

Examen d'Electromagnétisme - L2 Université Aix-Marseille 1
le 4 janvier 2011

(Formule utile : Divergence en coordonnées sphériques :
 $\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r A_\phi) \right]$)

1. (4pts) On considère une charge de $Q_1 = -500\mu\text{C}$ placée à $(2, 0, -5)\text{m}$.

(a) Trouver le champ électrique, $\vec{E}$ à la position $M = (-1, 0, -1)\text{m}$.

$$\begin{aligned}\vec{OP}_1 &= (2, 0, -5)\text{m} & \vec{M} &= \vec{OM} = (-1, 0, -1)\text{m} \\ \vec{P_1M} &= \vec{OM} - \vec{OP}_1 = (-3, 0, -4)\text{m} \\ \vec{E}_1(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(Q_1 \frac{\vec{P_1M}}{\|\vec{P_1M}\|^3} \right) \\ &= 9 \times 10^9 \left(Q_1 \frac{(-3, 0, -4)}{\|(-3, 0, -4)\|^3} \right) \\ &= 9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-4} \frac{(3, 0, 4)}{5^3} \\ &= 9 \times 10^5 \left(\frac{(3, 0, 4)}{25} \right) \text{V/m}\end{aligned}$$

où nous avons utilisé

$$\|\vec{P_1M}\| = \sqrt{\vec{P_1M} \cdot \vec{P_1M}} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

(b) On place une deuxième charge de $Q_2 = 500\mu\text{C}$ à la position $M = (-1, 0, -1)\text{m}$.
 Calculer la force, $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ exercée sur la charge Q_2 .

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= Q_2 \vec{E} = 5 \times 10^{-4} \times \left[9 \times 10^5 \left(\frac{(3, 0, 4)}{25} \right) \right] \\ &= 10^{-4} \times \left[9 \times 10^5 \left(\frac{(3, 0, 4)}{5} \right) \right] = 18 \times [(3, 0, 4)] \text{N}\end{aligned}$$

(c) Calculer la force exercée sur la charge Q_1 .

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -18 \times [(3, 0, 4)] \text{N}$$

(d) Calculer le moment dipolaire, $\vec{p}$, du système.

$$\begin{aligned}\vec{p} &= Q_1 \vec{P_2P_1} = -5 \times 10^{-4} \times (-3, 0, -4) = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \text{Cm} \\ &= [15\hat{x} + 20\hat{z}] \times 10^{-4} \text{Cm}\end{aligned}$$

2. (4pts) On considère un champ électrique exprimé en coordonnées sphériques tel que :

$$\vec{\mathbf{E}}(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \frac{C}{\epsilon_0} \frac{r^3}{a^5} \hat{\mathbf{r}} & r < a \\ \frac{C}{\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} & r > a \end{cases}$$

(a) Trouver la densité volumique de charge dans les deux régions ($r > a$ et $r < a$).

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{Cr^5}{a^5} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{5Cr^2}{a^5} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \rho(r) &= \frac{5Cr^2}{a^5} \quad r < a \\ \rho &= \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = a^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{C}{\epsilon_0} \right) = 0 \quad r > a \end{aligned}$$

(b) Déterminer la charge totale du système.

$$\begin{aligned} Q &= \iiint \rho d\mathcal{V} = 20\pi C \int_0^a \left(\frac{r^2}{a^5} \right) r^2 dr \\ &= \frac{20\pi C}{a^5} \left[\int_0^a r^4 dr \right] = 4\pi C \end{aligned}$$

(c) Trouver le potentiel V dans les deux régions ($r > a$ et $r < a$).

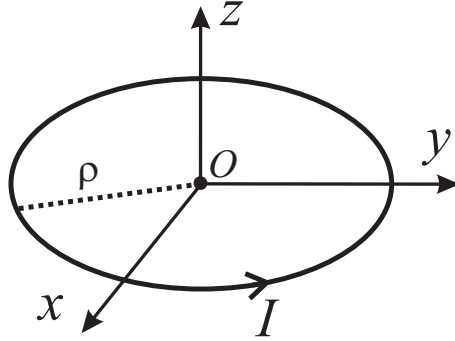
$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{C}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad r > a \\ V(a) &= \frac{C}{\epsilon_0 a} \\ V(r) - V(a) &= \int_r^a \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = C \int_r^a \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{r^3}{a^5} \right) dr \\ &= \frac{C}{\epsilon_0} \int_r^a \frac{r^3}{a^5} dr = \frac{C}{\epsilon_0} \left[\frac{r^4}{4a^5} \right]_r^a \\ V(r) - V(a) &= \frac{C}{\epsilon_0} \frac{a^4}{4a^5} - \frac{C}{\epsilon_0} \frac{r^4}{4a^5} \\ V(r) - \frac{C}{\epsilon_0 a} &= \frac{C}{\epsilon_0} \frac{a}{4} - \frac{C}{\epsilon_0} \left[\frac{r^4}{4a^3} \right] \\ V(r) &= \frac{C}{4a^5\epsilon_0} [5a^4 - r^4] \end{aligned}$$

