Partiel Electromagnétisme le 3 novembre 2009

1. (4 pts) Trouver le champ électrique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ à l'origine produit par une charge de 64,45 nC positionné à la position P (-4,3,2)m en coordonnées cartésiennes. Préciser les unités.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{PO^2}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{PO}}}{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{PO}}\right\|}$$

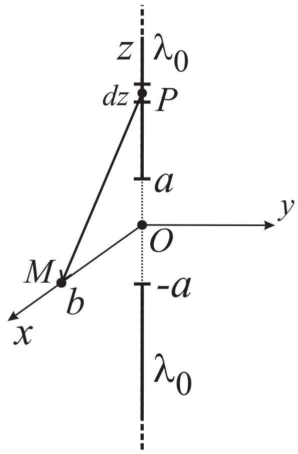
$$\overrightarrow{\boldsymbol{PO}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{OP}} = -(-4\widehat{\mathbf{x}} + 3\widehat{\mathbf{y}} + 2\widehat{\mathbf{z}}) = 4\widehat{\mathbf{x}} - 3\widehat{\mathbf{y}} - 2\widehat{\mathbf{z}}$$

$$\left\|\overrightarrow{\mathbf{PO}}\right\| = \sqrt{4^2+3^2+2^2} = \sqrt{16+9+4} = \sqrt{29}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(O) = 9\times 10^9\frac{64,45\times 10^{-9}}{29}\left(\frac{4\widehat{\mathbf{x}} - 3\widehat{\mathbf{y}} - 2\widehat{\mathbf{z}}}{\sqrt{29}}\right) = 9\frac{64,45}{29}\left(\frac{4\widehat{\mathbf{x}} - 3\widehat{\mathbf{y}} - 2\widehat{\mathbf{z}}}{\sqrt{29}}\right)$$

$$= 20\left(\frac{4\widehat{\mathbf{x}} - 3\widehat{\mathbf{y}} - 2\widehat{\mathbf{z}}}{\sqrt{29}}\right)\mathrm{Vm}^{-1}$$

2. (5pts) Considérer deux distributions de charge linéique λ_0 sur l'axe z : L'une des distributions s'étend de $z=a$ à ∞ et l'autre s'étend de $z=-a$ à $-\infty$. (voir dessin)



On peut utiliser l'intégrale : $\displaystyle\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \left[\frac{z}{\rho^2(\rho^2+z^2)^{1/2}}\right]_{z_1}^{z_2}$

(a) Calculer le champ électrique, $\overrightarrow{\mathbf{E}}$, à la position $(b,0,0)$.

Par symétrie, le champ est dans la direction $\widehat{\mathbf{x}}$.

En coordonnées cylindriques $M = (\rho = b, \phi = 0, z = 0)$ et $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \widehat{\rho} = \widehat{\mathbf{x}}$.

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_a^{\infty}\frac{\lambda dz}{PM^2}\frac{\overrightarrow{\mathbf{PM}}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{PM}}\right\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{a}\frac{\lambda dz}{PM^2}\frac{\overrightarrow{\mathbf{PM}}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{PM}}\right\|}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{PO}} = -z\widehat{\mathbf{z}} \qquad \overrightarrow{\mathbf{OM}} = \rho\widehat{\rho} \qquad \overrightarrow{\mathbf{PM}} = \overrightarrow{\mathbf{PO}} + \overrightarrow{\mathbf{OM}} = -z\widehat{\mathbf{z}} + \rho\widehat{\rho}$$

$$PM^2 = \rho^2 + z^2$$

$$
\begin{aligned}
E_\rho = \widehat{\rho} \cdot \overrightarrow{\mathbf{E}}(M) &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{\lambda dz}{PM^3} + \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^a \frac{\lambda dz}{PM^3} \\
&= \frac{\lambda\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{dz}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}} + \frac{\lambda\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^a \frac{dz}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0\rho} \left\{ \left[\frac{z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{1/2}} \right]_a^\infty + \left[\frac{z}{\rho^2\left(\rho^2+z^2\right)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{-a} \right\} \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \left\{ 1 - \frac{a}{\left(\rho^2+a^2\right)^{1/2}} \right\} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \left\{ 1 - \frac{\frac{a}{\rho}}{\left(1+\left(\frac{a}{\rho}\right)^2\right)^{1/2}} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\overrightarrow{\mathbf{E}}(b,0,0) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 b} \left\{ 1 - \frac{\frac{a}{b}}{\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)^{1/2}} \right\} \widehat{\mathbf{x}}
$$

(b) A.N. $a = 4\text{m}$, $b = 2\text{m}$, et $\lambda_0 = 20nC$.

$$
\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{\mathbf{E}}\right\| = E_\rho &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \left\{ 1 - \frac{\frac{a}{b}}{\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)^{1/2}} \right\} \\
&= \frac{20\times10^{-9}}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 1 - \frac{\frac{4}{2}}{\left(1+\left(\frac{4}{2}\right)^2\right)^{1/2}} \right\} \\
&= 20\times10^{-9}\times9\times10^9 \left\{ 1 - \frac{\frac{4}{2}}{\left(1+\left(\frac{4}{2}\right)^2\right)^{1/2}} \right\} \\
&= 180\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \simeq 19\text{Vm}^{-1}
\end{aligned}
$$

