POLYTECH MARSEILLE Aix-Marseille Université

PEIP 2 / 16 janvier 2015

Partiel d'Electromagnétisme : 16 janvier 2015 4 problèmes - recto verso
Formulaire A4 recto/verso autorisé / Calculettes standards autorisées
Durée de l'épreuve 2 heures

1. (5pts) On considère une distribution des charges ayant une symétrie sphérique autour d'un point fixe O. Le potentiel électrique est donné en fonction de la distance r de O par :

$$V(r) = \begin{cases} \frac{C}{a\epsilon_0}\left(1 - \ln\frac{r}{a}\right) & r < a \\ \frac{C}{r\epsilon_0} & r \geq a \end{cases}$$

où C et a sont des constantes positives (de dimension Coulomb et mètre respectivement).

(a) Trouver le champ électrique, $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\mathbf{r}})$, correspondant à ce potentiel électrique.

$$E_r = -\frac{d}{dr}V(r) = \begin{cases} -\frac{C}{a\epsilon_0}\frac{d}{dr}\left(1 - \ln\frac{r}{a}\right) = \frac{C}{a\epsilon_0}\frac{1}{r} & r < a \\ -\frac{d}{dr}\frac{C}{r\epsilon_0} = \frac{C}{r^2\epsilon_0} & r \geq a \end{cases}$$

(b) Calculer la divergence du champ électrique div $\vec{\boldsymbol{E}}$ sachant que la divergence en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 E_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta E_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi}\ .$$

La divergence du champ électrique est :

$$\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{E}} = \begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{C}{a\epsilon_0}\frac{dr}{dr} = \frac{1}{r^2}\frac{C}{a\epsilon_0} & r < a \\ 0 & r \geq a \end{cases}$$

(c) Donner la relation reliant la charge volumique et le champ électrique.

$$\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

(d) En déduire la charge volumique, $\rho(r)$, partout dans ce système.

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{C}{ar^2} & r < a \\ 0 & r \geq a \end{cases}$$

(e) Trouver la charge totale du système.
Il y a deux manières : Le plus simple est d'utiliser le théorème de Gauss dans la région $r > a$.

$$4\pi r^2 E_r = 4\pi\frac{C}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\mathrm{tot}}}{\epsilon_0}$$

donc

$$Q_{\mathrm{tot}} = 4\pi C$$

On peut également calculer l'intégrale volumique de la densité ρ trouvée en (c)

$$Q_{\text{tot}} = 4\pi \int_0^a r^2 dr \rho(r) = 4\pi \frac{C}{a} \int_0^a dr = 4\pi C$$

(f) Trouver l'énergie électrostatique, W_e, du système.

Il y a deux manières de trouver W_e :

$$\begin{aligned}
W_e &= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint \left\| \overrightarrow{\mathbf{E}} \right\|^2 d\mathcal{V} = \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \frac{C^2}{a^2 \epsilon_0^2} \int_0^a dr \frac{1}{r^2} r^2 + \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \frac{C^2}{\epsilon_0^2} \int_a^\infty dr \frac{1}{r^4} r^2 \\
&= \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \frac{C^2}{a^2 \epsilon_0^2} \int_0^a dr + \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \frac{C^2}{\epsilon_0^2} \int_a^\infty dr \frac{1}{r^2} \\
&= \frac{4\pi C^2}{a\epsilon_0}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
W_e &= \frac{1}{2} \iiint \rho V d\mathcal{V} = \frac{4\pi}{2} \int_0^a \frac{C}{ar^2} \frac{C}{a\epsilon_0} \left(1 - \ln \frac{r}{a}\right) r^2 dr \\
&= \frac{4\pi C^2}{2a\epsilon_0} \int_0^a \frac{dr}{a} \left(1 - \ln \frac{r}{a}\right) = \frac{4\pi C^2}{2a\epsilon_0} \int_0^1 dx \left(1 - \ln x\right)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le changement de variable $x = r/a$. Avec intégration par parties

$$\begin{aligned}
u &= (1 - \ln x) \qquad dv = dx \\
du &= -\frac{dx}{x} \qquad v = x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int u dv &= \int dx \left(1 - \ln x\right) = uv - \int v du = x\left(1 - \ln x\right) + \int dx \\
&= x\left(2 - \ln x\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 dx \left(1 - \ln x\right) = \left[x\left(2 - \ln x\right)\right]_0^1 = 2$$

et de nouveau

$$W_e = \frac{4\pi C^2}{a\epsilon_0}$$

2. (5pts) On considère une sphère isolante placée à l'origine du repère, de rayon $2a$, et portant une densité uniforme de charge volumique, ρ_0, (figure (a)).

