Partiel Électromagnétisme - PEIP 2
15 janvier 2025 13h30
4 problèmes / Durée de l'épreuve 2h.
Formulaire A4 manuscrit autorisé / Calculettes standards autorisées

1. (5 pts) Une plaque infinie, d'épaisseur $2a$, avec des normales aux surfaces orientées selon $\pm\vec{u}_z$, porte une densité volumique de charge uniforme $\rho_0 > 0$. (voir la Fig. 1(a), où $z = 0$ correspond au centre de la plaque).

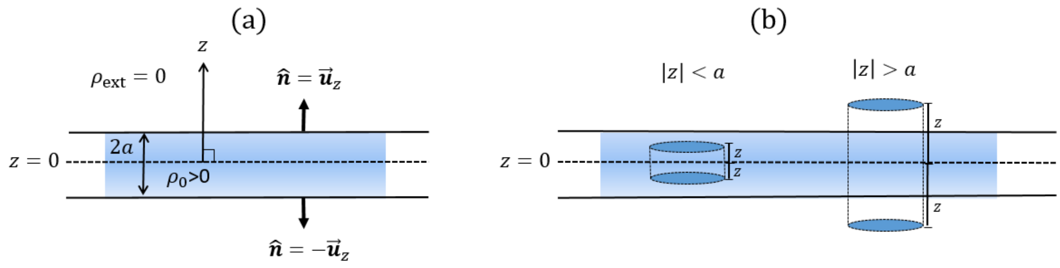

FIGURE 1 – Une plaque de charge infinie de densité homogène $\rho_0 > 0$ et épaisseur $2a$.

   (a) Déduisez, sans effectuer de calculs, les orientations du champ $\vec{E}$ dans les régions $z < 0$ et $z > 0$. En tenant compte des invariances de la plaque, quelles conclusions pouvez-vous tirer sur les dépendances de $\vec{E}(x, y, z)$ par rapport aux coordonnées ?

   (b) Déterminez le champ électrique, $E_z \equiv \vec{E} \cdot \vec{u}_z$, en fonction des coordonnées dans les régions $|z| < a$ et $|z| > a$, puis tracez l'ensemble à la main en fonction de z. (*Indice :* utilisez une surface de Gauss cylindrique de hauteur $2z$, centrée en $z = 0$, comme celles indiquées sur Fig.1(b)).

   (c) En définissant le potentiel $V(z = 0) = 0$, déterminez le potentiel $V(z)$, puis tracez-le à la main en fonction de z.

2. (5 pts) On considère un conducteur filaire de longueur $\ell = 5$ m, parcouru par un courant $I = 3\sqrt{2}$ A dans la direction $\vec{u}_z$. Le fil est plongé dans un champ magnétique externe $\vec{B}$, ce qui conduit à une force de Laplace sur le fil, $\vec{F}_L$, dans la direction $\left(\vec{u}_x + \vec{u}_y\right)/\sqrt{2}$. (voir Fig. 2(a)).

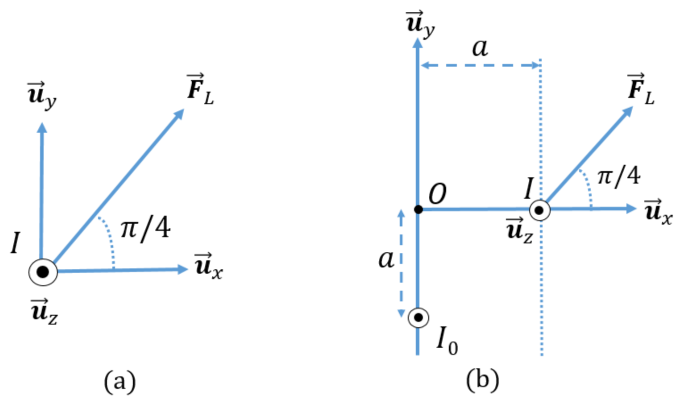

FIGURE 2 – Fil de longueur ℓ, portant un courant I, dans un champ $\vec{B}$, uniforme sur toute sa longueur.

   (a) Trouvez les composantes B_x et B_y d'un champ magnétique uniforme sur toute la longueur du fil qui produira une force de Laplace de $\vec{F}_L = 6 \times 10^{-3}\frac{(\vec{u}_x+\vec{u}_y)}{\sqrt{2}}$N sur le fil. (On considère $B_z = 0$.)

   (b) Si l'on ajoute une composante du champ $B_z \neq 0$, comment cela modifie-t-il la force exercée sur le conducteur ?

   (c) On adopte un système de coordonnées dans lequel le fil de la question (a) est situé en $(x = a, y = 0)$. Un autre fil, infini, est placé en $(x = 0, y = -a)$ et porte un courant I_0 selon l'axe Oz, comme indiqué dans la Fig.2(b). Déterminez les composantes du champ B_x et B_y produites par le courant I_0 à la position du fil portant le courant I, $(x = a, y = 0)$. (Rappelons que $\vec{u}_\phi = -\sin\phi\,\vec{u}_x + \cos\phi\,\vec{u}_y$).

