Examen d'électromagnétisme le 4 janvier 2010

Il y a 5 exercices (un au verso)

1. (4 pts) On considère deux charges : $Q_1 = 300\mu C$ aux coordonnées P_1 (1,-1,-3)m et $Q_2 = -40\mu C$ aux coordonnées P_2 (3,-3,-2)m.

   (a) Calculer la force (vecteur) sur la charge Q_2 (en coordonnées cartésiennes).

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{1\to 2} &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}}{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}\right\|^3} \\
\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}} &= \overrightarrow{\boldsymbol{P_1O}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OP_2}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OP_2}} - \overrightarrow{\boldsymbol{OP_1}} = (3,-3,-2) - (1,-1,-3) \\
&= (2,-2,1) = 2\widehat{\boldsymbol{x}} - 2\widehat{\boldsymbol{y}} + \widehat{\boldsymbol{z}} \\
\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}\right\| &= \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3 \\
\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{1\to 2} &= -9\times 10^9 \times 3\times 10^{-4} \times 4\times 10^{-5} \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}}{(P_1P_2)^3} \\
&= -9\times 3\times 4 \frac{(2\widehat{\boldsymbol{x}} - 2\widehat{\boldsymbol{y}} + \widehat{\boldsymbol{z}})}{27} = (-8\widehat{\boldsymbol{x}} + 8\widehat{\boldsymbol{y}} - 4\widehat{\boldsymbol{z}})\,\mathrm{N}
\end{aligned}$$

   La force exercée sur la charge Q_2 par la charge Q_1 est donc :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{1\to 2}\,(-8\widehat{\boldsymbol{x}} + 8\widehat{\boldsymbol{y}} - 4\widehat{\boldsymbol{z}})\,\mathrm{N} \qquad \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{1\to 2}\right\| = 12\mathrm{N}} \tag{1}$$

   (b) Quelle est la force (vecteur) sur la charge Q_1 ?

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{2\to 1} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P_2P_1}}}{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{P_2P_1}}\right\|^3} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}}{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}\right\|^3} = -\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{1\to 2}$$

   puisque $\overrightarrow{\boldsymbol{P_2P_1}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}$. *L'application numérique est donc :*

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{2\to 1} = -\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{1\to 2} = (8\widehat{\boldsymbol{x}} - 8\widehat{\boldsymbol{y}} + 4\widehat{\boldsymbol{z}})\,\mathrm{N}} \tag{2}$$

2. (4pts) Considérer une sphère de rayon a avec une distribution volumique de charges $\rho(r,\theta,\phi) = Cr^2$.

   (a) Calculer la charge totale, Q, de la sphère (en fonction de C et a).

$$Q = \iiint \rho d\mathcal{V} = 4\pi \int_0^a (Cr^2)\, r^2 dr = 4\pi C \int_0^a r^4 dr = \frac{4\pi C a^5}{5}$$

   Le résultat est donc

$$\boxed{Q = \frac{4\pi C a^5}{5}} \tag{3}$$

(b) Calculer le champ électrique, $\vec{\boldsymbol{E}}$, dans la région $r < a$. (En termes de r, Q et a).

Par symétrie sphérique

$$\vec{\boldsymbol{E}}\left(\vec{\boldsymbol{r}}\right) = E_r\left(r\right)\hat{\boldsymbol{r}}$$

Le flux à travers une surface, S_r, de rayon r centrée sur l'origine est donc :

$$\iint_{S_r} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = 4\pi r^2 E_r\left(r\right) \tag{4}$$

Le théorème de Gauss est :

$$\iint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Pour $r < a$, la charge à l'intérieur d'une sphère de rayon r est :

$$Q_{int}\left(r\right) = \frac{C4\pi}{\epsilon_0}\int_0^r r^4 dr = \frac{4\pi C}{\epsilon_0}\frac{r^5}{5} \tag{5}$$

Mettant ensemble les résultats de (4) et (5), nous trouvons

$$4\pi r^2 E_r\left(r\right) = \frac{4\pi C}{\epsilon_0}\frac{r^5}{5}$$

$$\Rightarrow E_r\left(r\right) = \frac{C}{\epsilon_0}\frac{r^3}{5} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r^3}{a^5}$$

où nous avons utilisé le résultat de (3) afin d'écrire la constant C en fonction de la charge de la sphère, Q, et le rayon de la sphère, a : $C = \frac{5}{4\pi a^5}Q$.