   (a) Trouver le champ électrique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$ à l'intérieur de la sphère ($r < 2a$).

$$\begin{aligned}
4\pi r^2 E_r &= \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0 \\
E_r &= \frac{\rho_0}{3} r \\
\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(r) &= \frac{\rho_0}{3} \overrightarrow{\mathbf{r}} = \frac{\rho_0}{3} \overrightarrow{\mathbf{OM}}
\end{aligned}$$

(b) Trouver le champ électrique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$ à l'extérieur de la sphère ($r > 2a$).

$$E_r = \frac{a^3\rho_0}{3OM^3}\overrightarrow{\mathbf{OM}}$$

On enlève une cavité sphérique de la sphère de rayon a, comme indiquée dans la figure (b).

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(r) = \frac{\rho_0}{3}\overrightarrow{\mathbf{r}}' = \frac{\rho_0}{3}\overrightarrow{\mathbf{aM}}$$

(c) Montrer que le champ électrique à l'intérieur de la cavité est uniforme et donnée par $E_x = E_z = 0$ et $E_y = C$. Trouver la valeur de la constante C.

Ce problème est équivalent à la superposition de deux sphères, l'une de densité volumique ρ_0, de rayon $2a$, et centrée sur l'origine O, et une autre de densité $-\rho_0$ centrée sur le point $a\hat{\mathbf{e}}_y$ et de rayon a. Etre à l'intérieur de la cavité revient à être à l'intérieur de chaque sphère. Le champ à l'intérieur de la cavité est la superposition de ces deux champs.

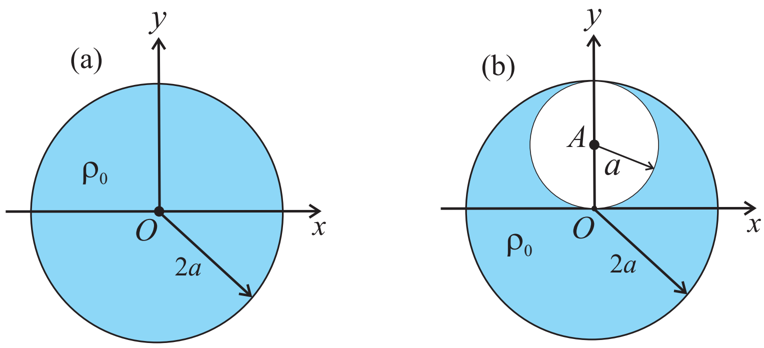
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{E}}_{\text{cavité}} &= \frac{\rho_0}{3}\overrightarrow{\mathbf{OM}} - \frac{\rho_0}{3}\overrightarrow{\mathbf{aM}} = \frac{\rho_0}{3}\left(\overrightarrow{\mathbf{OM}} - \overrightarrow{\mathbf{aM}}\right) = \frac{\rho_0}{3}\left(\overrightarrow{\mathbf{OM}} + \overrightarrow{\mathbf{Ma}}\right)\\ &= \frac{\rho_0}{3}\left(\overrightarrow{\mathbf{Oa}}\right) = \frac{\rho_0 a}{3}\hat{\mathbf{e}}_y\end{aligned}$$

Donc

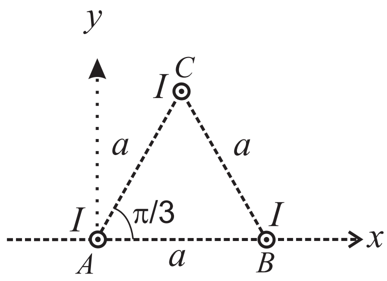
$$E_{x,\text{cavité}} = E_{z,\text{cavité}} = 0$$

et

$$E_{y,\text{cavité}} = \frac{\rho_0 a}{3}$$



3. (5pts) On considère un système de 3 fils infinis et parallèles disposés aux sommets (A,B,C) d'un triangle équilatéral de côté, a. Chaque fil est parcouru par une intensité I.



(a) Calculer le champ magnétique, $\vec{B}(C)$, créé au point C par les fils placés en A et en B. *Exprimer votre réponse en coordonnées cartésiennes et en fonction de : I, μ_0, et a.*
Le champ $\vec{\mathbf{B}}$ créé par les fils A et B au point C sont respectivement :

$$\vec{\mathbf{B}}_A(C) = \hat{\mathbf{e}}_{\phi,A}\frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(-\cos\frac{\pi}{6}\hat{\mathbf{e}}_x + \sin\frac{\pi}{6}\hat{\mathbf{e}}_y\right)$$
$$\vec{\mathbf{B}}_B(C) = \hat{\mathbf{e}}_{\phi,B}\frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(-\cos\frac{\pi}{6}\hat{\mathbf{e}}_x - \sin\frac{\pi}{6}\hat{\mathbf{e}}_y\right)$$

et le champ total est :

$$\vec{\mathbf{B}}(C) = \vec{\mathbf{B}}_A(C) + \vec{\mathbf{B}}_B(C) = -2\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\cos\frac{\pi}{6}\hat{\mathbf{e}}_x = -\frac{\mu_0 I}{\pi a}\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{e}}_x \mathrm{T}$$

