Partiel d'Electromagnétisme - L2 Aix–Marseille 1
le 2 novembre 2010

1. (5 pts) On considère une charge de $Q_1 = 3,6\mu$C placée à (0,4,0)m et $Q_2 = -3,6\mu$C placée à (3,0,0)m.

   (a) Trouver le champ électrique, $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ à la position M =(0,0,5)m.

$$\overrightarrow{\mathbf{P}}_1 = \overrightarrow{\mathbf{OP}}_1 = (0,4,0) \qquad \overrightarrow{\mathbf{P}}_2 = \overrightarrow{\mathbf{OP}}_2 = (3,0,0)$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{E}}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(Q_1\frac{\overrightarrow{\mathbf{P_1M}}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{P_1M}}\right\|^3} + Q_2\frac{\overrightarrow{\mathbf{P_2M}}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{P_2M}}\right\|^3}\right) \\
&= 9\times 10^9\left(Q_1\frac{(0,-4,5)}{\|(0,-4,5)\|^3} + Q_2\frac{(-3,0,5)}{\|(-3,0,5)\|^3}\right) \\
&= 32,4\times 10^3\left(\frac{(0,-4,5)}{\|(0,-4,5)\|^3} - \frac{(-3,0,5)}{\|(-3,0,5)\|^3}\right) \\
&= 32,4\times 10^3\left(\frac{(0,-4,5)}{41\sqrt{41}} - \frac{(-3,0,5)}{34\sqrt{34}}\right)\mathrm{V/m} \\
&= \begin{bmatrix} 490,284 \\ -493,661 \\ -200,064 \end{bmatrix}\mathrm{V/m}
\end{aligned}$$

   où nous avons utilisé

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{\mathbf{P_1M}}\right\| &= \sqrt{\overrightarrow{\mathbf{P_1M}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{P_1M}}} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} \\
\left\|\overrightarrow{\mathbf{P_2M}}\right\| &= \sqrt{\overrightarrow{\mathbf{P_2M}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{P_2M}}} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}
\end{aligned}$$

   (b) Calculer le moment dipolaire, $\overrightarrow{\mathbf{p}}$, du système.

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = Q_1\overrightarrow{\mathbf{P_2P_1}} = 3,6\times 10^{-6}\left[(0,4,0)-(3,0,0)\right] = 3,6\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}\times 10^{-6}\mathrm{Cm}$$

$$= \begin{bmatrix} -10.8 \\ 14.4 \\ 0 \end{bmatrix}(\mu\mathrm{C})\,\mathrm{m} = \left[-10.8\widehat{\mathbf{x}} + 14.4\widehat{\mathbf{y}}\right](\mu\mathrm{C})\,\mathrm{m}$$

   (c) Calculer la force exercée sur une charge $Q_3 = 1\mu$C à la position (0,0,5)m.

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}_{Q_3} = Q_3\overrightarrow{\mathbf{E}}(M) = Q_3\overrightarrow{\mathbf{E}}((0,0,5)) = \begin{bmatrix} 0,490 \\ -0,493 \\ 0,200 \end{bmatrix}\times 10^{-3}\mathrm{N(Newtons)}$$

2. (5pts) On considère une sphère de rayon a possédant une densité volumique de charge homogène $\rho(r) = Cr$ (où C est une constante).

(a) Trouver la charge totale de la sphère.

$$Q_{\mathrm{s}} = \iiint \rho(r)\, d\mathcal{V} = 4\pi C \int_0^a r^3 dr = 4\pi C \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = C\pi a^4$$

(b) Trouver le champ électrique, $\overrightarrow{\mathbf{E}}$, dans tout l'espace.
Par symétrie

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = E_r(r)\,\widehat{\mathbf{r}}$$

$$\iint \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \widehat{\mathbf{n}} dS = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\epsilon_0}$$

$$r > a \qquad Q_{\mathrm{int}} = Q \qquad \overrightarrow{\mathbf{E}}_{r>a}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \frac{Ca^4}{4\epsilon_0 r^2}\widehat{\mathbf{r}} = \frac{Q_{\mathrm{s}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\widehat{\mathbf{r}}$$

$$r < a \qquad Q_{\mathrm{int}} = C\pi r^4 \qquad \overrightarrow{\mathbf{E}}_{r<a}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \frac{Cr^2}{4\epsilon_0}\widehat{\mathbf{r}}$$

(c) Calculer le potentiel électrique, V, dans tout l'espace.

