(c) est une constante, écrivons la force électromotrice :

$$e\left(t\right) = N\pi\frac{D^2}{4}B_0\omega\cos\theta\sin\left(\omega t\right) \equiv e_0\sin\left(\omega t\right)$$

Le courant $i(t)$ en régime permanent sera sinusoïdale et déphasé par rapport à la force électromotrice :

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t - \delta), \qquad \text{et} \qquad \frac{di}{dt} = \omega i_0 \cos(\omega t - \delta)$$

L'équation pour le courant en régime permanent devient donc :

$$\begin{aligned} e_0 \sin(\omega t) &= L\omega i_0 \cos(\omega t - \delta) + R i_0 \sin(\omega t - \delta) \\ &= L\omega i_0 \cos(\omega t) \cos\delta + L\omega i_0 \sin(\omega t) \sin\delta \\ &\quad + R i_0 \sin(\omega t) \cos\delta - R i_0 \cos(\omega t) \sin\delta \end{aligned}$$

ce qui nous donne deux équations pour les coefficients de $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ respectivement :

$$\begin{aligned} 0 &= L\omega \cos\delta - R\sin\delta \\ e_0 &= R i_0 \cos\delta + L\omega i_0 \sin\delta \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\tan\delta = \frac{L\omega}{R}, \qquad (\star)$$

et

$$\begin{aligned} e_0 &= i_0 (R\cos\delta + L\omega \sin\delta) = i_0 R \left(\cos\delta + \frac{L\omega}{R}\sin\delta\right) \\ &= i_0 R (\cos\delta + \tan\delta \sin\delta) = i_0 R \cos\delta \left(1 + \tan^2\delta\right) \\ &= i_0 R \sqrt{1 + \tan^2\delta} = i_0 R \sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé : $\cos\delta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\delta}}$ et $\cos\delta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\delta}}$.

Donc :

$$i_0 = \frac{e_0}{R\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2}} = \frac{e_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

On aurait pu facilement résoudre ce problème en faisant appel à la méthode des impédances complexes. L'impédance complexe du circuit est :

$$Z_{\mathrm{c}} = R + i\omega L = |Z_{\mathrm{c}}| \, e^{i\delta}$$

Le courant complexe est :

$$i_c = \frac{e_0}{Z_{\mathrm{c}}} = \frac{e_0}{|Z_{\mathrm{circ}}|} e^{-i\delta}$$

La fonction du courant dans le temps est alors :

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t - \delta)$$

où :

$$i_0 = \frac{e_0}{|Z_{\mathrm{circ}}|} \ ,$$

et la phase :

$$\tan\delta = \frac{\mathrm{Im}\{Z_{\mathrm{c}}\}}{\mathrm{Re}\{Z_{\mathrm{c}}\}} = \frac{L\omega}{R} \ .$$