Partiel Électromagnétisme - PEIP 2
15 janvier 2025 13h30
4 problèmes / Durée de l'épreuve 2h.
Formulaire A4 manuscrit autorisé / Calculettes standards autorisées

1. (5 pts) Une plaque infinie, d'épaisseur $2a$, avec des normales aux surfaces orientées selon $\pm\vec{\boldsymbol{u}}_z$, porte une densité volumique de charge uniforme $\rho_0 > 0$. (voir la Fig. 2(a), où $z = 0$ correspond au centre de la plaque).

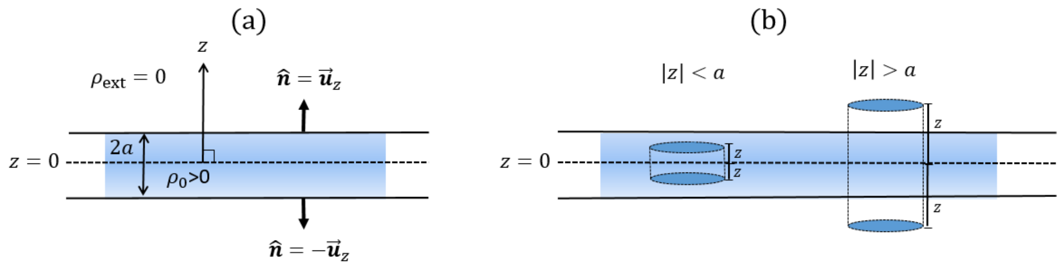

FIGURE 1 – Une plaque de charge infinie de densité homogène $\rho_0 > 0$ et épaisseur $2a$.

(a) Déduisez, sans effectuer de calculs, les orientations du champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ dans les régions $z < 0$ et $z > 0$. En tenant compte des invariances de la plaque, quelles conclusions pouvez-vous tirer sur les dépendances de $\vec{\boldsymbol{E}}(x, y, z)$ par rapport aux coordonnées ?

Solution : Le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ appartient à tout plan de symétrie du problème. Comme tout plan perpendiculaire à la plaque constitue un axe de symétrie, $\vec{\boldsymbol{E}}$ doit nécessairement être orienté selon la direction $\vec{\boldsymbol{u}}_z$, c'est-à-dire le long de l'axe $\vec{\boldsymbol{u}}_z$. Étant donné que la densité volumique de charge $\rho_0 > 0$, on en déduit que $\vec{\boldsymbol{E}}$ s'éloigne de la plaque.
Les invariances de la distribution de charge par translation selon x et y nous dictent, conformément au principe de Curie, que le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ ne dépend que de la coordonnée z.
Ainsi, on peut conclure que le champ électrique a la forme suivante : $\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{z}{|z|} E_z(z) \vec{\boldsymbol{u}}_z$.

(b) Déterminez le champ électrique, $E_z \equiv \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_z$, en fonction des coordonnées dans les régions $|z| < a$ et $|z| > a$, puis tracez l'ensemble à la main en fonction de z. (*Indice :* utilisez une surface de Gauss cylindrique de hauteur $2z$, centrée en $z = 0$, comme celles indiquées sur Fig.2(b)).

Solution : La symétrie du problème dicte que le champ $\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{z}{|z|} E_z(z) \vec{\boldsymbol{u}}_z$.

$$|z| \leq a \quad : \quad \oiint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{S}} = 2E_z(z)\mathcal{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{2z\mathcal{S}\rho_0}{\epsilon_0} \Longrightarrow E_z(z) = \frac{z\rho_0}{\epsilon_0} \tag{1a}$$

$$|z| \geq a \quad : \quad \oiint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{S}} = 2E_z(z)\mathcal{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{2a\mathcal{S}\rho_0}{\epsilon_0} \Longrightarrow E_z(z) = \frac{a\rho_0}{\epsilon_0} \tag{1b}$$

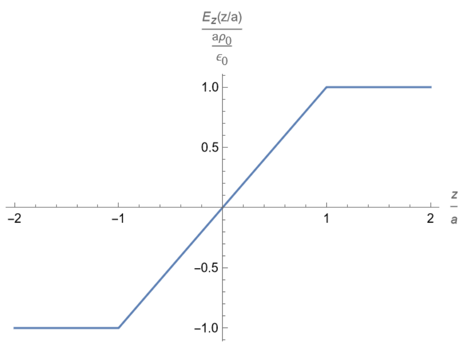

FIGURE 2 – $E_{z/a}$ en fonction de z/a.

