

**Partiel Électromagnétisme - PEIP 2**

26 janvier 2017

4 Exercices recto-verso / Durée de l'épreuve 2 heures.

Formulaire A4 manuscrit autorisé / Calulettes collège standards autorisées



1. (6 pts) **Questions courtes électrostatique :**

Un potentiel électrique dans une certaine région de l'espace, ( $0 \leq x \leq b$  et  $y \geq 0$ ) s'écrit  $V(x, y) = a \sin(\pi x/b) e^{-y/c}$  où  $a$ ,  $b$ , et  $c$  sont des constantes.

(a) Si les coordonnées  $x$  et  $y$  ont les dimensions de mètres, donner les unités S.I. des constantes  $a$ ,  $b$ , et  $c$ .

$$[b] = [c] = \text{m}$$

$$[a] = \text{V} .$$

(b) Trouver la différence de potentiel,  $V_A - V_B$ , entre un point  $A = (0, 0)\text{m}$  et un point  $B = (b/2, c)\text{m}$ .

$$V_A = 0$$

$$V_B = a \sin \frac{\pi}{2} e^{-1} = ae^{-1} \text{V} .$$

$$\implies V_A - V_B = -ae^{-1} \text{V} .$$

(c) Trouver le champ électrique,  $\vec{E}(x, y, z)$ , associé au potentiel  $V(x, y)$ .

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &= -\vec{\text{grad}}V = -\vec{u}_x \frac{\partial V}{\partial x} - \vec{u}_y \frac{\partial V}{\partial y} \\ &= -a \frac{\pi}{b} \cos(\pi x/b) e^{-y/c} \vec{u}_x + \frac{a}{c} \sin(\pi x/b) e^{-y/c} \vec{u}_y \quad \text{V.m}^{-1} . \end{aligned}$$

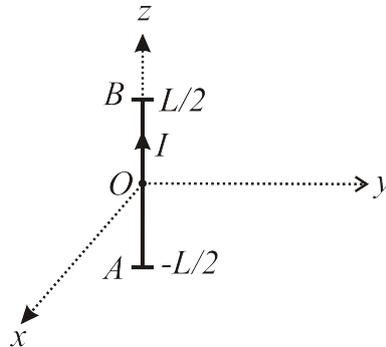
(d) Déduire la distribution de la densité de charge volumique,  $\rho(x, y)$ , associée à ce champ électrique.

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \epsilon_0 \text{div} \vec{E} = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} + \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial y} = \epsilon_0 a \frac{\pi^2}{b^2} \sin(\pi x/b) e^{-y/c} - \epsilon_0 \frac{a}{c^2} \sin(\pi x/b) e^{-y/c} \\ &= a \epsilon_0 \sin(\pi x/b) e^{-y/c} \left[ \frac{\pi^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right] \text{C.m}^{-3} . \end{aligned}$$

(e) On considère un champ électrique constant,  $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x + \sqrt{3} E_0 \vec{u}_y$ . Trouver le flux du champ électrique à travers une surface d'aire égale à  $S$  et orientée avec une normale à la surface,  $\vec{n} = \frac{1}{2} \vec{u}_x - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}_y$ .

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \iint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iint (E_0 \vec{u}_x + \sqrt{3} E_0 \vec{u}_y) \cdot \left( \frac{1}{2} \vec{u}_x - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}_y \right) dS \\ &= E_0 \left( \frac{1}{2} + -\frac{3}{2} \right) \iint dS = -E_0 S \quad \text{V.m} . \end{aligned}$$

2. (3 pts) **Questions courtes magnétostatique et induction :** Un courant constant  $I$  parcourt un segment de longueur,  $L$ , orienté selon l'axe  $Oz$ . (voir figure)



(a) En faisant appel à l'approximation d'un fil infini ( $y \ll L$ ), déterminer l'expression du champ  $\vec{B}_{\text{fil}}(y)$  produit par ce segment sur l'axe  $Oy$  (en fonction de  $y$ ).

$$\vec{B}_{\text{fil}}(y) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y} \vec{u}_x \quad \text{T} .$$

