Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Année universitaire 2012/2013

Examen d'Electromagnétisme PEIP Aix-Marseille Université
15 janvier 2013
5 problèmes - recto verso / Durée de l'épreuve 2 heures
Calculettes standards autorisées / Formulaire Page A4 autorisée

1. (4pts) Quatre charges ponctuelles, chacunes de $30\mu C$ se trouvent aux positions $P_1 = (4,0,0)$m, $P_2 = (-4,0,0)$m, $P_3 = (0,-4,0)$m et $P_4 = (0,4,0)$m.

   (a) Trouver le champ électrique (vecteur) à la position M =(0,0,3)m.
   Sur l'axe z les composante des champs perpendiculaire à l'axe s'annulent deux à deux. Il ne reste que la superposition des champs le lang de l'axe z. La composante du champ électrique sur l'axe z est le identique pour chacune des particules. Le champ électrique sur l'axe z est la superposition de ces 4 champs

$$E_z(0,0,z) = 4 \times \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{\mathbf{P}_i\mathbf{M}}}{P_iM^3}\cdot\widehat{\mathbf{z}} = \left[4 \times \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{P_iM^2}\right]\frac{\overrightarrow{\mathbf{P}_i\mathbf{M}}}{P_iM}\cdot\widehat{\mathbf{z}}$$

   A.N.

$$\begin{aligned} P_iM &= \sqrt{4^2+3^2} = 5 \\ \frac{\overrightarrow{\mathbf{P}_i\mathbf{M}}}{P_iM}\cdot\widehat{\mathbf{z}} &= \frac{3}{5} \\ \overrightarrow{\mathbf{E}} &= \widehat{\mathbf{z}}E_z(0,0,z) = \widehat{\mathbf{z}}\left[4\times 9\times 10^9 \times 3 \times 10^{-5}\frac{1}{25}\times\frac{3}{5}\right] \\ &= \widehat{\mathbf{z}}\left[4\times\frac{3^4}{5^3}\times 10^4\right] \simeq 2,6\times 10^4\,\widehat{\mathbf{z}}\,\left[\mathrm{Vm}^{-1}\right] \end{aligned}$$

   (b) Quelle est la force (vecteur) sur une charge $Q = 100\mu C$ à la position M =(0,0,3)m ?

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{F}} &= q\overrightarrow{\mathbf{E}} = 10^{-4}\times 2,6\times 10^4\,\widehat{\mathbf{z}}\,[\mathrm{N}] \\ &= 2,6\,\widehat{\mathbf{z}}\,[\mathrm{N}] \end{aligned}$$

2. (6pts) On considère un champ électrique radial, d'expression en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(r,\theta,\phi) = \begin{cases} \frac{C}{\epsilon_0}\widehat{\mathbf{r}} & r < a \\ \frac{Ca^2}{\epsilon_0 r^2}\widehat{\mathbf{r}} & r \geq a \end{cases}$$

(a) Rappeler l'énoncé du théorème de Gauss.

$$\oiint_S \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{S}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \tag{1}$$

(b) Calculer la charge $Q(r_0)$, contenue dans une boule de rayon $r_0 < a$.

$$\frac{Q(r_0)}{\epsilon_0} = \oiint \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{S}} = 4\pi r_0^2 E_r(r_0) = 4\pi r_0^2 \frac{C}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow Q(r_0) = 4\pi C r_0^2$$

(c) Calculer la charge totale, $Q(r_0)$, contenue dans une boule de rayon $r_0 > a$. Que peut-on en conclure au sujet de la région $r > a$?

$$\frac{Q(r_0)}{\epsilon_0} = \oiint \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{S}} = 4\pi r_0^2 E_r(r_0) = 4\pi \frac{Ca^2}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow Q(r_0) = 4\pi C a^2$$

(d) Quelle est la dimension de la constante C ?
La dimension de C est $\left[\mathrm{Cm}^{-2}\right]$

(e) Déterminer le potentiel électrostatique $V(r)$ avec la convention $V(r \to \infty) = 0$.

