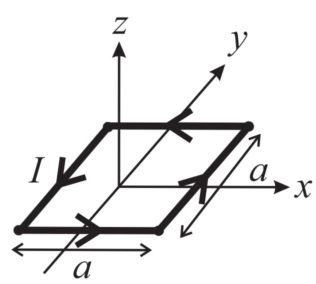
Electromagnétisme PEIP 2 Examen janvier 2021
4 Exercices recto-verso / Durée de l'épreuve 2 heures.
Formulaire A4 manuscrit autorisé
Calculettes collège standards autorisées
3 des 4 exericices recto-verso au choix

1. (8pts) **Electrostatique et Magnétostatique :**

   Au cours d'un orage, un champ électrostaique entre le sol et un cumulonimbus est dirigé selon la verticale ascendante $\vec{u}_z$, de la forme $\vec{E}(z) = \vec{u}_z\,(14 \times 10^{-3} z + 5)(\text{kVm}^{-1})$ où z est mesuré en mètres et notons que le champ électrique est donné en kilovolts par mètre.

   a) Trouver la différence de potentiel, U, entre le sol et la base du nuage à 5 km du sol.
   b) Un éclair entre le bas du nuage et le sol transporte une charge de 5C. Quelle est l'énergie transférée par l'éclair ?



   Considérons un circuit électrique de forme carrée, de côté a, situé dans le plan xOy. Un courant constant I circule dans ce circuit.

   c) Trouver le moment magnétique, $\vec{m}$, du circuit (en fonction de a et I).
   On considère que le circuit ci-dessus est immergé dans un champ, $\vec{B} = B_0\left(\vec{u}_x + \vec{u}_z\right)$ Tesla.
   d) Quelle est l'énergie potentielle «mécanique», U_m, du dipôle magnétique dans ce champ.
   e) Quel est le moment des forces de Laplace, Γ_y, autour de l'axe Oy ?

2. (8pts) On considère un système à symétrie sphérique, avec un potentiel électrique, $V_{r\leq a}(r) = V_1\frac{r^2}{a^2} + V_0$ dans la région $r \leq a$. On suppose qu'il n'y a pas de charge surfacique en $r = a$.

   a) Trouver le champ électrique dans la région $r \leq a$.
   b) Quelle est la charge totale, Q, contenue dans la région $r \leq a$? (fonction de a et V_1)
   c) Déterminer la densité de charge électrique $\rho(r)$ dans la région $r \leq a$.
   (Indice : écrire $V_{r>a}(r)$ en fonction de Q).
   d) Si l'on sait qu'il n'y a pas de charges dans la région $r > a$, donner l'expression du potentiel électrique, $V_{r>a}(r)$, dans la région $r > a$. (Indice : écrire $V_{r>a}(r)$ en fonction de Q).
   e) Utiliser la continuité du potentiel électrique en $r = a$ afin de trouver une relation reliant V_1, et V_0.

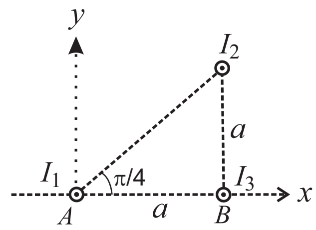
   Opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques :

Formulaire : $$\overrightarrow{\mathbf{grad}} f(r,\theta,\phi) = \vec{u}_r\frac{\partial f}{\partial r} + \vec{u}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{u}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}$$

$$\text{div}\,\vec{A}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left[r^2 A_r\right]}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r}A_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{A}(r,\theta,\phi) = \frac{\vec{u}_r}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(A_\phi\sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right] + \frac{\vec{u}_\theta}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial\left(rA_\phi\right)}{\partial r}\right] + \frac{\vec{u}_\phi}{r}\left[\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial\left(A_r\right)}{\partial\theta}\right]$$

$$\Delta f(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right] + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$