- (b) Le fil est maintenant plongé dans un champ extérieur  $\vec{B}_{\text{ext}} = B_0 \vec{u}_y$  uniforme et constant. Trouver la résultante des forces de Laplace sur ce segment de circuit. (A.N.  $B_0 = 1\text{T}$ ,  $L = 10\text{cm}$ ,  $I = 2\text{A}$ )

$$\begin{aligned} d\vec{F}_L &= I d\vec{l} \wedge \vec{B}_{\text{ext}} = IB_0 dz \vec{u}_z \wedge \vec{u}_y = -IB_0 dz \vec{u}_x \\ \vec{F}_L &= \int d\vec{F}_L = -IB_0 \vec{u}_x \int_0^L dz = -IB_0 L \vec{u}_x = -2 \times 10^{-1} \vec{u}_x = -0,2 \vec{u}_x \text{ N} . \end{aligned}$$

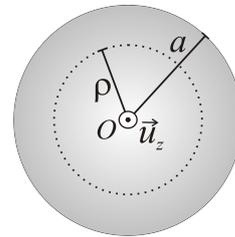
- (c) Le segment se déplace maintenant avec une vitesse constante,  $\vec{v}_{\text{fil}} = v_0 \vec{u}_x$ , dans le champ extérieur  $\vec{B}_{\text{ext}} = B_0 \vec{u}_y$ . Trouver la force électromotrice,  $e$ , apparue dans celui-ci. (A.N.  $v_0 = 5\text{m.s}^{-1}$ )

$$\begin{aligned} e &= \int (\vec{v}_{\text{fil}} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}) \cdot d\vec{l} = \int_0^L (v_0 \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y B_0) \cdot dz \vec{u}_z \\ &= v_0 B_0 \int_0^L dz = v_0 B_0 L = 5 \times 10 \times 10^{-2} = 5 \times 10 \times 10^{-2} = 5 \times 10^{-1} \text{V} \\ &= 0,5 \text{V} \end{aligned}$$

3. (7 pts) **Questions de magnétostatique :**

Soit un cylindre plein d'axe ( $Oz$ ) et de base un disque de centre  $O$  et de rayon  $a$ . A l'intérieur du cylindre, se trouve une densité de courant,  $\vec{j}(\rho, \phi, z) = \vec{u}_z j_0 \rho^2 / a^2$ , avec  $j_0$  une constante exprimée en  $\text{A.m}^{-2}$ . Sur l'ensemble des questions, on adopte l'approximation d'un cylindre infini.

$$\vec{j}(\rho, \phi, z) = \begin{cases} \vec{u}_z j_0 \rho^2 / a^2 & \rho < a \\ 0 & \rho \geq a \end{cases}$$



- (a) Déterminer le courant  $I$  du cylindre (spécifier les unités de  $I$ ). (Indice : l'unité de surface  $z = cte$  en coordonnées cylindriques est  $d\vec{S} = \vec{u}_z dS = \vec{u}_z \rho d\rho d\phi$ )

$$\begin{aligned} d\vec{S} &= \vec{u}_z \rho d\rho d\phi \\ I &= \iint \vec{j}(\rho, \phi, z) \cdot d\vec{S} = \frac{j_0}{a^2} \iint \rho^2 \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z \rho d\rho d\phi = \frac{j_0}{a^2} \int_0^a \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi \frac{j_0}{a^2} \int_0^a \rho^3 d\rho = 2\pi \frac{j_0}{a^2} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^a = \frac{j_0 \pi a^2}{2} \text{A} . \end{aligned}$$

- (b) Quelle est la symétrie du système? Quelles sont les invariances? Utiliser ces informations pour spécifier la forme de  $\vec{B}(\rho, \phi, z)$ .

$$\vec{B}(\rho, \phi, z) = \vec{u}_\phi B_\phi(\rho) .$$

- (c) Déterminer le champ magnétique,  $\vec{B}(\rho, \phi, z)$ , à l'extérieur du cylindre (pour  $\rho > a$ ), en faisant appel au théorème d'Ampère.

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_0^{2\pi} B_\phi(\rho) \vec{u}_\phi \cdot \vec{u}_\phi \rho d\phi = 2\pi \rho B_\phi(\rho) \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= 2\pi \rho B_\phi(\rho) = \mu_0 j_0 \frac{\pi a^2}{2} \\ \implies B_\phi(\rho) &= \mu_0 j_0 \frac{a^2}{4\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \quad \text{T} \quad \rho > a . \end{aligned}$$

- (d) Déterminer le champ magnétique,  $\vec{B}(\rho, \phi, z)$  à l'intérieur du cylindre ( $\rho < a$ ), en faisant appel au théorème d'Ampère.