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{r}} = \frac{Ca^2}{\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Ca^2}{\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{Ca^2}{\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

Quand $r = a$:

$$V(a) = \frac{Ca}{\epsilon_0}$$

Pour $r < a$:

$$\begin{aligned} V(r) - V(a) &= \int_r^a \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{r}} = \frac{C}{\epsilon_0}\int_r^a dr \\ &= \frac{C}{\epsilon_0} r\Big|_r^a = \frac{C}{\epsilon_0}(a - r) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{C}{\epsilon_0}a - \frac{C}{\epsilon_0}r + \frac{Ca}{\epsilon_0} = \frac{C}{\epsilon_0}[2a - r]$$

Le potentiel est donc

$$V(r) = \begin{cases} \frac{C}{\epsilon_0}[2a - r] & r < a \\ \frac{Ca^2}{\epsilon_0}\frac{1}{r} & r > a \end{cases}$$

(f) Bonus : Déduire la densité volumique de charge, $\rho(r)$ dans la région $r < a$.

Dans ce problème à symétrie sphérique, la densité volumique de charge, $\rho(r)$, est à symétrie sphérique :

$$dQ = 4\pi r^2 \rho(r)\, dr$$

A partir des solutions (b) et (c), on a :

$$Q(r) = \begin{cases} 4\pi C r^2 & r < a \\ 4\pi C a^2 & r > a \end{cases}$$

On calcul facilement la différentielle dQ :

$$dQ = \begin{cases} 8\pi C r dr & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{2C}{r} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

On aurait pu utiliser aussi

$$\rho(r) = \epsilon_0 \operatorname{div} \overrightarrow{\boldsymbol{e}} = \epsilon_0 \operatorname{div} E_r \overrightarrow{\boldsymbol{e}_r} = \frac{\epsilon_0}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 E_r = \begin{cases} \frac{\epsilon_0}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 \frac{C}{\epsilon_0} = C\frac{2}{r^2} r \\ \frac{C}{4r^2}\frac{d}{dr} r^2 \frac{Ca^2}{\epsilon_0 r^2} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2C}{r} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

ou

$$\rho(r) = -\epsilon_0 \Delta V(r) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} V(r) = \begin{cases} -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr}\left[\frac{C}{\epsilon_0}[2a - r]\right] = \frac{C}{\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 \\ -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr}\left[\frac{Ca^2}{\epsilon_0} r^{-1}\right] = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\frac{Ca^4}{\epsilon_0} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2C}{r} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

3. (4pts) Une surface de $S = 85\text{cm}^2$ dans le plan $z = 0$ est entourée par un conducteur filaire (circuit fermé). Le champ magnétique local est donné par :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = B_0 \cos\left(10^3 t\right)\left(\frac{\widehat{\boldsymbol{y}} + \widehat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{(T)}$$

   (a) Calculer le flux magnétique, $\Phi(t)$, à travers ce circuit. (A.N. $B_0 = 0,05$ T)

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \iint_S \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{S}} = \frac{B_0 S}{\sqrt{2}} \cos\left(10^3 t\right) \\ &= \frac{0,05 \times 85}{\sqrt{2}} 10^{-4} \cos\left(10^3 t\right) \\ &= 3 \times 10^{-4} \cos\left(10^3 t\right)\end{aligned}$$

   (b) Quelle est la force électromotrice $e(t)$ dans le circuit.

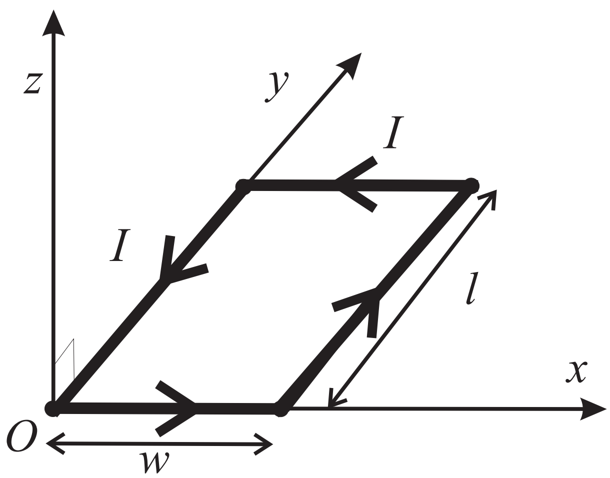
$$e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = 0,3 \sin\left(10^3 t\right)$$