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{l}}$$

Le potentiel électrique est donc :

$$r > a \qquad V(r) = \int_r^\infty \overrightarrow{\mathbf{E}}_{r>a} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{l}} = \frac{Ca^4}{4\epsilon_0 r} = \frac{Q_{\mathrm{s}}}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad V(a) = \frac{C}{4\epsilon_0}a^3$$

$$r < a \qquad V(r) - V(a) = \int_r^a \overrightarrow{\mathbf{E}}_{r<a} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{l}} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_r^a Cr^2 dr = \frac{C}{12\epsilon_0}\left[a^3 - r^3\right]$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{C}{12\epsilon_0}\left[a^3 - r^3\right] + \frac{C}{4\epsilon_0}a^3 = \frac{C}{12\epsilon_0}\left[4a^3 - r^3\right]$$

(d) Trouver l'énergie électrostatique, W_e, stockée par la sphère.
On a le choix entre deux formules afin d'obtenir cette quantité. D'abord :

$$\begin{aligned}
W_e &= \frac{1}{2}\iiint \rho(r)\, V(r)\, d\mathcal{V} = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{C}{12\epsilon_0}\left[4a^3 - r^3\right] \times Cr \times 4\pi r^2 dr \\
&= \frac{C^2\pi}{6\epsilon_0}\int_0^a \left[4a^3 - r^3\right] r^3 dr = \frac{1}{6}\frac{C^2\pi^2}{\epsilon_0}\int_0^a \left[4a^3 r^3 - r^6\right] dr \\
&= \frac{1}{6}\frac{C^2\pi}{\epsilon_0}\left[4a^3\int_0^a r^3 dr - \int_0^a r^6 dr\right] \\
&= \frac{1}{6}\frac{\pi C^2 a^7}{\epsilon_0}\left[1 - \frac{1}{7}\right] = \frac{\pi C^2 a^7}{7\epsilon_0}
\end{aligned}$$

L'autre façon d'obtenir ce résultat est :

$$\begin{aligned}
W_e &= \frac{\epsilon_0}{2}\iiint \left\|\overrightarrow{\mathbf{E}}\right\|^2 d\mathcal{V} = \frac{\epsilon_0}{2}4\pi\int_0^a E_r^2 r^2 dr + \frac{\epsilon_0}{2}4\pi\int_a^\infty E_r^2 r^2 dr \\
&= \frac{\epsilon_0}{2}4\pi\int_0^a \frac{C^2r^4}{16\epsilon_0^2}r^2dr + \frac{\epsilon_0}{2}4\pi\int_a^\infty \frac{C^2a^8}{16\epsilon_0^2 r^4}r^2dr \\
&= \frac{\pi C^2}{8\epsilon_0}\int_0^a r^6 dr + \frac{\pi C^2}{8\epsilon_0}a^8\int_a^\infty \frac{1}{r^2}dr \\
&= \frac{\pi C^2}{8\epsilon_0}\frac{a^7}{7} + \frac{\pi C^2}{8\epsilon_0}a^7 = \frac{C^2\pi a^7}{7\epsilon_0}
\end{aligned}$$

3. (3pts) Considérer le champ électrique $\overrightarrow{\mathbf{E}} = \left[2\left(x+4y\right)\widehat{\mathbf{x}} + 8x\widehat{\mathbf{y}}\right]$ V/m.

   (a) Est-ce que ce champ se dérive d'un potentiel ? Si oui, donner l'expression de $V\left(x,y\right)$?

   Un champ se dérive d'un potentiel à condition que $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\ \overrightarrow{\mathbf{E}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ partout. En calculant le rotationnel, on trouve :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{rot}}\ \overrightarrow{\mathbf{E}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{x}} & \widehat{\mathbf{y}} & \widehat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2\left(x+4y\right) & 8x & 0 \end{vmatrix} \\
&= \widehat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y\right) + \widehat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z\right) + \widehat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x\right) \\
&= 0\widehat{\mathbf{x}} + 0\widehat{\mathbf{y}} + \widehat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial}{\partial x}8x - \frac{\partial}{\partial y}2\left(x+4y\right)\right) \\
&= \overrightarrow{\mathbf{0}}
\end{aligned}$$

   Donc, on sait qu'un potentiel V existe telle que :

$$\overrightarrow{\mathbf{E}} = -\overrightarrow{\text{grad}}V\left(x,y\right) = -\frac{\partial V}{\partial x}\widehat{\mathbf{x}} - \frac{\partial V}{\partial y}\widehat{\mathbf{y}} - \frac{\partial V}{\partial z}\widehat{\mathbf{z}}$$

   Donc on sait que $V\left(x,y\right)$ doit satisfaire les deux équation suivantes :

$$\frac{\partial V\left(x,y\right)}{\partial x} = -2\left(x+4y\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial V\left(x,y\right)}{\partial y} = 8x$$

   On trouve le potentiel par intégration de ces deux relations :

$$\begin{aligned}
V\left(x,y\right) &= -\int 8x dy + f\left(x\right) = -8xy + f\left(x\right) + c \\
V\left(x,y\right) &= -\int \left(2x+8y\right)dx + g\left(y\right) = -8xy - x^2 + g\left(y\right) + d \\
-8xy + f\left(x\right) &= -8xy - x^2 + g\left(y\right) \Rightarrow V\left(x,y\right) = -8xy - x^2 + C
\end{aligned}$$

   donc

$$V\left(x,y\right) = -8xy - x^2 + C$$

   où C est une constante.

