Examen Final $2^{\text{ème}}$ session :

Électricité et Magnétisme

Alberto Verga, juin, 2006.

Important : Tous les documents, manuscrits ou imprimés, sont interdits. Les calculatrices ainsi que tout autre appareil (téléphone, ordinateur, etc.), sont également interdits. Tout échange avec d'autres étudiants ou déplacement non autorisé entraîne la nullité de l'examen.

P1. (5 points) (a) Calculez, à l'aide du théorème de Gauss, le champ électrique $\boldsymbol{E}$ d'une charge q située à l'origine ; utilisez les coordonnées sphériques (r, θ, φ). (b) Calculez la divergence $\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ et le rotationnel $\nabla \wedge \boldsymbol{E}$. (c) Dessinez les lignes de champ $\boldsymbol{E}$. (d) Comparez les résultats avec les équations de Maxwell pour l'électrostatique et en particulier avec le théorème de Gauss. Que se passe-t-il à l'origine ?

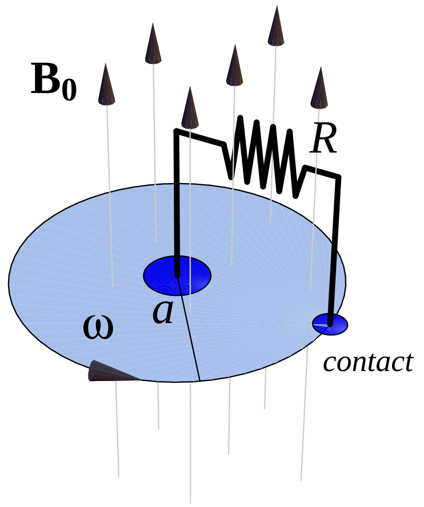
Formules utiles :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}E_\varphi$$

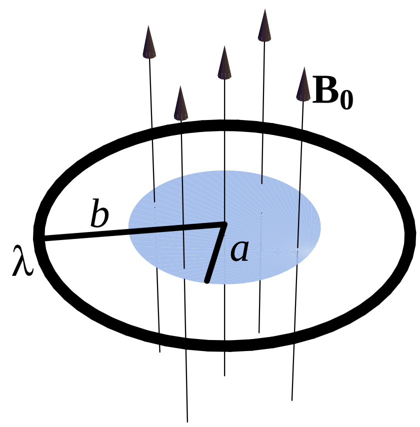
$$\nabla \wedge \boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{r}} & r\,\hat{\boldsymbol{\theta}} & r\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ E_r & rE_\theta & r\sin\theta E_\varphi \end{vmatrix}$$

P2. (3 points) Calculez la capacité d'un conducteur coaxial, formé de deux cylindres concentriques, l'intérieur (de rayon a) portant une charge $+Q$, l'extérieur (de rayon b) une charge $-Q$.

P3. (4 points) (a) Formulez et expliquez le théorème d'Ampère. Utilisez le théorème d'Ampère pour calculer le champ magnétique, dans tout l'espace, (b) d'un fil infini parcouru par un courant I et, (c) d'un solénoïde de longueur L formé par N spires circulaires de rayon a, parcouru par un courant I.



voir **P4**



voir **P5**

P4. (3 points) Un disque métallique de rayon a tourne à une fréquence angulaire constante ω, dans un champ magnétique uniforme dirigé selon la direction z, perpendiculaire au plan du disque (x, y). Un circuit extérieur de résistance R relie le centre et la périphérie du disque. Montrez qu'un courant est induit, et que sa valeur est $I = \omega B_0 a^2/2R$, où B_0 est l'intensité du champ magnétique.

P5. (5 points) Une spire circulaire de rayon b est composée d'un matériau diélectrique chargé uniformément avec une densité linéique de charge λ. Elle est suspendue horizontalement et elle peut tourner librement. La région centrale du cercle inscrit dans la spire, de rayon a (avec $a < b$), est traversée par un champ magnétique uniforme $\boldsymbol{B}_0 = B_0\hat{\boldsymbol{z}}$. On éteint le champ magnétique au temps $t = 0$. (a) Que se passe-t-il ? (b) Calculez le moment de la force $\boldsymbol{T} = \int \boldsymbol{r} \wedge d\boldsymbol{F}$ où $d\boldsymbol{F}$ est la force électrique sur un segment $d\boldsymbol{\ell}$ de la spire. (c) Utilisez la loi de Faraday pour montrer que $\boldsymbol{T}$ est proportionnel à la variation temporelle du flux magnétique $d\Phi/dt$. (d) Montrez que le moment angulaire $\boldsymbol{L}$ gagné par la spire est

$$\boldsymbol{L} = \int \boldsymbol{T} dt = \lambda \pi a^2 b B_0 \hat{\boldsymbol{z}} \,.$$

(e) Si la masse de la spire est m, calculez la fréquence de rotation ω (la vitesse angulaire est $b\omega$).