- (d) Trouver l'énergie électrostatique, W_e , stockée dans le système.

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \iiint \rho(r) V(r) d\mathcal{V} = 2\pi C^2 \int_0^a \frac{5r^2}{a^5} \frac{1}{4a^5\epsilon_0} [5a^4 - r^4] r^2 dr \\ &= \frac{5\pi C^2}{2a^{10}\epsilon_0} \int_0^a [5a^4 - r^4] r^4 dr = \frac{5\pi C^2}{2a^{10}\epsilon_0} \left[5a^4 \int_0^a r^4 dr - \int_0^a r^8 dr \right] \\ &= \frac{5\pi C^2}{2a^{10}\epsilon_0} \left[a^9 - \frac{a^9}{9} \right] = \frac{20\pi C^2}{9a\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint \|\vec{\mathbf{E}}\|^2 d\mathcal{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 C^2}{2} \int_0^a \frac{1}{\epsilon_0^2 a^{10}} r^6 r^2 dr + \frac{4\pi\epsilon_0 C^2}{2} \int_a^\infty \frac{1}{\epsilon_0^2 r^4} r^2 dr \\ &= \frac{2\pi C^2}{\epsilon_0} \left[\int_0^a \frac{1}{a^{10}} r^8 dr + \int_a^\infty \frac{1}{r^2} dr \right] \\ &= \frac{2\pi C^2}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{9a} + \frac{1}{a} \right] = \frac{20\pi C^2}{9a\epsilon_0} \end{aligned}$$

3. (3 pts) Considérer une spire conductrice de rayon ρ placée dans le plan xOy ($z = 0$), et portant un courant I (voir figure).



- (a) Trouver l'expression pour le champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ au centre de la spire.

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{O}}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\mathbf{l}} \wedge \vec{\mathbf{PO}}}{\|\vec{\mathbf{PO}}\|^3} = \frac{\mu_0 I \rho}{4\pi \rho^3} \int \rho d\phi \hat{\phi} \wedge (-\vec{\rho}) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\rho} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

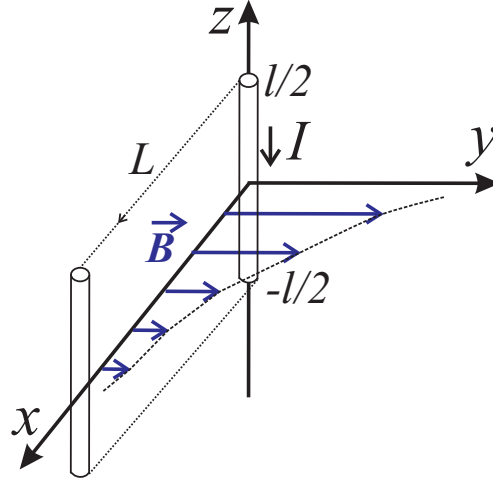
- (b) A.N. spécifier $\vec{\mathbf{B}}$ au centre de la spire quand $I = 10\text{A}$, et $\rho = 1\text{cm}$.

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{O}}) = \frac{2\pi 10^3}{10^7} \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} 2\pi 10^{-4} \text{T}$$

- (c) Donner l'expression pour l'accélération (vecotrielle) d'un électron se déplaçant avec une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = v\hat{\mathbf{x}}$ sur l'axe x à l'instant où il se trouve au centre de la spire ($v \ll c$).

$$\vec{\mathbf{a}}_e = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m_e} = \frac{q_e}{m_e} v\hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I}{2\rho} = -\frac{q_e v}{m_e} \frac{\mu_0 I}{2\rho} \hat{\mathbf{y}} = \frac{ev}{m_e} \frac{\mu_0 I}{2\rho} \hat{\mathbf{y}}$$

4. (3 pts) Un conducteur cylindrique mince (c.-à-d. un fil électrique) se trouve sur l'axe z dans la région $-l/2 \leq z \leq l/2$ (voir figure) et porte un courant I dans la direction $-\hat{\mathbf{z}}$. Le champ magnétique s'exprime, $\vec{\mathbf{B}} = B_0 e^{-\lambda x} \hat{\mathbf{y}}$ (T).



