Examen Électromagnétisme - PEIP 2
17 janv 2024 9h00 heures
5 exercices / Durée de l'épreuve 2h.
Formulaire A4 manuscrit autorisé / Calculettes standards autorisées

$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{H.m}^{-1} \quad , \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9.10^9\ \mathrm{F.m}^{-1}, \vec{\boldsymbol{F}}(\rho,\phi,z)$$

$$\text{En cylindrique : } \overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{\boldsymbol{F}}(\rho,\phi,z) = \frac{1}{\rho}\vec{\boldsymbol{u}}_\rho\left[\frac{\partial F_z}{\partial\phi} - \frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial z}\right] + \vec{\boldsymbol{u}}_\phi\left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right] + \frac{1}{\rho}\vec{\boldsymbol{u}}_z\left[\frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial\rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial\phi}\right] \quad (1)$$

1. **Électrostatique :**

Le diagramme ci-dessous montre trois charges fixées dans les positions $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_1 = (0,0)$m, $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_2 = (15,0)$m, $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_3 = (-5, 5\sqrt{3})$m, (on ignore la coordonnées z puisque on est dans un plan $z =$cte).

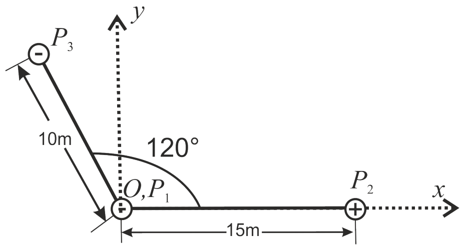

FIGURE 1 – Trois charges $q_1 = -1\times10^{-3}$ C, $q_2 = +3\times10^{-3}$ C et $q_3 = -2\times10^{-3}$C.

Répondre aux questions suivantes avec formules, application numérique, et unités.

(a) Calculer le potentiel électrique, $V_{23}(P_1)$ produit par les charges q_2 et q_3 à la position, P_1(c.-à-d. l'origine) de la charge q_1 (On prend $V(\infty) = 0$).

Solution :

$$V_{23}(P_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q_2}{P_2P_1} + \frac{q_3}{P_3P_1}\right\} = 9\times10^9\left\{\frac{3}{15} - \frac{2}{10}\right\}10^{-3} = 0\ \mathrm{V}\ .$$

(b) Calculer le moment dipolaire, $\vec{\boldsymbol{p}}$ du système.

Solution : Puisque nous avons pris l'origine à la position de P_1, $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}_1} = \vec{\boldsymbol{0}}$ et :

$$\vec{\boldsymbol{p}} = q_1\overrightarrow{\boldsymbol{OP}_1} + q_2\overrightarrow{\boldsymbol{OP}_2} + q_3\overrightarrow{\boldsymbol{OP}_3} = \left\{3\times\overrightarrow{\boldsymbol{OP}_2} - 2\times\overrightarrow{\boldsymbol{OP}_3}\right\}\times10^{-3}$$
$$= \left\{3\times(15,0) - 2\times(-5,5\sqrt{3})\right\}\times10^{-3} = (55,-10\sqrt{3})\times10^{-3}\ \mathrm{C.m}\ .$$

(c) Calculer l'énergie électrostatique, $\mathcal{E}_e$, du système de trois charges.

Solution :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2} = \overrightarrow{\boldsymbol{OP}_2} - \overrightarrow{\boldsymbol{OP}_3} = (15,0) - (-5,5\sqrt{3}) = (20,-5\sqrt{3})$$
$$r_{23} = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2}\right| = \sqrt{\overrightarrow{\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2}} = \sqrt{400+75} = \sqrt{475}\,\mathrm{m}$$

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\substack{i\neq j\\ i=1,j=1}}^{3,3}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\substack{\text{pairs}\\ i\neq j}}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}\right\}$$
$$= 9\times10^9\left\{-\frac{3}{15} + \frac{2}{10} - \frac{6}{5\sqrt{19}}\right\}\times10^{-6} \simeq -2.48\times10^3\mathrm{J}\ .$$

2. **Calculs vectoriels :** Répondre aux questions suivantes avec formules, analyse numérique, et unités.