Le champ électrique pour $r < a$ est donc :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}}\left(\vec{\boldsymbol{r}}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r^3}{a^5}\hat{\boldsymbol{r}}} \tag{6}$$

(c) Calculer le champ électrique, $\vec{\boldsymbol{E}}$, dans la région $r > a$. (En termes de r, et Q).

Pour $r > a$, la charge à l'intérieur de la surface S_r, de rayon r centrée sur l'origine est simplement la charge totale de la sphère, Q. Nous avons simplement :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}}\left(\vec{\boldsymbol{r}}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}} \tag{7}$$

3. (4pts) On un condensateur plan (approximation plans infinis) remplit d'un matériau diélectrique ayant une permittivité relative ε_r (sans dimensions).

(a) Calculer la capacité du condensateur en figure 1(a) (en fonction de S, d, $\varepsilon_{r,1}$).

On se rappel que pour un condensateur plan dans l'approximation du plan infini, le champ électrique s'écrit $\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_r\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{Q}{S\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{z}}$ où $\hat{\boldsymbol{z}}$ est la direction orthogonale aux armatures et ε_r est la permittivité diélectrique relative (sans dimension du matériau). La différence de potentiel est donc $U = \int_0^d \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = \frac{Qd}{S\varepsilon_r\epsilon_0}$. Avec la définition de la capacité, $U \equiv \frac{Q}{C}$, on trouve :

$$\boxed{C = \frac{S\varepsilon_r\epsilon_0}{d}.} \tag{8}$$

(b) Donner la valeur de l'énergie stockée dans le condensateur.
A.N. : $S = 1\text{m}^2$, $U_g = 10\text{V}$ et $d = 1\text{cm}$ $\varepsilon_r = 30$.

$$C = \epsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = 4\pi\epsilon_0 \frac{S}{4\pi d}\varepsilon_r = \frac{1}{9\times 10^9}\left(\frac{1}{4\pi 10^{-2}}\right) 30 = \frac{1}{12\pi}10^{-6} \simeq 0,027\mu F \text{ (Farads)}$$

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}C_{eq}U^2 = \frac{1}{2}0,027\times 10^{-6}\times 10^2 \simeq 1,3\mu\text{J (Joules)}} \tag{9}$$

On considère maintenant que le volume entre les deux condensateurs est remplit par deux matériaux diélectriques (constantes diélectriques relatives $\varepsilon_{r,1}$, et $\varepsilon_{r,2}$), chacun replissant la moitié du volume entre les armatures.

(c) Calculer la capacité du condensateur en figure 1(b) (en fonction de S, d, $\varepsilon_{r,1}$, et $\varepsilon_{r,2}$).
Il s'agit de deux condensateurs en parallèle (ayant la même différence de potentiel U_g).

$$\boxed{C_{eq} = \frac{Q}{U_g} = \frac{Q_1}{U_g} + \frac{Q_2}{U_g} = C_1 + C_2 = \frac{S_1\epsilon_0\varepsilon_{r,1}}{d} + \frac{S_2\epsilon_0\varepsilon_{r,2}}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d}\left(\frac{\varepsilon_{r,1}+\varepsilon_{r,2}}{2}\right)} \tag{10}$$

(d) Calculer la capacité du condensateur en figure 1(c). (en fonction de S, d, $\varepsilon_{r,1}$, et $\varepsilon_{r,2}$)
Il s'agit de deux condensateurs en série

$$U_g = \frac{Q}{C_{eq}} = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{S\epsilon_0\varepsilon_{r,1}} + \frac{d_2}{S\epsilon_0\varepsilon_{r,2}} = \frac{d}{2\epsilon_0 S}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r,1}} + \frac{1}{\varepsilon_{r,2}}\right) = \frac{d}{2\epsilon_0 S}\left(\frac{\varepsilon_{r,1}+\varepsilon_{r,2}}{\varepsilon_{r,1}\varepsilon_{r,2}}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow C_{eq} = \frac{\epsilon_0 S}{d}2\left(\frac{\varepsilon_{r,1}\varepsilon_{r,2}}{\varepsilon_{r,1}+\varepsilon_{r,2}}\right) = \frac{\epsilon_0 S}{d}\left(\frac{\varepsilon_{r,1}\varepsilon_{r,2}}{\frac{\varepsilon_{r,1}+\varepsilon_{r,2}}{2}}\right)} \tag{11}$$