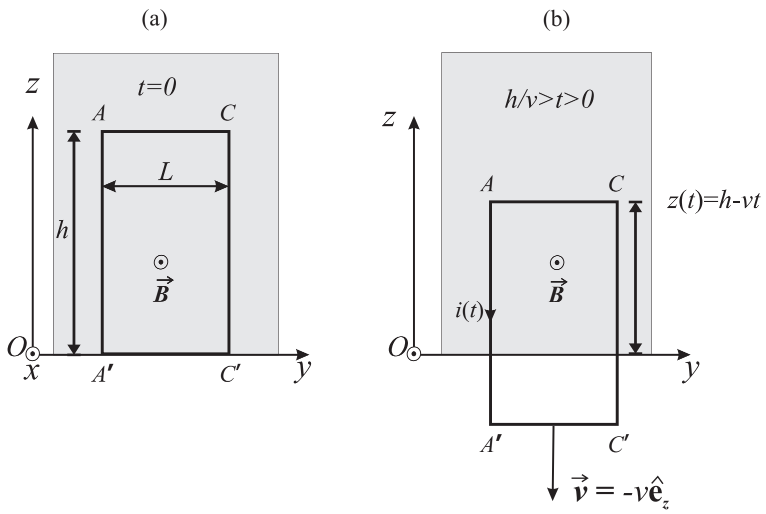
(b) Trouver la force par unité de longueur (coordonnées cartésiennes) sur le fil au point C (Expression analytique puis A.N. : $a = \left(\sqrt{3}/2\right)$cm, et $I = 5$A).

$$\frac{d\vec{\mathbf{F}}_{A\to C}}{dl} = I\hat{\mathbf{e}}_z \wedge \vec{\mathbf{B}}(C) = -\frac{\mu_0 I^2}{\pi a}\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{e}}_z \wedge \hat{\mathbf{e}}_x \overset{A.N.}{=} -\frac{4\pi 10^{-7}25}{\pi\frac{\sqrt{3}}{2}10^{-2}}\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{e}}_y = -10^{-3}\hat{\mathbf{e}}_y \mathrm{Nm}^{-1}$$

(c) Donner les directions et amplitudes des forces par unité de longueur s'exerçant sur les fils placés aux sommets A et B. *Indice : vous pouvez utiliser les symétries du problème et l'amplitude, $||d\vec{F}_{\to C}||/dl$, trouvé en* (b)).
Par les symétries du problème, l'amplitude des forces de Laplace sur chacun des fils est le même. Il n'y a que la direction qui change. Par symétrie de nouveau, la force est toujours dirigé vers le coté opposé du tiangle équilateral. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\mathbf{F}}_{\to A}}{dl} &= ||d\vec{F}_{\to C}||/dl = ||d\vec{F}_{\to C}||/dl\left(\sin\frac{\pi}{6}\hat{\mathbf{e}}_y + \cos\frac{\pi}{6}\hat{\mathbf{e}}_y\right)\\ &= 10^{-3}\left(\frac{1}{2}\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{e}}_y\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\mathbf{F}}_{\to B}}{dl} &= ||d\vec{F}_{\to C}||/dl = ||d\vec{F}_{\to C}||/dl\left(\sin\frac{\pi}{6}\hat{\mathbf{e}}_y - \cos\frac{\pi}{6}\hat{\mathbf{e}}_y\right)\\ &= 10^{-3}\left(\frac{1}{2}\hat{\mathbf{e}}_y - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{e}}_y\right)\end{aligned}$$



4. (6pts) *Cadre dans un champ magnétique* Au temps $t = 0$, un circuit rectangulaire de largeur L, de hauteur h, et de résistance totale R, se trouve dans un plan vertical (zOy voir figure (a)) en présence d'un champ magnétique, $\vec{\boldsymbol{B}}(z) = B_0 \exp\left(-\frac{z}{h}\right)\hat{\mathbf{e}}_x$, si $z > 0$ et $\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\mathbf{0}}$ si $z < 0$.