(c) En définissant le potentiel $V(z = 0) = 0$, déterminez le potentiel $V(z)$, puis tracez-le à la main en fonction de z.

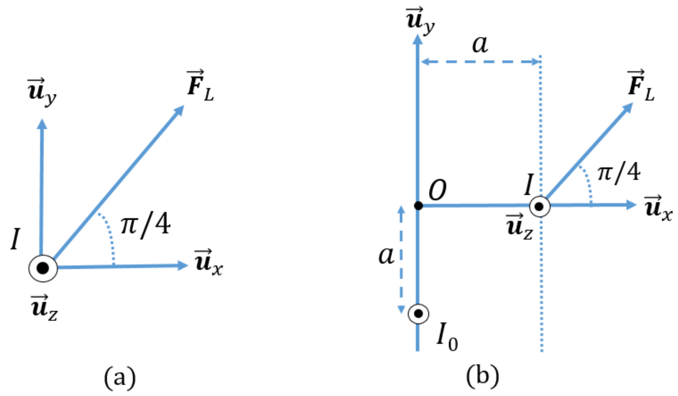

FIGURE 3 – Fil de longueur ℓ, portant un courant I, dans un champ $\boldsymbol{B}$, uniforme sur toute sa longueur.

2. (5 pts) On considère un conducteur filaire de longueur $\ell = 5$ m, parcouru par un courant $I = 3\sqrt{2}$ A dans la direction $\vec{u}_z$. Le fil est plongé dans un champ magnétique externe $\vec{B}$, ce qui conduit à une force de Laplace sur le fil, $\vec{F}_L$, dans la direction $\left(\vec{u}_x + \vec{u}_y\right)/\sqrt{2}$. (voir Fig. 3(a)).

   (a) Trouvez les composantes B_x et B_y d'un champ magnétique uniforme sur toute la longueur du fil qui produira une force de Laplace de $\vec{F}_L = 6\times 10^{-3}\frac{(\vec{u}_x+\vec{u}_y)}{\sqrt{2}}$N sur le fil. (On considère $B_z = 0$.)

   Solution : La force de Laplace est :

$$\vec{F}_L = I\int_0^\ell \vec{d\ell}\wedge\vec{B} = I\begin{pmatrix}0\\0\\\ell\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\0\end{pmatrix} = I\ell\begin{pmatrix}-B_y\\B_x\\0\end{pmatrix} ,$$

   mais d'après l'énoncé on a :

$$\begin{aligned}\vec{F}_L = \frac{6\times10^{-3}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = I\ell\begin{pmatrix}-B_y\\B_x\\0\end{pmatrix} = 3\sqrt{2}\times 5\begin{pmatrix}-B_y\\B_x\\0\end{pmatrix}\\ \Longrightarrow B_x = -B_y = \frac{10^{-3}}{5}\text{T} = 2\times10^{-4}\text{T} = 2\,\text{Gauss} \Longrightarrow \vec{B} = 10^{-3}\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}\\0\end{pmatrix}\text{T}\end{aligned} \tag{2}$$

   (b) Si l'on ajoute une composante du champ $B_z \neq 0$, comment cela modifie-t-il la force exercée sur le conducteur ?

   Solution : Ceci ne modifierait pas, $\vec{F}_L$ car un champ orienté parallèle au courant ne produit pas une Force de Laplace :

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-B_y\\B_x\\0\end{pmatrix} ,$$

   (c) On adopte un système de coordonnées dans lequel le fil de la question (a) est situé en $(x = a, y = 0)$. Un autre fil, infini, est placé en $(x = 0, y = -a)$ et porte un courant I_0 selon l'axe Oz, comme indiqué dans la Fig.3(b). Déterminez les composantes du champ B_x et B_y produites par le courant I_0 à la position du fil portant le courant I, $(x = a, y = 0)$. (Rappelons que $\vec{u}_\phi = -\sin\phi\,\vec{u}_x + \cos\phi\,\vec{u}_y$).