   (c) Si la résistance du circuit est de 10Ω, quel est le courant $I(t)$ induit dans le circuit.

$$\begin{aligned}e &= RI(t) = 0,3 \sin\left(10^3 t\right) \\ &\Rightarrow I(t) = 0,03 \sin\left(10^3 t\right) \text{ A}\end{aligned}$$

4. (3pts) On considère un circuit en forme de cadre rectangulaire (de dimensions w selon x et l selon y) parcouru par un courant I (entretenu par un générateur) dans le plan $z = 0$. Le champ magnétique ambiant s'écrit :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}(x) = \widehat{\boldsymbol{z}} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{w}\right) \qquad \text{(T)} \ .$$



   (a) Trouver le flux du champ magnétique à travers le cadre, Φ, quand il est à la position indiquée dans la figure (un bord sur l'axe y ($x = 0$) et un autre sur la droite $x = w$).

$$\begin{aligned}\Phi_i &= \iint \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{S}} = \int_0^w dx \int_0^l dy B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{w}\right) \widehat{\boldsymbol{z}} \cdot \widehat{\boldsymbol{z}} \\ &= lB_0 \int_0^w dx \sin\left(\frac{\pi x}{w}\right) = -lB_0 \frac{w}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{w}\right)\right]_0^w \\ &= -lB_0 \frac{w}{\pi}\left[\cos(\pi) - \cos(0)\right] = 2lB_0 \frac{w}{\pi}\end{aligned}$$

(b) On déplace le cadre une distance w le long de l'axe x, Trouver le flux magnétique àprès le déplacement.

On peut déduire, $\Phi_f = -\Phi_i$, directement à partir de la nature sinusoidale du champ ou par calcul direct :

$$\begin{aligned}
\Phi_f &= \iint \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{S}} = lB_0 \int_w^{2w} dx \sin\left(\frac{\pi x}{w}\right) \\
&= -lB_0 \frac{w}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{w}\right)\right]_w^{2w} = -lB_0 \frac{w}{\pi}\left[\cos(2\pi) - \cos(\pi)\right] \\
&= -2lB_0 \frac{w}{\pi}
\end{aligned}$$

(c) Quel est le travail effectué lors du déplacement.

Par le théoreme de Maxwell, le travail effectué par la force de laplace lors du déplacement est

$$W = I\left(\Phi_f - \Phi_i\right) = -4IlB_0 \frac{w}{\pi}$$

L'opérateur doit fournir un travail opposé

$$W_{\text{op}} = -W = 4IlB_0 \frac{w}{\pi}$$

5. (3pts) Un proton lancé dans un champ magnétique décrit une orbite circulaire avec une période T. ($m_p \simeq 1,673 \times 10^{-27}$ kg, et $q_p \simeq 1,602 \times 10^{-19}$ C).

(On négligera la force de la gravitation devant la force de Lorentz dans l'établissement du principe fondamental de la dynamique)

(a) Que pouvez-vous en conclure au sujet de l'orientation relative entre la vitesse du proton et le champ magnétique ?

La vittesse, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, du proton est perpendiculaire au champ $\overrightarrow{\mathbf{B}}$.

(b) Exprimer le rayon de l'orbite du proton en fonction de sa masse m_p, de sa charge q_p, de sa vitesse v, et du champ B.

$$F_r = \left\|\overrightarrow{\mathbf{F}}\right\| = \left\|q_p \overrightarrow{\mathbf{v}}_p \wedge \overrightarrow{\mathbf{B}}\right\| = q_p v_p B = m_p a_r = m_p \frac{v_p^2}{R_L}$$

$$\Rightarrow m_p \frac{v_p^2}{R_L} = q_p v_p B$$

$$\Rightarrow R_L = \frac{m_p v_p}{q_p B}$$

(c) **A.N.** Quel est le champ magnétique si la période est $T = 2,18\mu$s. ?

$$\begin{aligned}
T &= \frac{2\pi R_L}{v_p} = \frac{2\pi}{B}\frac{m_p}{q_p} \\
B &= \frac{2\pi}{T}\frac{m_p}{q_p} \simeq 3 \times 10^{-2}\text{T}
\end{aligned}$$