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= 2\pi \rho B_\phi(\rho) = \mu_0 I_{\text{enl}} = \mu_0 \frac{j_0}{a^2} \int_0^\rho \rho'^3 d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \mu_0 2\pi \frac{j_0}{a^2} \frac{\rho^4}{4} \\ \implies B_\phi(\rho) &= \mu_0 j_0 \frac{\rho^3}{4a^2} = \mu_0 I \frac{\rho^3}{2\pi a^4} \quad \text{T} \quad \rho < a . \end{aligned}$$

#### 4. (7 pts) Bobines

On considère une spire de courant, de rayon  $a$ , portant un courant constant  $I$ .

- (a) Donner l'orientation du champ magnétique le long de l'axe de la spire. Justifier votre réponse.

Tout plan contenant l'axe de la bobine est un plan d'antisymétrie du système. Puisque le champ  $\mathbf{B}(M)$  sur l'axe de la spire doit appartenir à chacun de ces plans le champ est forcément orienté le long de l'axe, c.-à-d. :

$$\vec{\mathbf{B}}(M) = B_z(z) \vec{\mathbf{u}}_z$$

- (b) Démontrer en utilisant la loi de Biot et Savart et la figure ci-dessous que la composante  $z$  du champ magnétique produite sur l'axe de la spire est décrite par la formule trouvée en cours : (La figure illustre une contribution  $d\vec{\mathbf{B}}$  produit par un élément  $d\vec{\mathbf{l}}$  de la spire avec  $z$  mesurée par rapport au centre de la spire.)

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{2a} \frac{1}{\left[\left(\frac{z}{a}\right)^2 + 1\right]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3 \alpha . \quad (1)$$

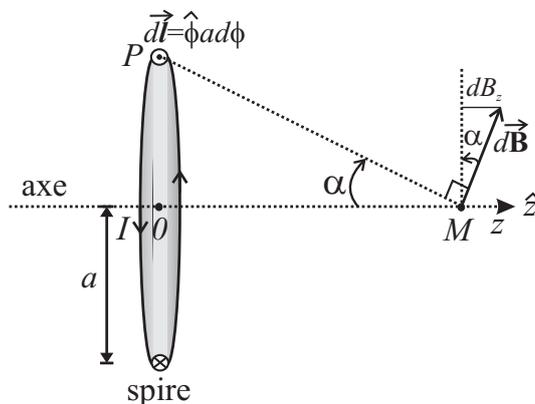


FIGURE 1 – Spire unique de rayon  $a$  portant un courant  $I$ .

De la loi de Biot et Savart, le champ  $d\vec{\mathbf{B}}$  créé par un segment  $d\vec{\mathbf{l}}$  d'une seule bobine est :

$$d\vec{\mathbf{B}}(M) = \frac{\mu_0 I d\vec{\mathbf{l}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{PM}}}{4\pi PM^3}$$

et puisque  $d\vec{\mathbf{l}}$  est perpendiculaire à  $\overrightarrow{\mathbf{PM}}$  :

$$\left|d\vec{\mathbf{B}}\right| = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi PM^2}$$

On a aussi par géométrie et le théorème de Pythagore que :

$$PM = (z^2 + a^2)^{1/2} \quad , \quad \sin \alpha = \frac{a}{PM} \implies PM = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$dB_z = d\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{u}}_z = \left|d\vec{\mathbf{B}}\right| \sin \alpha = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi PM^2} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi a^2} \sin^3 \alpha$$

et puisque  $dl = a d\phi$ , on a pour une seule spire :

$$\begin{aligned} B_z(z) &= \vec{\mathbf{u}}_z \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{\mathbf{l}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{PM}}}{PM^3} = \oint dB_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \sin^3 \alpha \int_0^{2\pi} a d\phi = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3 \alpha = \frac{\mu_0 I}{2a} \frac{a^3}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2a} \frac{1}{\left[\left(\frac{z}{a}\right)^2 + 1\right]^{3/2}} , \end{aligned}$$

où il est important de se rappeler que  $z$  est la distance mesurée par rapport au centre de la bobine et pas par rapport à l'origine  $O$  dans la figure de l'exercice.