   (a) Calculer le champ électrique, $\vec{E}_{23}(P_1)$ produit par les charges q_2 et q_3 à la position P_1(à l'origine) de la charge q_1 pour la configuration de la question précédente.

   Solution :

$$\vec{E}_{23}(P_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{ q_2 \frac{\overrightarrow{P_2P_1}}{\left|\overrightarrow{P_2P_1}\right|^3} + q_3 \frac{\overrightarrow{P_3P_1}}{\left|\overrightarrow{P_3P_1}\right|^3} \right\} = 9\times 10^9 \left\{ 3\frac{(-15,0)}{15^3} - 2\frac{(5,-5\sqrt{3})}{10^3} \right\} \times 10^{-3}$$

$$= 9\times 10^6 \left\{ 3\frac{(-1,0)}{15^2} - 2\frac{(5,-5\sqrt{3})}{10^3} \right\} = 9\times 10^6 \left\{ \frac{(-1,0)}{75} - \frac{(1,-\sqrt{3})}{100} \right\}$$

$$= \frac{9}{25}\times 10^6 \left\{ \frac{(-1,0)}{3} - \frac{(1,-\sqrt{3})}{4} \right\} = \frac{9}{25\times 12}\times 10^6 \left\{ (-4,0) - (3,-3\sqrt{3}) \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} -21 \\ 9\sqrt{3} \end{pmatrix} \times 10^4\ \mathrm{V.m^{-1}}$$

   (b) Calculer la force électrostatique totale, $\vec{F}_{\to q_1}(P_1)$ sur la charge $q_1 = -1\times 10^{-3}$ située à P_1 (l'origine).

   Solution :

$$\vec{F}_{\to q_1}(P_1) = q_1\vec{E}_{23}(P_1) = -1\times 10^{-3}(-21, 9\sqrt{3})\times 10^4 = (21, -9\sqrt{3})\times 10\,\mathrm{N}$$

   (c) On considère un potentiel vecteur, $\vec{A}(\rho,\phi,z) = C\vec{u}_z\rho^3\sin\phi$. ($C$ est une constante avec des unités appropriées.) Trouver le champ $\vec{B}(\rho,\phi,z) = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{A}$. (Pas d'A.N.)

   Solution :

$$\vec{B}(\rho,\phi,z) = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{A}(\rho,\phi,z) = \frac{1}{\rho}\vec{u}_\rho\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \vec{u}_\phi\frac{\partial A_z}{\partial\rho} = \vec{u}_\rho C\rho^2\cos\phi - \vec{u}_\phi C3\rho^2\sin\phi$$

3. **Force et champ magnétique :** Un fil droit, de longueur $\ell = 5$cm, se situe dans le plan xOy où il est immergé dans un champ magnétique uniforme, $\vec{B} = B_0\vec{u}_x$ avec $B_0 = 0,04$T (illustré dans la figure 2). Un courant de 8A circule dans un fil qui forme un angle de 30° ($\pi/6$) avec la direction du champ magnétique, $\vec{B}$.

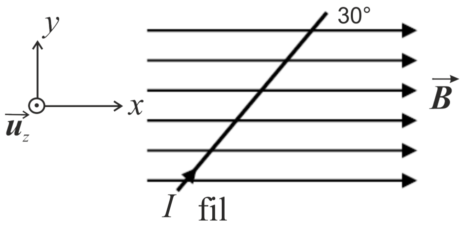

FIGURE 2 – Fil droit, de courant I à un angle de $\theta = \pi/6 = 30°$ d'un champ magnétique.

   (a) Exprimer la force par unité de longueur exercée sur le fil (formule, direction, unités, et A.N.).

   Solution : Ici, il s'agit de la force de Laplace. Puisque le champ $\vec{B}$ et $d\vec{\ell}$ sont constant, l'intégral de la force de Laplace est trvial :

$$\vec{dF}_L = Id\vec{\ell}\wedge\vec{B} \Longrightarrow \frac{\vec{dF}_L}{d\ell} = I\left|\vec{B}\right|\sin\theta\vec{u}_z = -8\times 0,04\times\frac{1}{2}\vec{u}_z = -0,16\vec{u}_z\mathrm{N.m^{-1}}$$

   (Ce n'est pas demandé mais) la force de Laplace totale sur le fil est :

$$\vec{F}_L = \int\frac{\vec{dF}_L}{d\ell}d\ell = \frac{\vec{dF}_L}{d\ell}\ell$$
$$= 0,05\times -0,16\vec{u}_z = -0,008\mathrm{N}$$

   (b) Dessiner un croquis du fil dans le champ magnétique et montrer la direction de la force.