   Solution : Le champ magnétique créé par un courant I_0, orienté selon l'axe Oz est :

$$\begin{aligned}\vec{B}(\rho,\phi,z) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi\rho}\vec{u}_\phi = \vec{B}(\rho = a\sqrt{2}, \phi = \frac{\pi}{4}, z) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}\\ = \frac{4\pi10^{-7}}{4\pi a}I_0\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{4\pi10^{-7}}{4\pi10^{-2}}I_0\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = 10^{-5}I_0\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\text{T} .\end{aligned} \tag{3}$$

(d) Déterminez la valeur de I_0 qui reproduirait la même force de Laplace sur le premier fil que celle indiquée à la question (a). Indiquez clairement le signe de I_0 ainsi que sa valeur numérique pour $a = 1$ cm.

Solution : En égalisant le champ $\vec{B}$ trouvé à la position $(x = a, y = 0)$, produit par un courant I_0 trouvé en l'éq.(3) avec le champ $\vec{B}$ trouvé dans l'éq. (2) de 2a, on déduit que :

$$10^{-5} I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 10^{-3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow I_0 = -\frac{100}{5} = -20\text{A} .$$

Ce qui nous dit que le sens des courants de I et de I_0 doit être opposé. On s'attend à ce résultat en se rappelant du cours que deux fils de courant orienté dans le même sens s'attirent alors que deux fils portant des courants opposés se repoussent.

3. (5 pts) **Calculs magnéto-statique :**

(a) On considère un potentiel vecteur : $\vec{A}(\rho, \phi, z) = \frac{C\rho^2}{4} \vec{u}_z$ dans une région cylindrique de $\rho \leq a$ avec C une constante. Trouvez le champ magnétique, $\vec{B}(\rho, \phi, z) = \overrightarrow{\mathbf{rot}} \vec{A}$, associé à $\vec{A}$ (*Indice :* utiliser l'éq.(4) en bas de la page).

Solution : Puisque, $A_\rho = A_\phi = 0$ et $A_z = \frac{C\rho^2}{4}$ on a :

$$\begin{aligned} \vec{B}(\rho, \phi, z) = \overrightarrow{\mathbf{rot}} \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \vec{u}_\rho \left[\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial (\rho A_\phi)}{\partial z} \right] + \vec{u}_\phi \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho} \vec{u}_z \left[\frac{\partial (\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \\ &= \vec{u}_\phi \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{C\rho^2}{4} \right) = \frac{C\rho}{2} \vec{u}_\phi \end{aligned}$$

(b) Déduire la dimension de C.

Solution : La constante C a les dimensions de Tesla m^{-1}.

(c) Utilisez le théorème d'Ampère local pour déduire la densité volumique de courant, $\vec{j}$, dans la région $\rho \leq a$.

Solution :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{rot}} \vec{B} &= \frac{1}{\rho} \vec{u}_\rho \left[\frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial (\rho B_\phi)}{\partial z} \right] + \vec{u}_\phi \left[\frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho} \vec{u}_z \left[\frac{\partial (\rho B_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial B_\rho}{\partial \phi} \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{C\rho^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} C\rho \vec{u}_z = C \vec{u}_z . \end{aligned}$$

Avec le théorème de Ampère, on peut en déduire la densité de courant, $\vec{j}$:

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\mathbf{rot}} \vec{B} = \frac{C}{\mu_0} \vec{u}_z .$$

(d) Trouvez le courant I traversant une surface $\vec{S} = \vec{u}_z \mathcal{S}$, définie par $z =$ constant et $\rho \leq a$.

Solution :

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot \vec{dS} = \iint_{\mathcal{S}} \frac{C}{\mu_0} \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z d\mathcal{S} = \frac{C}{\mu_0} \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{C}{\mu_0} \mathcal{S} = \frac{C}{\mu_0} \pi a^2 .$$

4. (6 pts) On considère un solénoïde de longueur $\ell = 314,16$ cm, constitué de $N = 1000$ spires et de section carrée de côté $a = 10$ cm (voir Fig.4). L'axe du solénoïde est orienté selon $\vec{u}_z$. Donnez les formules et effectuez les applications numériques pour les questions (a) à (c). On adopte partout l'approximation du solénoïde infini, $\ell \gg a$.

(a) Calculez l'expression ainsi que la valeur numérique du champ $\vec{B}_{\text{int}}$ à l'intérieur du solénoïde lorsqu'un courant $I = 10$A y circule. (Indice : appliquez la formule appropriée ou utilisez le théorème d'Ampère en supposant que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul).