- (c) Utiliser la formule dans l'éq.(1) pour trouver le champ magnétique au centre d'une bobine, d'épaisseur négligeable en  $z$ , et composée de  $N$  spires.  $A.N. : N = 200, I = 5A, a = 2\pi\text{cm}$ .

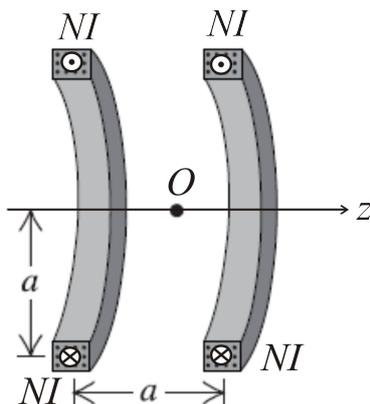
$$B_z(z) = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times I \times N}{4\pi \times 10^{-2}} = 10^{-7} \times 5 \times 2 \times 10^2 \times 10^2 = 10^{-2}\text{T} = 10\text{mT} = 100\text{G}$$

La superposition des  $N$  spires nous donne simplement  $B$  fois le champ d'une seule bobine,

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 NI}{2a} \frac{1}{\left[\left(\frac{z}{a}\right)^2 + 1\right]^{3/2}},$$

avec  $z$  toujours mesuré depuis le centre de la bobine.

- (d) On obtient une configuration de Helmholtz en prenant deux bobines identiques à celle décrite en (c) et centrées respectivement aux positions  $\pm a/2$  (c.-à-d. les bobines sont séparées par une distance égale à leur rayon : voir la figure). Utiliser la formule de l'éq.(1) afin d'écrire la formule pour le champ  $B_z$  pour cette configuration de deux bobines.



Pour le champ produit par la superposition des champs produits par les deux bobines, centrés aux positions  $\pm a/2$  sur l'axe  $Oz$ , on a donc :

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 NI}{2a} \left\{ \frac{1}{\left[\left(\frac{z-a/2}{a}\right)^2 + 1\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[\left(\frac{z+a/2}{a}\right)^2 + 1\right]^{3/2}} \right\},$$

où maintenant  $z$  est mesuré par rapport à l'origine  $O$ .

- (e) Calculer la valeur du champ magnétique aux positions  $z = 0$  et  $z = \pm a/2$ .

Au centre des bobines individuels, c.-à-d. en  $z = \pm a/2$ , le champ  $B_z$  est :

$$B_z(z = \pm a/2) = \frac{\mu_0 NI}{2a} \left\{ 1 + \frac{1}{2^{3/2}} \right\} \simeq \frac{\mu_0 NI}{2a} 1,354 \simeq 135,4\text{G}$$

A la position au milieu des bobines,  $z = 0$ , et on a

$$B_z(O) = B_z(z = 0) = \frac{\mu_0 NI}{2a} \frac{2}{\left[\frac{1}{4} + 1\right]^{3/2}} = \frac{\mu_0 NI}{2a} \frac{2}{\left[\frac{5}{4}\right]^{3/2}} \simeq \frac{\mu_0 NI}{2a} 1,431 \simeq 143,1\text{G}$$

Quelle est la différence relative du champ entre la valeur du champ  $B_z$  à l'origine et ses valeurs aux positions  $\pm a/2$ ? C'est-à-dire, calculer la valeur de l'expression suivante :

$$\delta B_z/B_z = \frac{B_z(0) - B_z(\pm a/2)}{B_z(0)} = \frac{143,1 - 135,4}{1,431} \simeq 0,05$$

La différence du champ entre  $z = 0$  et  $z = \pm a$  est de l'ordre de 5%.

- (f) Calculer  $dB_z/dz$  et  $d^2B_z/dz^2$  au point  $O$ .