- (a) Calculer le travail effectué par la force de Laplace en déplaçant le fil sur une distance L le long de l'axe x (voir figure).

$$\begin{aligned} d\vec{\mathbf{l}} &= \hat{\mathbf{z}} dz \\ \vec{\mathbf{F}}_L &= \int_{-l/2}^{l/2} d\vec{\mathbf{F}}_L = - \int_{-l/2}^{l/2} d\vec{\mathbf{l}} \wedge \vec{\mathbf{B}} \\ &= - \int_{-l/2}^{l/2} IB_0 e^{-\lambda x} \hat{\mathbf{z}} \wedge \hat{\mathbf{y}} dz = IB_0 l e^{-\lambda x} \hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_L &= \int_0^L dW_L = \int_0^L \vec{\mathbf{F}}_L \cdot \hat{\mathbf{x}} dx = IlB_0 \int_0^L e^{-\lambda x} dx \\ &= -\frac{IlB_0}{\lambda} [e^{-\lambda x}]_0^L = \frac{IlB_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda L}) \end{aligned}$$

- (b) A.N. $l = 3\text{m}$, $L \rightarrow \infty$, $\lambda = 0,2\text{m}^{-1}$, $I = 1\text{A}$ et $B_0 = 2\text{T}$.

$$\text{A.N.} \quad W_L \rightarrow \frac{IlB_0}{\lambda} = \frac{1 \times 3 \times 2}{2 \times 10^{-1}} = 30\text{J}$$

- (c) Déterminer la puissance fournie par la force de Laplace lors du déplacement si le mouvement s'effectue à vitesse constante pendant un temps $\Delta t = 0,1\text{s}$.

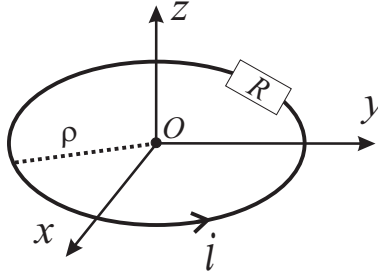
$$P_L = \frac{W_L}{\Delta t} = 300\text{W}$$

5. (3 pts) On considère un potentiel vecteur $\vec{A}$ qui s'exprime $\vec{A} = \hat{y}(\cos ax) + \hat{z}(y^2 + e^x)$.

(a) Trouver le champ $\vec{B}$ dans tout l'espace.

$$\begin{aligned}\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \cos ax & y^2 + e^x \end{vmatrix} = \hat{x} \left(\frac{\partial (y^2 + e^x)}{\partial y} \right) - \hat{y} \left(\frac{\partial (y^2 + e^x)}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos ax \right) \\ &= \hat{x} 2y - e^x \hat{y} - \hat{z} a \sin ax\end{aligned}$$

6. (4 pts) Considérer une spire circulaire et conductrice (de résistance R et de rayon ρ) placée dans le plan xOy ($z = 0$) (voir figure). Le champ $\vec{B}$ varie dans temps et s'exprime : $\vec{B} = \hat{z} B_0 \cos \omega t$.



(a) Calculer le flux du champ magnétique, $\Phi(t)$, à travers la spire.

$$\begin{aligned}d\vec{S} &= \hat{z} \rho d\phi d\rho \\ \Phi(t) &= \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_0 \cos \omega t \iint dS = \pi \rho^2 B_0 \cos \omega t\end{aligned}$$

(b) Calculer la force électromotrice, $e(t)$, dans la spire.

$$e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \pi \rho^2 B_0 \omega \sin \omega t$$

(c) Déterminer le courant induit, $i(t)$, dans la spire.

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{\pi \rho^2 B_0 \omega}{R} \sin \omega t$$

(d) A.N. Exprimer $i(t)$ avec $\rho = 0,1\text{m}$, $R = 3.14\Omega$, $B_0 = 1\text{T}$, $\omega = 10^3\text{s}^{-1}$.

$$\begin{aligned}i(t) &= \frac{\pi \rho^2 B_0 \omega}{R} \sin \omega t = \frac{\pi 10^3}{\pi 10^2} \sin 10^3 t \\ &= [10 \sin 10^3 t] \text{ A}\end{aligned}$$