3. (4pts) Considérons une région possédant une densité de charge volumique $\rho(r)$ (distribution de charge à symétrie sphérique). Le champ électrique produit par cette distribution a la forme

$$
\overrightarrow{\mathbf{E}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \frac{Cr^2\widehat{\mathbf{r}}}{\epsilon_0} \qquad \text{c.-à-d.} \qquad \overrightarrow{\mathbf{E}}\left(\overrightarrow{\mathbf{r}}\right) = \frac{Cr^2\widehat{\mathbf{e}}_r}{\epsilon_0}
$$

(a) Utiliser la forme intégrale du théorème de Gauss afin de calculer la quantité de charge, $Q(a)$, contenu dans une sphère de rayon a centrée sur l'origine.

$$
\iint \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{S}} = \frac{Ca^2}{\epsilon_0} \iint dS = 4\pi\frac{Ca^4}{\epsilon_0} = \frac{Q(a)}{\epsilon_0}
$$
$$
\Rightarrow Q(a) = 4\pi Ca^4
$$

(b) Utiliser la forme locale (différentielle) du théorème de Gauss afin d'en déduire l'équation de la densité de charge volumique $\rho(r)$. (Vous pouvez utiliser la formule pour la divergence en coordonnées sphériques) :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{A}}\,(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\frac{\rho\,(r,\theta,\phi)}{\epsilon_0} = \operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{E}}\,(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{Cr^2}{\epsilon_0}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Cr^4}{\epsilon_0}\right) = \frac{C}{\epsilon_0 r^2}\frac{dr^4}{dr} = \frac{4Cr^3}{\epsilon_0 r^2} = \frac{4Cr}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \rho\,(r,\theta,\phi) = 4Cr$$

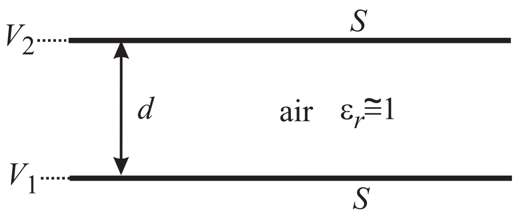
(c) Utiliser la densité volumique $\rho(r)$ trouvée en (b) afin de calculer $Q\,(a)$ en utilisant la formule :

$$Q\,(a) = \iiint\limits_{r<a} \rho(r)d\mathcal{V}$$

$$Q\,(a) = 4\pi\int_0^a 4Cr^3dr = 4\pi C\left[r^4\right]_0^a = 4\pi Ca^4$$

c'est le même résultat comme celui trouvé en (a) comme il le devrait.

4. (2 pts) Considérons un conducteur plan dans l'air consistant de deux armatures plans de surface S séparés par une distance d et différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ (voir dessin). Nous adoptons l'approximation que d est beaucoup plus petit que les dimensions linéaires des armatures (approximation de plans infinis).



(a) Donner la capacité du condensateur.

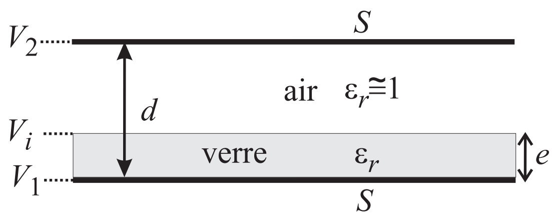
$$\overrightarrow{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\widehat{\mathbf{z}} = \frac{Q_1}{S\epsilon_0} \qquad U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \overrightarrow{\mathbf{E}}\cdot\overrightarrow{d\mathbf{l}} = \frac{Q_1 d}{S\epsilon_0} \equiv \frac{Q_1}{C}$$

$$\Rightarrow C = \frac{S\epsilon_0}{d}$$

(b) Exprimer l'énergie électrique, W_e, stockée par le condensateur (en fonction de U).

$$W_e = \frac{1}{2}\left(Q_1V_1 + Q_2V_2\right) = \frac{Q_1}{2}\left(V_1 - V_2\right) = \frac{Q_1U}{2} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{S\epsilon_0}{2d}U^2$$

5. (5pts) On introduit ensuite entre les armatures un morceau de verre caractérisé par une constante dielectric relative ε_r ayant les mêmes dimensions que les armatures et d'épaisseur $e < d$. Ce bloc de verre est accolé à l'armature porté au potentiel V_1. (voir le dessin)



(a) Trouver la capacité du condensateur en fonction de d, e, S, et ε_r. **Indice :** traiter le problème comme un système de deux condensateurs en série ou en se servant du fait que le champ $\vec{\mathbf{D}}$ (dans cet exemple) est uniforme entre les deux armatures.