Solution :

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \vec{u}_z = \frac{4 \times \pi \times 10^{-7} \times 10^3 \times 10}{\pi} \vec{u}_z = 4 \times 10^{-3} \vec{u}_z \, \text{T} .$$

(b) Calculez l'inductance propre, L, du solénoïde (expression et A.N.).
Solution : Le flux magnétique à travers un spire de la bobine est :

$$\Phi_{\text{spire}} = |\vec{\boldsymbol{B}}_{\text{int}}|S = |\vec{\boldsymbol{B}}_{\text{int}}|a^2$$

et le flux à travers la Bobine est $\Phi_{\text{bobine}} = N\Phi_{\text{spire}}$. L'inductance de la Bobine est maintenant :

$$L = \frac{N\Phi_{\text{bobine}}}{I} = \mu_0 a^2 \frac{N^2}{\ell} = \frac{4 \times \pi \times 10^{-7} \times 10^{-2} \times 10^{6}}{\pi} = 4 \times 10^{-3}\,\text{H} .$$

(c) Donnez l'expression de l'énergie magnétique $\mathcal{E}_m$ stockée dans la bobine et calculez sa valeur numérique pour $I = 10$A (méthode au choix).
Solution :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}4 \times 10^{-3} \times 10^2 = 0.2\,\text{J} .$$

(d) Dans la Fig.5, la bobine décrite dans l'énoncé est placée dans un circuit fermé de résistance R et immergée dans un champ externe uniforme et variable dans le temps, $\vec{\boldsymbol{B}}_{\text{ext}}(t) = B_0 \cos(\omega t) \left[\cos\theta \vec{\boldsymbol{u}}_z + \sin\theta \vec{\boldsymbol{u}}_x\right]$. Calculez le flux de ce champ externe $\Phi_{\text{ext}}(t)$ à travers la bobine (expression uniquement).
Solution : Le flux magnétique à travers une spire de la bobine est :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{spire}} &= \iint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{B}}_{\text{ext}} \cdot \vec{d\boldsymbol{S}} = \iint_{\mathcal{S}} B_0 \cos(\omega t) \left[\cos\theta \widehat{\boldsymbol{e}}_z + \sin\theta \widehat{\boldsymbol{e}}_x\right] \cdot \widehat{\boldsymbol{e}}_z dS \\ &= B_0 \cos(\omega t) \cos\theta \iint_{\mathcal{S}} dS = B_0 \cos(\omega t) \cos\theta a^2 .\end{aligned}$$

Le flux à travers la bobine est N fois celui d'une spire dans la bobine, et nous avons donc :

$$\Phi_{\text{bobine}}(t) = N\Phi_{\text{spire}} = Na^2 \cos\theta \cos(\omega t) .$$

(e) Déduisez la force électromotrice $e_{\text{ext}}(t)$ induite dans la bobine par le champ extérieur $\vec{\boldsymbol{B}}_{\text{ext}}(t)$. (expression)
Solution :

$$e_{\text{ext}}(t) = -\frac{d\Phi_{\text{bobine}}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[Na^2 B_0 \cos\theta \cos(\omega t)\right] = Na^2 B_0 \omega \cos\theta \sin(\omega t)$$

(f) Écrivez l'équation différentielle pour le courant $i(t)$ dans ce circuit, en fonction de la force électromotrice $e_{\text{ext}}(t)$ (due à $\vec{\boldsymbol{B}}_{\text{ext}}(t)$), de L et de R.
Solution : Le courant $i(t)$ est la solution de l'équation :

$$e_{\text{ext}}(t) = L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t) .$$

(g) **Bonus (A faire seulement si vous avez terminé tout le reste de l'examen) :** Résoudre l'équation différentielle trouvée en (4f) pour $i(t)$.
Solution : Le courant $i(t)$ est la solution de l'équation :

$$e_{\text{ext}}(t) = L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t)$$

Simplifions la notation en définissant la constante, $e_0 \equiv Na^2 B_0 \omega \cos\theta$ de 5(c). La force électromotrice s'écrit alors :

$$e_{\text{ext}}(t) = Na^2 B_0 \omega \cos\theta \sin(\omega t) \equiv e_0 \sin(\omega t) .$$

Le courant $i(t)$ en régime permanent sera sinusoïdale et déphasé par rapport à la force électromotrice :

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t - \delta), \qquad \text{et} \qquad \frac{di}{dt} = \omega i_0 \cos(\omega t - \delta)$$