4. (4pts) Trouver la force de Laplace, $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_L$, sur un fil, $l = 2\text{m}$ de long orientée sur l'axe z et parcouru par un courant de $I = 2\text{A}$ (Ampères) immergé dans un champ magnétique constant de

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 2\widehat{\boldsymbol{x}} + 6\widehat{\boldsymbol{y}}\text{T} \quad \text{(Teslas)}$$

La Force de Laplace sur un segment dl *du fil est :*

$$d\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_L = I\left(\overrightarrow{d\boldsymbol{l}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{B}}\right) = I dl\left[\widehat{\boldsymbol{z}} \wedge (2\widehat{\boldsymbol{x}} + 6\widehat{\boldsymbol{y}})\right] = I dl\,(2\widehat{\boldsymbol{y}} - 6\widehat{\boldsymbol{x}})$$

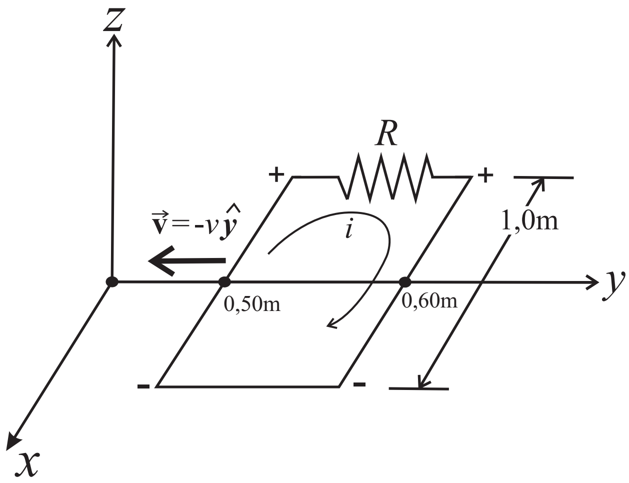
La force de Laplace totale est :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_L = \int_0^l d\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_L = I\,(2\widehat{\boldsymbol{y}} - 6\widehat{\boldsymbol{x}})\int_0^l dl = Il\,(2\widehat{\boldsymbol{y}} - 6\widehat{\boldsymbol{x}}) = 8\,(\widehat{\boldsymbol{y}} - 3\widehat{\boldsymbol{x}})\,\text{N}} \tag{12}$$

5. (4pts) Un circuit rectangulaire (dimensions $0,1\text{m} \times 1\text{m}$) placé dans le plan xOy se dirige vers l'origine avec une vitesse $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = -250\widehat{\boldsymbol{y}}\text{m/s}$ (voir la figure) dans un champ

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = 0,80e^{-y/2}\widehat{\boldsymbol{z}}\text{T} \quad \text{(Teslas)}.$$

Le circuit a une résistance $R = 2,5\Omega$.



(a) Calculer le courant dans le circuit à l'instant où les deux grands cotés du rectangle sont respectivement à $y = 0,5$m et $y = 0,6$m en utilisant l'expression fondamentale de la force électromotrice

$$e(t) = \oint_{\text{circuit}} \left(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}}_{\text{fil}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} \right) \cdot \vec{d\boldsymbol{l}}$$

On prend $L = 1m$ *et* $l_2 - l_1 = 0,1m$. *Puisque le cadre est rigide et n'est pas en train de tourner, la vitesse,* $\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{fil}} = -v\widehat{\boldsymbol{y}}$, *est le même sur tout le circuit. Le champ* $\vec{\boldsymbol{B}}$ *est partout dans le même sens, mais il n'est pas uniforme (il dépend sur* y*). On a donc* :

$$\left(\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{fil}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} \right) = -vB\left(y\right)\left(\widehat{\boldsymbol{y}} \wedge \widehat{\boldsymbol{z}}\right) = -vB\left(y\right)\widehat{\boldsymbol{x}}$$

