Examen d'Electromagnétisme - Rattrapage -L2 Université Aix–Marseille 1
le 20 juillet 2011

(Formule utile : Divergence en coordonnées sphériques :
$\text{div}\,\overrightarrow{\mathbf{A}} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta A_r\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta A_\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(rA_\phi\right)\right]$)

1. (4pts) Deux charges identiques, Q, sont placées sur l'axe x aux points $x=0$, et $x=d$.

   (a) Ecrire le champ électrique, $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ sur l'axe x.

$$\overrightarrow{\mathbf{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|^3}\widehat{\mathbf{x}} + \frac{x-d}{|x-d|^3}\widehat{\mathbf{x}}\right)$$

   (b) Ecrire le potentiel électrique, V sur l'axe x.

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x-d|}\right)$$

2. (4pts) On considère une ligne de charge infinie sur l'axe z de densité linéique λ.

   (a) Ecrire le champ électrique, $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ en coordonnées cylindriques.
   Par symétrie cylindrique et l'invariance en z, on a

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(\rho,\theta,\phi) = E_\rho(\rho)\,\widehat{\rho}$$

$$2\pi\rho L E_\rho(\rho) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow E_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{E}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\widehat{\rho}$$

   (b) Ecrire le champ électrique, $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ en coordonnées cartésiennes.

$$\widehat{\rho} = \widehat{\mathbf{x}}\cos\phi + \widehat{\mathbf{y}}\sin\phi \qquad \cos\phi = \frac{x}{\rho} \qquad \sin\phi = \frac{y}{\rho}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{E}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{x\widehat{\mathbf{x}} + y\widehat{\mathbf{y}}}{x^2+y^2}$$

   (c) Donner la différence de potentielle entre le point $(x=a, y=0, z=0)$ et le point $(x=0, y=b, z=0)$.

$$V(\rho) - V(a) = \int_a^\rho \overrightarrow{\mathbf{E}}\cdot d\rho = \int_a^\rho \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}d\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\ln(\rho) - \ln(a)\right]$$
$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

$$V(b) - V(a) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

3. (4pts) Une région décrite par $r < 2\text{m}$ en coordonées sphériques a un champ électrique qui s'exprime $\overrightarrow{\mathbf{E}}(r,\theta,\phi) = (5r\times 10^{-5}/\epsilon_0)\,\widehat{\mathbf{r}}$.

(a) Ecrire la charge totale de la région $r < 2$m.

Le théorème de Gauss donne :

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \iint_S \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{S}} = \iint_S \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot dS\widehat{\mathbf{r}} = \iint_S 5r \times 10^{-5}/\epsilon_0 dS$$
$$= \iint_{S,r=2} \frac{5r \times 10^{-5}}{\epsilon_0} dS = \frac{5r \times 10^{-5}}{\epsilon_0} 4\pi r^2 = \frac{10^{-4}}{\epsilon_0} 16\pi$$
$$Q = 5,03 \times 10^{-3}\mathrm{C}$$

(b) Ecrire la densité de charge, ρ, dans la région $r < 2$m.

$$\mathrm{div}\, \overrightarrow{\mathbf{E}} = \frac{5 \times 10^{-5}}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^3/\epsilon_0 \right) \right] = \frac{15 \times 10^{-5}}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\Rightarrow \rho = 15 \times 10^{-5}\mathrm{Cm}^{-3}$$

(c) Si la densité volumique de charge est $\rho = 0$ pour $r > 2$m. Ecrire le champ électrique, $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ pour $r > 2$m.

4. (4 pts) Deux Bobines de Helmhotz de même axe, de rayon $R = 3$m et portant chacune $I = 20$A sont contenues dans deux plans parallèles séparées par $d =$10m.

(a) Quel est le champ $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ au centre de leur axe ?