   (a) Calculer le flux magnétique, Φ_m, à travers le cadre au temps $t = 0$ (figure (a)).

$$\begin{aligned}
\Phi_m\left(t=0\right) &= \iint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{d\mathbf{S}} = B_0 \int_0^h dz \int_0^L dy \, \exp\left(-\frac{z}{h}\right)\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \\
&= LB_0 \int_0^h dz \, \exp\left(-\frac{z}{h}\right) = -LhB_0 \left[\exp\left(-\frac{z}{h}\right)\right]_0^h \\
&= -LhB_0\left(e^{-1} - 1\right) = LhB_0\left(1 - e^{-1}\right)
\end{aligned}$$

Au temps $t = 0$, on mets le cadre en mouvement avec une vitesse uniforme, $\vec{\mathbf{v}} = -v\hat{\mathbf{e}}_z$ parallèle au côté AA'.

   (b) Calculer le flux $\Phi_m(t)$ à travers le cadre, aux temps $h/v > t > 0$ (figure (b)), (c.-à-d. quand au moins une partie du cadre se trouve encore dans la région où $\left\|\vec{\mathbf{B}}\right\| \neq 0$)

$$\begin{aligned}
\Phi_m\left(t\right) &= \iint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{d\mathbf{S}} = LB_0 \int_0^{h-vt} dz \, \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \\
&= LhB_0\left(1 - \exp\left(-\frac{h-vt}{h}\right)\right) = LhB_0\left[1 - \exp\left(-\left(1 - \frac{vt}{h}\right)\right)\right] \\
&= LhB_0\left[1 - e^{-1}\exp\left(\frac{vt}{h}\right)\right]
\end{aligned}$$

   (c) Calculer la force électromotrice, $e(t)$, quand $h/v > t > 0$.

$$\begin{aligned}
e\left(t\right) &= -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}LhB_0\left[1 - e^{-1}\exp\left(\frac{vt}{h}\right)\right] \\
&= LhB_0 e^{-1}\frac{d}{dt}\exp\left(\frac{vt}{h}\right) \\
&= \frac{LvB_0}{e}\exp\left(\frac{vt}{h}\right)
\end{aligned}$$

(d) Trouver le courant induit, $i(t)$ dans le cadre quand $h/v > t > 0$.

$$i\left(t\right) = \frac{e\left(t\right)}{R} = \frac{LvB_0}{eR}\exp\left(\frac{vt}{h}\right)$$

(e) Calculer la force de Laplace, $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_L(t)$, sur le segment AC quand $h/v > t > 0$. Quelle est la force de Laplace *totale* sur le cadre ?

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{F}}_{\to AC} &= \int d\overrightarrow{\mathbf{F}}_{\to AC} = i\left(t\right)\int \overrightarrow{dl}\wedge\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = -i\left(t\right)\int_0^L dl\left(\widehat{\mathbf{e}}_y\wedge\widehat{\mathbf{e}}_x\right)B\left(h-vt\right)\\
&= \widehat{\mathbf{e}}_z i\left(t\right)LB\left(h-vt\right) = i\left(t\right)LB_0\exp\left(-\frac{h-vt}{h}\right)\widehat{\mathbf{e}}_z\\
&= i\left(t\right)LB_0\frac{1}{e}\exp\left(\frac{vt}{h}\right)\widehat{\mathbf{e}}_z = \frac{LB_0}{eR}v\exp\left(\frac{vt}{h}\right)\frac{LB_0}{e}\exp\left(\frac{vt}{h}\right)\widehat{\mathbf{e}}_z\\
&= \frac{v}{R}\left(\frac{LB_0}{e}\right)^2\exp\left(2\frac{vt}{h}\right)\widehat{\mathbf{e}}_z
\end{aligned}$$

(f) Calculer la puissance électrique dissipée par la résistance au temps $h/v > t > 0$, $P_j(t) = e(t)i(t)$. Calculer la puissance mécanique extérieure qu'il faut exercer à cet instant afin de maintenir la vitesse constante, $P_{\mathrm{op}}(t) = -\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_L\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}}$. Que remarquez-vous ?

$$\begin{aligned}
P_J\left(t\right) &= i\left(t\right)e\left(t\right) = \frac{LvB_0}{eR}\exp\left(\frac{vt}{h}\right)\frac{LvB_0}{e}\exp\left(\frac{vt}{h}\right)\\
&= \frac{1}{R}\left(\frac{LvB_0}{e}\right)^2\exp\left(\frac{2vt}{h}\right)
\end{aligned}$$

$$P_{op} = -\overrightarrow{\mathbf{F}}_{\to AC}\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}} = \frac{1}{R}\left(\frac{LvB_0}{e}\right)^2\exp\left(2\frac{vt}{h}\right)$$

Il s'agit de la même valeur. La puissance dissipée par effet Joule est fournie par l'opérateur travaillant contre l'effet joule.