La force électromotrice est donnée par l'intégrale curviligne :

$$e(t) = \oint_{\text{circuit}} \left(\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{fil}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} \right) \cdot \vec{d\boldsymbol{l}} = -\oint_{\text{circuit}} vB\left(y\right)\widehat{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{d\boldsymbol{l}}$$

Puisque $\vec{d\boldsymbol{l}}$ *est parallèle à* $\widehat{\boldsymbol{y}}$ *sur les coté courts, il n'y a de contribution à* $e(t)$ *sur ces cotés. Sur les cotés longs* $\vec{d\boldsymbol{l}} = \pm dx\widehat{\boldsymbol{x}}$ *et il y a une f.é.m. totale,* $e(t)$, *non nulle puisque le champ* $\vec{\boldsymbol{B}}$ *n'est pas le même sur les deux cotés longs. On obtient :*

$$\begin{aligned} e(t) &= vB\left(0,5\right)\int_0^L \left(\widehat{\boldsymbol{y}} \wedge \widehat{\boldsymbol{z}}\right) \cdot \widehat{\boldsymbol{x}}dx - vB\left(0,6\right)\int_0^L \left(\widehat{\boldsymbol{y}} \wedge \widehat{\boldsymbol{z}}\right) \cdot \widehat{\boldsymbol{x}}dx \\ &= v\left[B\left(0,5\right) - B\left(0,6\right)\right] = v\frac{8}{10}\left[e^{-l_1/2} - e^{-l_2/2}\right] \\ &= 250 \times 0,80\left[e^{-1/4} - e^{-\frac{3}{10}}\right] \simeq 7,6\text{V} \end{aligned}$$

$$\boxed{i(t) = e(t)/R \simeq 3,04\text{A}} \tag{13}$$

(b) Obtenir le même résultat en faisant appel à la loi de Faraday.

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Suivant le sens choisit pour i positif, nous avons donc $\overrightarrow{d\boldsymbol{S}} = -dxdy\widehat{\boldsymbol{z}}$ *.*

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= \iint \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{S}} = -\int_{l_1}^{l_2} dy \int_0^L dx\, 0,80 e^{-y/2} = -\frac{8}{10}\int_{l_1}^{l_2} dy \int_0^L dx\, e^{-y/2} \\
&= -\frac{8}{10} L \int_{l_1}^{l_2} dy\, e^{-y/2} \\
&= \frac{16}{10} L \left[e^{-y/2}\right]_{l_1}^{l_2} = \frac{16}{10} L \left[e^{-l_2/2} - e^{-l_1/2}\right] \\
&= \frac{16}{10} L \left[e^{-(l_2-l_1)/2} - 1\right] e^{-l_1/2} = \frac{16}{10} L \left[e^{-(l_2-l_1)/2} - 1\right] e^{-(l_1-vt)/2}
\end{aligned}$$

où nous avons choisit d'appeler $t = 0$*, l'instant d'intérêt où* $l_1 = 0,5\text{m}$ *et* $l_2 = 0,6\text{m}$*. Avec ce choix, la position du coté du cadre le plus prêt à l'axe s'écrit :*

$$l(t) = l_1 - vt$$

On remarque que le flux Φ *est négatif puisque* $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ *et* $\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}$ *sont anti-parallèles. On calcul* $e(t)$ *maintenant avec la loi de Faraday :*

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\Phi}{dt}\right|_{t=0} &= \left.\frac{8}{10} vL \left[e^{-(l_2-l_1)/2} - 1\right] e^{-(l_1-vt)/2}\right|_{t=0} \\
e(t=0) &= -\left.\frac{d\Phi}{dt}\right|_{t=0} = \frac{4}{5} vL \left[1 - e^{-(l_2-l_1)/2}\right] e^{-l_1/2} = \frac{4}{5} vL \left[e^{-l_1/2} - e^{-l_2/2}\right] \simeq 7,6\text{V}
\end{aligned}$$

$$\boxed{i(t=0) = e(t=0)/R \simeq 3,04\text{A}} \tag{14}$$