Le champ magnétique sur l'axe d'un spire est (l'axe z) :

$$\overrightarrow{\mathbf{B}}(z) = \widehat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta$$

Il y a deux spires à distance égale du centre donc

$$\overrightarrow{\mathbf{B}}(z) = 2 \left[\widehat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta \right] = \overrightarrow{\mathbf{B}}(z) = \frac{\mu_0 I}{R} \sin^3 \theta \widehat{\mathbf{z}}$$

$$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{3}{\sqrt{9 + 25}} = \frac{3}{\sqrt{34}} \qquad \mu_0 = \frac{4\pi}{10^7}$$

$$A.N. \qquad \overrightarrow{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{10^7} \frac{20}{3} \frac{3^3}{34\sqrt{34}} \widehat{\mathbf{z}} = 1,14 \times 10^{-6}\mathrm{T\,(esla)} = 1,14 \times 10^{-2}\mathrm{G\,(auss)}$$

(b) Quel est le champ $\overrightarrow{\mathbf{H}}$ au centre de leur axe ?

$$\overrightarrow{\mathbf{H}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{B}}}{\mu_0} = \frac{20}{3} \frac{3^3}{34\sqrt{34}} \widehat{\mathbf{z}} = 0,908\mathrm{Am}^{-1}\widehat{\mathbf{z}}$$

5. (4 pts) Dans une région $0 < \rho < 0,5$m en coordonnées cylindriques, la densité de courant est

$$\overrightarrow{\mathbf{j}}(\rho, \phi, z) = \overrightarrow{\mathbf{j}}(\rho) = 4,5 \times e^{-2\rho} \widehat{\mathbf{z}} \ \left(\mathrm{Am}^{-2}\right)$$

et $\overrightarrow{\mathbf{j}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ ailleurs.

(a) Utiliser la loi d'Ampère afin de trouver le champ $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ dans tout l'espace.

$$\int \overrightarrow{\mathbf{B}} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{l}} = 2\pi\rho B_\phi(\rho) = \mu_0 I_{\text{enl}}$$

$$\begin{aligned}
I_{\text{enl}}(\rho) &= \int_S \overrightarrow{\mathbf{j}} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{S}} = \int_0^\rho 2\pi\rho \left(\overrightarrow{\mathbf{j}}(\rho) \cdot \widehat{\mathbf{z}}\right) d\rho \\
&= 4,5 \times 2\pi \int_0^\rho \rho e^{-2\rho} d\rho \\
&= 4,5 \times 2\pi \int_0^\rho \rho e^{-2\rho} d\rho
\end{aligned}$$

Intégration par parties

$$\begin{aligned}
u &= \rho \qquad dv = e^{-2\rho} d\rho \\
du &= d\rho \qquad v = -\frac{e^{-2\rho}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\rho \rho e^{-2\rho} d\rho &= -\left[\frac{\rho e^{-2\rho}}{2}\right]_0^\rho + \int_0^\rho \frac{e^{-2\rho}}{2} d\rho = -\frac{\rho e^{-2\rho}}{2} - \left[\frac{e^{-2\rho}}{4}\right]_0^\rho \\
&= -\frac{\rho e^{-2\rho}}{2} - \frac{e^{-2\rho}}{4} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Pour $\rho < 0,5\text{m}$ le courant enlacé est

$$I_{\text{enl}}(\rho) = \frac{4,5}{2} \times \pi \left(1 - (2\rho + 1) e^{-2\rho}\right)$$

Le théorème d'Ampère donne donc

$$\begin{aligned}
2\pi\rho B_\phi(\rho) &= \mu_0 I_{\text{enl}}(\rho) = 4,5 \times \mu_0 \pi \frac{1}{2} \left(1 - (2\rho + 1) e^{-2\rho}\right) \\
B_\phi(\rho < 0,5\text{m}) &= \frac{4,5}{4} \times \frac{\mu_0}{\rho} \left(1 - (2\rho + 1) e^{-2\rho}\right)
\end{aligned}$$

Tout le courant est contenue dans la région $\rho < 0,5\text{m}$, donc

$$I_{\text{tot}} = I_{\text{enl}}(0,5) = 4,5 \times \pi \left(\frac{1}{2} - e^{-1}\right)$$