   (d) Déterminez la valeur de I_0 qui reproduirait la même force de Laplace sur le premier fil que celle indiquée à la question (a). Indiquez clairement le signe de I_0 ainsi que sa valeur numérique pour $a = 1$ cm.

3. (5 pts) **Calculs magnéto-statique :**
   (a) On considère un potentiel vecteur : $\vec{A}(\rho, \phi, z) = \frac{C\rho^2}{4}\vec{u}_z$ dans une région cylindrique de $\rho \leq a$ avec C une constante. Trouvez le champ magnétique, $\vec{B}(\rho, \phi, z) = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{A}$, associé à $\vec{A}$ (*Indice :* utiliser l'éq.(1) en bas de la page).
   (b) Déduire la dimension de C.
   (c) Utilisez le théorème d'Ampère local pour déduire la densité volumique de courant, $\vec{j}$, dans la région $\rho \leq a$.
   (d) Trouvez le courant I traversant une surface $\vec{S} = \vec{u}_z\mathcal{S}$, définie par $z =$ constant et $\rho \leq a$.

4. (6 pts) On considère un solénoïde de longueur $\ell = 314,16$ cm, constitué de $N = 1000$ spires et de section carrée de côté $a = 10$ cm (voir Fig.3). L'axe du solénoïde est orienté selon $\vec{u}_z$. Donnez les formules et effectuez les applications numériques pour les questions (a) à (c). On adopte partout l'approximation du solénoïde infini, $\ell \gg a$.
   (a) Calculez l'expression ainsi que la valeur numérique du champ $\vec{B}_{\text{int}}$ à l'intérieur du solénoïde lorsqu'un courant $I = 10$A y circule. (Indice : appliquez la formule appropriée ou utilisez le théorème d'Ampère en supposant que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul).
   (b) Calculez l'inductance propre, L, du solénoïde (expression et A.N.).
   (c) Donnez l'expression de l'énergie magnétique $\mathcal{E}_m$ stockée dans la bobine et calculez sa valeur numérique pour $I = 10$A (méthode au choix).
   (d) Dans la Fig.4, la bobine décrite dans l'énoncé est placée dans un circuit fermé de résistance R et immergée dans un champ externe uniforme et variable dans le temps, $\vec{B}_{\text{ext}}(t) = B_0 \cos(\omega t)\left[\cos\theta\,\vec{u}_z + \sin\theta\,\vec{u}_x\right]$. Calculez le flux de ce champ externe $\Phi_{\text{ext}}(t)$ à travers la bobine (expression uniquement).
   (e) Déduisez la force électromotrice $e_{\text{ext}}(t)$ induite dans la bobine par le champ extérieur $\vec{B}_{\text{ext}}(t)$. (expression)
   (f) Écrivez l'équation différentielle pour le courant $i(t)$ dans ce circuit, en fonction de la force électromotrice $e_{\text{ext}}(t)$ (due à $\vec{B}_{\text{ext}}(t)$), de L et de R.
   (g) **Bonus (A faire seulement si vous avez terminé tout le reste de l'examen) :** Résoudre l'équation différentielle trouvée en (4f) pour $i(t)$.

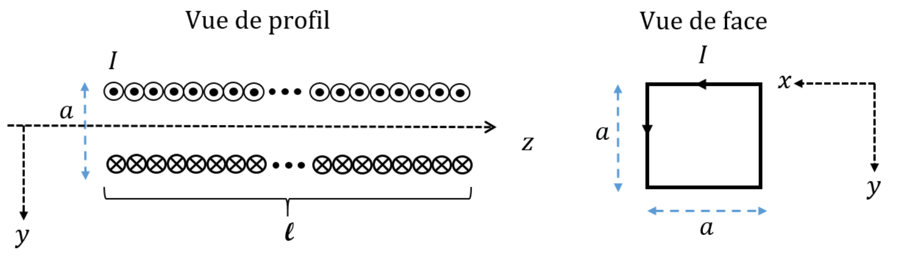

FIGURE 3 – Bobine de section carrée de longueur ℓ, avec un axe orienté selon $\vec{u}_z$.

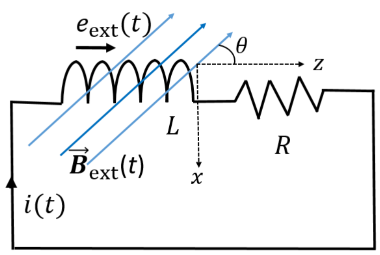

FIGURE 4 – Bobine de Fig.(3) dans un circuit de résistance R, immergée dans un champ $\vec{B}_{\text{ext}}(t)$.

$$\mu_0 = 4\pi\,10^{-7}\ \text{H.m}^{-1} \quad , \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \times 10^9\ \text{F.m}^{-1}$$

$$\text{Cylindrique : } \overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{F}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho}\vec{u}_\rho\left[\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial z}\right] + \vec{u}_\phi\left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right] + \frac{1}{\rho}\vec{u}_z\left[\frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right] \quad (1)$$