Revenons à l'expression du champ en fonction de  $z$  :

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{2a} \left\{ \frac{1}{\left[\left(\frac{z-a/2}{a}\right)^2 + 1\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[\left(\frac{z+a/2}{a}\right)^2 + 1\right]^{3/2}} \right\}$$

$$\frac{d}{dz} B_z(z) = -\frac{\mu_0 3I}{2a^2} \left\{ \frac{z - a/2}{\left[ \left( \frac{z-a/2}{a} \right)^2 + 1 \right]^{5/2}} + \frac{z + a/2}{\left[ \left( \frac{z+a/2}{a} \right)^2 + 1 \right]^{5/2}} \right\}$$

$$\frac{d}{dz} B_z(z) \Big|_{z=0} = -\frac{\mu_0 I}{2a} \left\{ \frac{3}{2} \frac{-1}{\left[ \left( \frac{a/2}{a} \right)^2 + 1 \right]^{5/2}} + \frac{3}{2} \frac{1}{\left[ \left( \frac{a/2}{a} \right)^2 + 1 \right]^{5/2}} \right\} = 0$$

$$\frac{d^2}{dz^2} B_z(z) = \frac{d}{dz} \left[ \frac{d}{dz} B_z(z) \right] = -\frac{\mu_0 3I}{2a^2} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{z - a/2}{\left[ \left( \frac{z-a/2}{a} \right)^2 + 1 \right]^{5/2}} + \frac{z + a/2}{\left[ \left( \frac{z+a/2}{a} \right)^2 + 1 \right]^{5/2}} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 3I}{2a^2} \left\{ \frac{5}{2a} \left[ \frac{\frac{(z-a/2)^2}{a}}{\left[ \left( \frac{z-a/2}{a} \right)^2 + 1 \right]^{7/2}} + \frac{\frac{(z+a/2)^2}{a}}{\left[ \left( \frac{z+a/2}{a} \right)^2 + 1 \right]^{7/2}} \right] - \left[ \frac{1}{\left[ \left( \frac{z-a/2}{a} \right)^2 + 1 \right]^{5/2}} + \frac{1}{\left[ \left( \frac{z+a/2}{a} \right)^2 + 1 \right]^{5/2}} \right] \right\}$$

et à  $z = 0$ , on a,

$$\frac{d^2}{dz^2} B_z(z) \Big|_{z=0} = \frac{\mu_0 3I}{2a^2} \left\{ \frac{5}{2} \left[ \frac{\frac{1}{4}}{\left( \frac{1}{4} + 1 \right)^{7/2}} + \frac{\frac{1}{4}}{\left( \frac{1}{4} + 1 \right)^{7/2}} \right] - \left[ \frac{1}{\left( \frac{1}{4} + 1 \right)^{5/2}} + \frac{1}{\left( \frac{1}{4} + 1 \right)^{5/2}} \right] \right\} = \frac{\mu_0 3I}{2a^2} \left\{ \frac{5}{4} \frac{1}{\left( \frac{5}{4} \right)^{7/2}} - \frac{1}{\left( \frac{5}{4} \right)^{5/2}} \right\} = 0$$

Par symétrie, on sait qu'on trouverait par calcul direct que  $\frac{d^3}{dz^3} B_z(z) \Big|_{z=0}$ . Du coup, il faudrait aller jusque au quatrième dérivée,  $\frac{d^4}{dz^4} B_z(z)$ , avant de trouver une dérivée non-nul au point  $O$  à mi-chemin entre les bobines. Ceci explique pourquoi le champ  $B_z$  est presque constant autour de ce point.

- (g) Tracer l'allure du graphe du  $B_z(z)$  et comparer avec celui du champ magnétique produit par une seule bobine. Commenter l'intérêt de la configuration de Helmholtz.

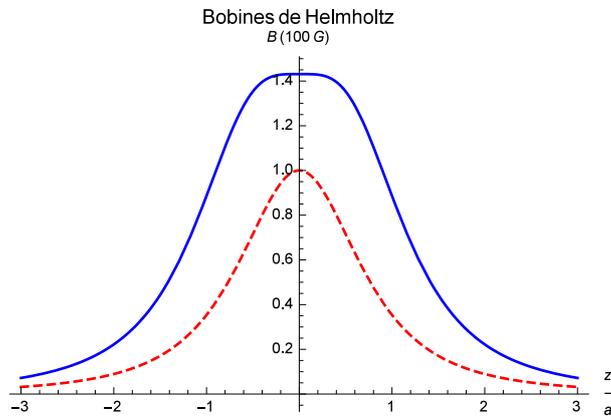


FIGURE 2 – Bleu solide - Champ magnétique produit par les doubles Bobines de Helmholtz. Rouge pointillée - Champ magnétique produit par une bobine seule.