3. (8pts) **Magnétostatique et Théorèmes d'Ampère et Laplace**

Considérons un conducteur rectiligne, supposé infini, parcouru pour un courant d'intensité I_1. Nous choisissons l'origine du système de coordonnées sur ce fil et l'axe Oz sur celui-ci.

a) Trouver le champ $\vec{\boldsymbol{B}}_1(\rho, \phi, z)$ produit par ce courant en coordonnées cylindriques avec le théorème d'Ampère.

b) Exprimer le champ $\vec{\boldsymbol{B}}_1(x, y, z)$ en coordonnées cartésiennes à une position $M = (a, a, z)$ (c.-à-d. $x = y = a$). Expliquer pourquoi le champ ne dépend pas de la coordonnée z.

c) Trouver la force de Laplace par unité de longueur sur un deuxième fil infini, parallèle au premier fil, et portant un courant I_2, passant par M (écrite : $\frac{d\vec{\boldsymbol{F}}_{L,1\to 2}}{d\ell_2}$).

d) On prend un troisième fil infini et parallèle aux deux précédents dont l'axe passe par les coordonnées $(x = a, y = 0)$. Exprimer la force de Laplace par unité de longueur sur la fil 2 : $\frac{d\vec{\boldsymbol{F}}_{L\to 2}}{d\ell_2} = \frac{d\vec{\boldsymbol{F}}_{L,1\to 2}}{d\ell_2} + \frac{d\vec{\boldsymbol{F}}_{L,3\to 2}}{d\ell_2}$, et trouver une expression (en fonction de I_1) du courant, I_3, tel que la force de Laplace sur le fil de courant I_2 à la position, M, soit orientée dans la direction $\vec{\boldsymbol{u}}_x$.

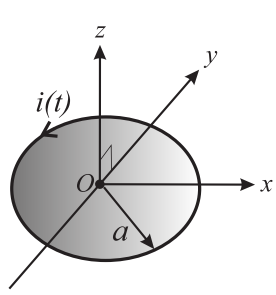
e) On prend un troisième fil infini et parallèle aux deux précédents dont l'axe passe par les coordonnées $(x = a, y = 0)$. Donner une expression (en fonction de I_1) du courant, I_3 passant par ce troisième fil tel que la force de Laplace sur le fil de courant I_2 à la position, M, soit orientée dans la direction $\vec{\boldsymbol{u}}_x$.

f) Application numérique de la force de Laplace sur le fil 2 : $a = 10$cm, $I_1 = 3$A, I_2=2A. ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ S.I.)

$$\vec{\boldsymbol{u}}_\phi(\phi) = -\vec{\boldsymbol{u}}_x \sin\phi + \vec{\boldsymbol{u}}_y \cos\phi \quad : \quad \sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

4. (8pts) **Induction :**

Une spire conductrice de forme circulaire (de rayon a et résistance électrique R) est placée dans un plan de z constant. Elle est immergée dans un champ magnétique, $\vec{\boldsymbol{B}}(\rho, t) = \vec{\boldsymbol{u}}_z B_0 \frac{\rho}{a} \sin\omega t$ (exprimé en coordonnées cylindriques avec une variation temporelle).



a) Trouver l'expression pour le flux magnétique, $\Phi(t)$, à travers le circuit.

b) Trouver l'expression de la force électromotrice, $e(t)$, dans la spire.

c) Donner l'expression du courant induit, $i(t)$, dans la spire (A.N. du courant maximal, i_0, avec $a = 40$cm $B_0 = 1$T, $\omega = \frac{100}{\pi}\mathrm{s}^{-1}$ rad/s, et $R = 8\Omega$).

d) Donner l'expression de la puissance dissipée, $P_J(t)$, dans la résistance, R, du circuit. (A.N. de la puissance dissipée maximale, P_0).

e) Trouver l'expression de $\vec{\boldsymbol{E}}(\rho, t)$ (Indice: Vous pouvez utiliser l'équation de Faraday-Maxwell sous forme intégrale).