L'équation pour le courant en régime permanent devient donc :

$$\begin{aligned}e_0 \sin(\omega t) &= L\omega i_0 \cos(\omega t - \delta) + R i_0 \sin(\omega t - \delta) \\ &= L\omega i_0 \cos(\omega t)\cos\delta + L\omega i_0 \sin(\omega t)\sin\delta \\ &+ R i_0 \sin(\omega t)\cos\delta - R i_0 \cos(\omega t)\sin\delta\ ,\end{aligned}$$

ce qui nous donne deux équations pour les coefficients de $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ respectivement :

$$\begin{aligned}0 &= L\omega\cos\delta - R\sin\delta \\ e_0 &= R i_0 \cos\delta + L\omega i_0 \sin\delta\ .\end{aligned}$$

On peut résoudre ces deux équation afin de trouver :

$$\tan\delta = \frac{L\omega}{R}, \qquad (\star)$$

et

$$\begin{aligned}e_0 &= i_0\left(R\cos\delta + L\omega\sin\delta\right) = i_0 R\left(\cos\delta + \frac{L\omega}{R}\sin\delta\right) \\ &= i_0 R\left(\cos\delta + \tan\delta\sin\delta\right) = i_0 R\cos\delta\left(1+\tan^2\delta\right) \\ &= i_0 R\sqrt{1+\tan^2\delta} = i_0 R\sqrt{1+\left(\frac{L\omega}{R}\right)^2}\ ,\end{aligned}$$

où nous avons utilisé : $\cos\delta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\delta}}$.
Nous pouvons donc déduire que :

$$i_0 = \frac{e_0}{R\sqrt{1+\left(\frac{L\omega}{R}\right)^2}} = \frac{e_0}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}\ .$$

De façon alternative, on peut faire appel à la méthode des impédances complexes. L'impédance complexe du circuit est :

$$Z = R + j\omega L = |Z|\, e^{j\delta}\ .$$

Le courant complexe est :

$$i_c = \frac{e_c}{Z} = \frac{e_c}{|Z|} e^{-j\delta}\ .$$

La fonction du courant dans le temps est alors :

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t - \delta)$$

où :

$$i_0 = \frac{e_0}{|Z|} = \frac{e_0}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}\ ,$$

et la phase :

$$\tan\delta = \frac{\mathrm{Im}\{Z\}}{\mathrm{Re}\{Z\}} = \frac{L\omega}{R}\ .$$

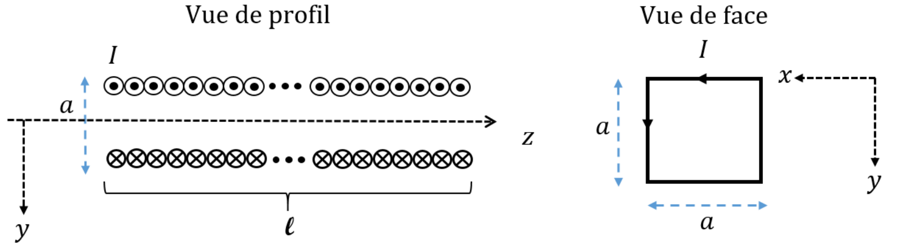

FIGURE 4 – Bobine de section carrée de longueur ℓ, avec un axe orienté selon $\boldsymbol{u}_z$.

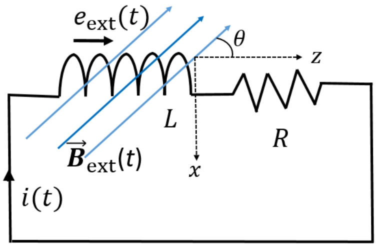

FIGURE 5 – Bobine de Fig.(4) dans un circuit de résistance R, immergée dans un champ $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}(t)$.

$$\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}\ \text{H.m}^{-1} \quad , \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \times 10^{9}\ \text{F.m}^{-1}$$

Cylindrique : $$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{\boldsymbol{F}}\,(\rho,\phi,z) = \frac{1}{\rho}\vec{\boldsymbol{u}}_\rho \left[\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial\,(\rho F_\phi)}{\partial z}\right] + \vec{\boldsymbol{u}}_\phi \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right] + \frac{1}{\rho}\vec{\boldsymbol{u}}_z \left[\frac{\partial\,(\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right] \qquad (4)$$