Donc pour $\rho > 0,5\text{m}$

$$B_\phi(\rho > 0,5\text{m}) = \frac{4,5}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{e}\right] \mu_0 \frac{1}{\rho} \text{ (Tesla)}$$

(b) Trouver le champ $\overrightarrow{\mathbf{H}}$ dans tout l'espace.

$$2\pi\rho H_\phi(\rho) = I_{\text{enl}}$$

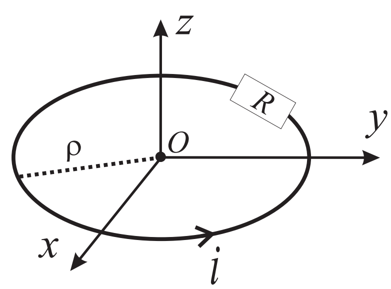
$$\overrightarrow{\mathbf{H}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{B}}}{\mu_0} = \begin{cases} \frac{4,5}{4} \times \frac{1}{\rho} \left(1 - (2\rho + 1) e^{-2\rho}\right) & \rho < 0,5\text{m} \\ \frac{4,5}{2} \times \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{e}\right] \frac{1}{\rho} = & \rho > 0,5\text{m} \end{cases} \text{ (Am}^{-1}\text{)}$$

6. (2 pts) On considère un potentiel vecteur $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ qui s'exprime $\overrightarrow{\mathbf{A}} = \widehat{\mathbf{y}}\,(\sin ax) + \widehat{\mathbf{z}}\,(y^3 + 2e^x)$.

   (a) Trouver le champ $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ dans tout l'espace.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{B}} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{\mathbf{A}} &= \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{x}} & \widehat{\mathbf{y}} & \widehat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \sin ax & y^3 + 2e^x \end{vmatrix} \\
&= \widehat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial\,(y^3 + 2e^x)}{\partial y}\right) - \widehat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial\,(y^3 + 2e^x)}{\partial x}\right) + \widehat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\sin ax\right) \\
&= \widehat{\mathbf{x}}3y^2 - 2e^x\widehat{\mathbf{y}} + \widehat{\mathbf{z}}a\cos ax
\end{aligned}$$

7. (4 pts) Considérer une spire circulaire et conductrice (de résistance R et de rayon ρ) placée dans le plan xOy $(z = 0)$ (voir figure). Le champ $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ varie avec le temps et s'exprime : $\overrightarrow{\mathbf{B}} = \widehat{\mathbf{z}}B_0 \cos \omega t$.



   (a) Calculer le flux du champ magnétique, $\Phi\,(t)$, à travers la spire.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{d\mathbf{S}} &= \widehat{\mathbf{z}}\rho d\phi d\rho \\
\Phi\,(t) &= \iint \overrightarrow{\mathbf{B}} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{S}} = B_0 \cos \omega t \iint dS = \pi\rho^2 B_0 \cos \omega t
\end{aligned}$$

   (b) Calculer la force électromotrice, $e\,(t)$, dans la spire.

$$e\,(t) = -\frac{d\Phi\,(t)}{dt} = \pi\rho^2 B_0 \omega \sin \omega t$$

   (c) Déterminer le courant induit, $i\,(t)$, dans la spire.

$$i\,(t) = \frac{e\,(t)}{R} = \frac{\pi\rho^2 B_0 \omega}{R}\sin \omega t$$

   (d) A.N. Exprimer $i\,(t)$ avec $\rho = 0,2\text{m}$. $R = 3.14\Omega$, $B_0 = 1\text{T}$, $\omega = 10^3\text{s}^{-1}$.

$$\begin{aligned}
i\,(t) &= \frac{\pi\rho^2 B_0 \omega}{R}\sin \omega t = \frac{\pi 4 \times 10^3}{\pi 10^2}\sin 10^3 t \\
&= \left[40 \sin 10^3 t\right] \text{A}
\end{aligned}$$