Pour des condensateurs en série, nous avons

$$C_1 = \frac{S\varepsilon_r\epsilon_0}{e} \qquad C_2 = \frac{S\epsilon_0}{(d-e)}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{e}{S\varepsilon_r\epsilon_0} + \frac{(d-e)}{S\epsilon_0} = \frac{e\left(1+\varepsilon_r\left(\frac{d}{e}-1\right)\right)}{S\varepsilon_r\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow C = \frac{S\varepsilon_r\epsilon_0}{e\left(1+\varepsilon_r\left(\frac{d}{e}-1\right)\right)} \tag{1}$$

ou encore

$$C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = \frac{\frac{S\varepsilon_r\epsilon_0}{e}\frac{S\epsilon_0}{(d-e)}}{\frac{S\varepsilon_r\epsilon_0}{e}+\frac{S\epsilon_0}{(d-e)}} = \frac{S\epsilon_0}{e\,(d-e)}\frac{\varepsilon_r}{\frac{e+\varepsilon_r(d-e)}{e(d-e)}}$$

$$= \frac{S\varepsilon_r\epsilon_0}{e+\varepsilon_r\,(d-e)} = \frac{S\varepsilon_r\epsilon_0}{e\left(1+\varepsilon_r\left(\frac{d}{e}-1\right)\right)}$$

L'autre façon de résoudre ce problème est de voir que :

$$\vec{\mathbf{D}} = \frac{Q_1}{S}$$

est uniforme à l'intérieur du condensateur. Dans les deux milieux air et verre nous avons

$$\vec{\mathbf{E}}_{verre} = \frac{Q_1}{S\varepsilon_r\epsilon_0} \qquad \vec{\mathbf{E}}_{air} = \frac{Q_1}{S\epsilon_0}$$

La capacité du système se trouve en faisant l'intégrale entre 1 et 2

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^i \vec{\mathbf{E}}_{verre}\cdot d\vec{\mathbf{l}} + \int_i^2 \vec{\mathbf{E}}_{air}\cdot d\vec{\mathbf{l}}$$

$$= \frac{eQ_1}{S\varepsilon_r\epsilon_0} + \frac{(d-e)\,Q_1}{S\epsilon_0} = Q_1\left[\frac{e}{S\varepsilon_r\epsilon_0} + \frac{(d-e)}{S\epsilon_0}\right] \equiv \frac{Q_1}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{e}{S\varepsilon_r\epsilon_0} + \frac{(d-e)}{S\epsilon_0} \Rightarrow C = \frac{S\varepsilon_r\epsilon_0}{e\left(1+\varepsilon_r\left(\frac{d}{e}-1\right)\right)}$$

(b) Trouver l'énergie électrique, W_e, stockée par ce condensateur.

$$W_e = \frac{1}{2}Q_1V_1 - \frac{1}{2}Q_1V_2 = \frac{Q_1}{2}U = \frac{C}{2}U^2 \tag{2}$$

(c) On prend maintenant $d = 1$cm, $e = 0,2$ cm, $\varepsilon_r \simeq 6,5$, et on porte la différence de potentiel entre les armatures à $U = 29$kV. Le condensateur est maintenant près de sa limite de fonctionnement car l'air devient conducteur si le champ électrique dépasse ~ 30kV/cm. Déterminer l'amplitude du champ électrique dans l'air. (Y-a-t-il claquage du condensateur ?)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{E}}_{air} &= \frac{Q_1}{S\epsilon_0} \\
Q_1 &= CU = \frac{S\varepsilon_r\epsilon_0}{e\left(1+\varepsilon_r\left(\frac{d}{e}-1\right)\right)}U \\
\overrightarrow{\mathbf{E}}_{air} &= \frac{Q_1}{S\epsilon_0} = \frac{\varepsilon_r}{e\left(1+\varepsilon_r\left(\frac{d}{e}-1\right)\right)}U \\
&= \frac{6,5}{0,2\times(1+6,5\,(5-1))}U = \frac{5\times 6,5}{(1+6,5\times 4)}U \\
&= 1,2U \simeq 35\text{kV/cm}
\end{aligned} \tag{3}$$

Donc $\left\|\overrightarrow{\mathbf{E}}_{air}\right\| > 29$kV/cm et il y a claquage du condensateur.
C'est plus long, mais on peut définir $U_1 = V_1 - V_i$, et $U_2 = V_i - V_2$ (donc : $U = U_1 + U_2$) On aurait ainsi pu écrire.

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{eQ_1}{S\varepsilon_r\epsilon_0} = \frac{Q_1}{C_1} \qquad U_2 = \frac{(d-e)\,Q_1}{S\epsilon_0} = \frac{Q_1}{C_2} \\
Q_1 &= CU \qquad C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} \\
U_2 &= \frac{CU}{C_2} = \frac{C_1}{C_1+C_2}U \\
\left\|\overrightarrow{\mathbf{E}}_{air}\right\| &= \frac{U_2}{d-e} = \frac{C}{C_2}\frac{1}{d-e}U \\
&= \frac{1}{S\epsilon_0}\frac{S\varepsilon_r\epsilon_0}{e\left(1+\varepsilon_r\left(\frac{d}{e}-1\right)\right)}U \\
&= \frac{\varepsilon_r}{e\left(1+\varepsilon_r\left(\frac{d}{e}-1\right)\right)}U
\end{aligned}$$