(b) Trouver le travail effectué en déplaçant une charge ponctuelle $Q = -20\mu\mathrm{C}$ et la constant depuis l'origine jusqu'à la position $(4, 2, 0)$ m sur le chemin $x^2 = 8y$.

Il y a deux manières de faire ceci : D'abord, il y a la façon directe :

$$
\begin{aligned}
& y = \frac{x^2}{8} \Rightarrow x^2 - 8y = 0 \\
& \quad \Rightarrow 2xdx - 8dy = 0 \Rightarrow dy = \frac{xdx}{4} \\
& \overrightarrow{dl} = \widehat{\mathbf{x}}dx + \widehat{\mathbf{y}}dy = \widehat{\mathbf{x}}dx + \widehat{\mathbf{y}}\frac{xdx}{4} \\
& W = -\int \overrightarrow{\mathbf{F}}_e \cdot \overrightarrow{dl} = -Q\int \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{dl} = -Q\int \left[2\left(x+4y\right)dx + 8xdy\right] \\
& \quad = -Q\int \left[2\left(x+4y\right)dx + 8x\frac{xdx}{4}\right] = -Q\int_0^4 \left[\left(2x+x^2\right)dx + 2x^2dx\right] \\
& \quad = -Q\int_0^4 2xdx - Q\int_0^4 3x^2dx \\
& \quad = -Q\left[x^2\right]_0^4 - Q\left[x^3\right]_0^4 = -Q\left(16+64\right) = 20 \times 80 \times 10^{-6} \\
& \quad = 1,6 \times 10^{-3}\mathrm{J} = 1,6\mathrm{mJ}
\end{aligned}
$$

L'autre façon, plus courte, est de simplement utiliser le potentiel électrique : On se rappelle que :

$$
W = -\int \overrightarrow{\mathbf{F}}_e \cdot \overrightarrow{dl}, \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathbf{F}}_e = Q\overrightarrow{\mathbf{E}} \Rightarrow W = -Q\int_{(0,0)}^{(4,2)} \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{dl} = Q\Delta V
$$

Donc avec :

$$
\Delta V = -\int_{(0,0)}^{(4,2)} \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{dl} = V\left(4,2\right) - V\left(0,0\right) = -80\mathrm{V(olts)}
$$

On obtient simplement que

$$
\begin{aligned}
W = Q\Delta V &= \left(-20 \times 10^{-6}\right)\left(-80\right) \\
&= 1,6 \times 10^{-3}\mathrm{J} = 1,6\mathrm{mJ}
\end{aligned}
$$

4. (3 pts) Trouver l'énergie, W_e stockée dans un système de trois charges égales de $Q = 2\mathrm{nC}$, alignées sur un axe quelconque avec une distance de $d = 0,5\mathrm{m}$ entre les charges voisines.

$$
\begin{aligned}
W_e &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\text{couples}} \frac{q_i q_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(2\frac{Q^2}{d} + \frac{Q^2}{2d}\right) \\
&\overset{A.N.}{=} 9 \times 10^9 \left(2\frac{4 \times 10^{-18}}{d} + \frac{4 \times 10^{-18}}{2d}\right) \\
&= \left(16+4\right) \times 9 \times 10^9 \times 10^{-18} = 180 \times 10^{-9}\mathrm{nJ}
\end{aligned}
$$

5. (4pts) Un fil d'aluminium de section circulaire, d'un diamètre de 0,8mm et 1000 mètres de long possède une résistance entre ses deux bouts de $R = 56.5\Omega$ (ohms). Trouver la conductivité (S/m) de l'aluminium.

$$\text{Section du fil} = S = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$R = \frac{l}{\gamma S} \Rightarrow \gamma = \frac{l}{RS} = \frac{10^3}{53,5 \times \pi \times (0,4 \times 10^{-3})^2} = 35,2 \times 10^6 \mathrm{Sm}^{-1}$$
$$= 35,2 \mathrm{MSm}^{-1}$$