(c) Décrivez l'orientation du fil qui maximisera cette force.

Solution : Comme la force est un produit vecteur entre l'orientation du fil et le champ magnétique, la force est maximale quand le fil est perpendiculaire au champ magnétique, c'est-à-dire quand $\theta = \pm\pi/2$ (dans deux directions opposées).

(d) (Question à part) Un long fil droit, de résistance $R = 2\,\Omega$ est connecté à une batterie de 20 V ayant une résistance interne négligeable. Faire un schéma et dessiner les lignes de champ, $\vec{\boldsymbol{B}}$. Calculez le champ magnétique $\vec{\boldsymbol{B}}(d)$ en un point situé à $d = 20$ mm perpendiculairement au fil et faire l'A.N. pour $\left|\vec{\boldsymbol{B}}(d = 20\text{mm})\right|$.

Solution : Par symétrie, on sait que $\vec{\boldsymbol{B}} = B_\phi(\rho)\vec{\boldsymbol{u}}_\phi$ On sait avec le théorème d'Ampère que

$$\oint_{\rho=\text{cte}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = 2\pi\rho B_\phi(\rho) = \mu_0 I \longrightarrow B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

et l'application numérique

$$B_\phi(d) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{2\pi \times 20 \times 10^{-3}} = 10^{-4}\text{T} = 1\text{G}$$

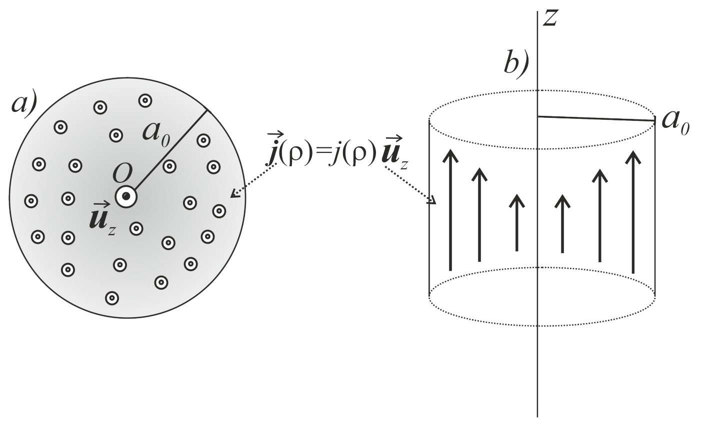

FIGURE 3 – Densité de courant dans un région $\rho \leq a_0$. Deux perspectives : a) en face de l'axe Oz et b) vu latéral.

4. **Magnétostatique : Loi d'Ampère :** Un volume de l'espace, $\rho \leq a_0$ (schéma en fig.(3)) en coordonnées cylindriques, est parcouru par une densité de courant, $\vec{\boldsymbol{j}}(\rho, \phi, z) = j(\rho)\vec{\boldsymbol{u}}_z$ (en coordonnées cylindriques). Le champ magnétique produit par cette densité de courant est $\vec{\boldsymbol{B}}(\rho, \phi, z) = C\rho^2\vec{\boldsymbol{u}}_\phi$. (Pour les questions, donner formules et unités uniquement : pas d'A.N.)

(a) Quelles sont les dimensions de C en S.I. ?

Solution : Puisque les unités de $\vec{\boldsymbol{B}}$ est le Tesla, on a

$$[C\rho^2] = T \Longrightarrow [C] = \text{T.m}^{-2}$$

(b) Trouver le courant $I(\rho)$ enlacé par un cercle de rayon $\rho \leq a_0$ centré sur l'axe Oz.

Solution : On fait appel au théorème d'Ampère qui relie la circulation de $\vec{\boldsymbol{B}}$ au courant enlacé :

$$\oint_{\rho=\text{cst}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I(\rho) \ ,$$

et comme $\vec{\boldsymbol{B}}(\rho) = C\rho^2\vec{\boldsymbol{u}}_\phi$ et $d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \rho d\phi\vec{\boldsymbol{u}}_\phi$ on a :

$$\mu_0 I(\rho) = \oint_{\rho=\text{cst}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \int_0^{2\pi} C\rho^2\vec{\boldsymbol{u}}_\phi \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_\phi \rho d\phi = C\rho^3 \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi C\rho^3$$
$$\Longrightarrow I(\rho) = \frac{2\pi C\rho^3}{\mu_0} \ . \qquad (2)$$

(c) Trouver la fonction $j(\rho)$ dans $\vec{j}(\rho) = j(\rho)\vec{u}_z$ (Spécifier les unités).

Solution : Utilisant la loi d'Ampère, $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, $\vec{B} = B_\phi(\rho)\vec{u}_\phi$ et l'équation (1) :

$$\mu_0 \vec{j} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(C\rho^2\vec{u}_\phi\right) = \frac{1}{\rho}\vec{u}_z\frac{\partial(\rho B_\phi)}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho}\vec{u}_z\frac{\partial(C\rho^3)}{\partial\rho} = \vec{u}_z 3C\rho$$
$$\Longrightarrow \vec{j}(\rho) = \vec{u}_z\frac{3C}{\mu_0}\rho \Longrightarrow j(\rho) = \frac{3C}{\mu_0}\rho\ . \tag{3}$$

On peut obtenir ce résultat sans passer par $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{B}$ si on remarque que dans ce cas la définition de courant électrique, I, comme le flux de $\vec{j}$ à travers une surface que :

$$I(\rho) = \iint_{\rho'<\rho} \vec{j}\cdot\vec{u}_z\rho' d\rho' d\phi = 2\pi\int_0^\rho j(\rho')\rho' d\rho'$$
$$\Longrightarrow j(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho}\frac{dI}{d\rho} = \frac{1}{2\pi\rho}\frac{d}{d\rho}\frac{2\pi C\rho^3}{\mu_0} = \frac{3C}{\mu_0}\rho\ ,$$

où nous avons utilisé l'éq.(2) ce qui est, bien entendu, le même résultat que trouvé dans l'éq.(3).

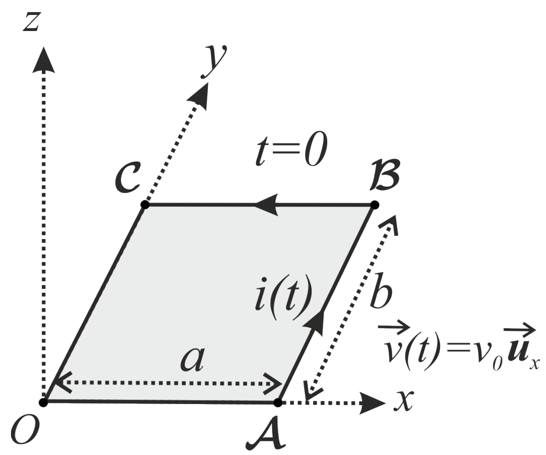

Figure 4 – Un circuit rectangulaire de dimensions a selon x et b selon y se déplace à vitesse constante, v_0, dans un champ magnétique statique mais non uniforme. Un courant, $i(t)$, est induit dans le cadre par induction magnétique.

5. **Flux magnétique et induction**

Considérons un circuit électrique filiforme rectangulaire et rigide (de côtés a selon l'axe x et b selon l'axe y comme illustré dans la figure 4 à l'instant $t = 0$). Ce circuit fermé est immergé dans un champ magnétique ***inhomogène***, $\vec{B}(x) = B_0\frac{x}{b}\vec{u}_z$.

A l'instant $t = 0$, le bord gauche du circuit se trouve sur l'axe Oy. On déplace ce circuit à une vitesse constante, v_0, le long de l'axe (Ox) de sorte que la position du bord gauche du circuit $(\mathcal{OC})$ sur l'abscisse, $x(t)$, soit définie par l'équation : $x(t) = v_0 t$.

Spécifier les unités dans vos réponses ci-dessous (donner les formules en fonction de B_0, a, b, v_0, et R) avec A.N. (B_0=3T, $a = 0,4$m, b=1m, $v_0 = 2$m.s^{-1}, et $R = 2\Omega$) :

(a) Calculer le flux magnétique, $\Phi(t)$, traversant le circuit en fonction du temps.

Solution :

$$\Phi(t) = \int_{v_0 t}^{v_0 t+a} dx \int_0^b dy B_0\frac{x}{b}\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z = b\int_{v_0 t}^{v_0 t+a} dx B_0\frac{x}{b} = B_0\int_{v_0 t}^{v_0 t+a} x dx = B_0\left[x^2\right]_{v_0 t}^{v_0 t+a}$$
$$= B_0\frac{(v_0 t+a)^2 - v_0^2 t^2}{2} = B_0\frac{2v_0 t a + a^2}{2} = 3\times(0,8t + 0,08)\ (\mathrm{T.m}^2)$$
$$= 2,4t + 0,24(\mathrm{T.m}^2)\ .$$

(b) Donner l'expression de la force électromotrice, $e(t)$, induite dans le circuit.

Solution :

$$e(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(t) = -\frac{d}{dt}B_0\frac{2v_0 t a + a^2}{2} = -B_0 v_0 a = -2,4\ (\mathrm{V})\ .$$

(c) Donner l'expression pour le courant induit, $i(t)$, et spécifier son sens. (la résistance du circuit est R).
Solution :

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = -\frac{B_0 v_0 a}{R} = -1,2 \text{ (A)} .$$

Le signe négatif ici indique que le courant, $i(t)$ circule dans le sens oposé au sens indiqué comme positif dans la figure.

(d) Donner la force de Laplace, $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_L(t)$, sur l'ensemble du circuit en fonction du temps.
Solution : Le travail fait par la force de Laplace lors d'un déplacement $dx = v_0 dt$:

$$dW_L = \overrightarrow{\boldsymbol{F}}_L \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{x}} = F_{L,x} dx = F_{L,x} v_0 dt . \tag{4}$$

Le théorème de Maxwell dit que lors d'un déplacement, dx :

$$dW_L = i(t) d\Phi = i(t) \frac{d\Phi}{dt} dt . \tag{5}$$

En identifiant les expressions, de l'éq.(4) et l'éq.(5), on peut déterminer $F_{L,x}$:

$$dW_L = F_{L,x} v_0 dt = i(t) \frac{d\Phi}{dt} dt \Longrightarrow F_{L,x} = \frac{i(t)}{v_0} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B_0^2 a^2 v_0}{R} = -1,44 \text{ (N)} . \tag{6}$$

Comme on connaît $i(t)$, et la direction du champ magnétique sur l'ensemble du circuit , on peut tout aussi vous pouvez toujours faire le calcul de la force de Laplace dans le sens classique. À un instant t, la force de Laplace sur le côté $(\mathcal{AB})$ est :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{L,\mathcal{AB}}(t) = i(t) \left(\overrightarrow{\boldsymbol{\ell}}_{\mathcal{AB}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{B}}(v_0 t + a) \right) = i(t) b \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_z B_0 \frac{v_0 t + a}{b} = -\frac{B_0^2 v_0 a}{R} (v_0 t + a) \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x$$

alors que sur le côté $(\mathcal{CO})$ elle est :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{L,\mathcal{CO}}(t) = i(t) \left(\overrightarrow{\boldsymbol{\ell}}_{\mathcal{CO}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{B}}(v_0 t) \right) = -i(t) b \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_z B_0 \frac{v_0 t}{b} = \frac{B_0^2 v_0 a}{R} v_0 t \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x$$

La force de Laplace totale sur le circuit est donc :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_L(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{L,\mathcal{AB}}(t) + \overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{L,\mathcal{CO}}(t) = -\frac{B_0^2 a^2 v_0}{R} \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x \text{ (N)} ,$$

ce qui est bien entendu le même que résultat que nous avons trouvé avec l'éq.(6). Il y a aussi des forces de Laplace sur les cotés, $\mathcal{OA}$ et $\mathcal{BC}$ mais ce n'est pas nécessaire de les calculer car elles sont égales et opposées.