Examen Final : Électricité et Magnétisme

Alberto Verga, Janvier, 2006.

Important : Tous les documents, manuscrits ou imprimés, sont interdits. Les calculatrices ainsi que tout autre appareil (téléphone, ordinateur, etc.), sont également interdits. Tout échange avec d'autres étudiants ou déplacement non autorisé entraîne la nullité de l'examen.

1. Champ d'une sphère polarisée

On considère une sphère de rayon R uniformément polarisée avec une polarisation volumique $\boldsymbol{P}$ constante dans la direction $\hat{\boldsymbol{z}}$. (*Remarque* : Les parties (a) et (b) du problème sont générales, les parties suivantes (c)-(g) s'appliquent à la sphère.)

(a) (1 point) Le potentiel électrostatique crée par un diélectrique polarisé est :

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}d\mathcal{V}'\,.$$

Montrez que quand $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{P} = \text{const.}$, on peut écrire : $V(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}_0/\rho_0$, où $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ est un champ électrique auxiliaire, crée par une distribution de charge ρ_0 uniforme.

(b) (1 point) Déduisez, en utilisant $\boldsymbol{E} = -\nabla V$, que le champ électrique d'un milieu polarisé uniformément est :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\rho_0}(\boldsymbol{P}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\,.$$

(c) (2 points) Calculez le champ auxiliaire $\boldsymbol{E}_0$, dans le cas où le diélectrique est la sphère polarisée, à l'aide du théorème de Gauss.

(d) (2 points) À partir du résultat (a) calculez le potentiel de la sphère polarisée dans tout l'espace.

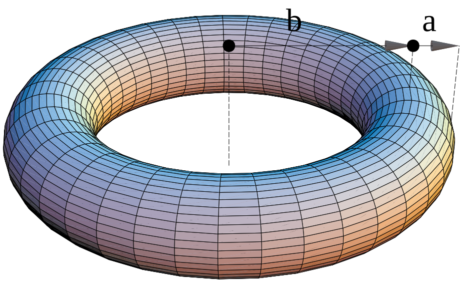
(e) (2 points) À partir du résultat (b) calculez le champ électrique à l'intérieur de la sphère polarisée et montrez qu'il est donné par $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{P}/3\epsilon_0$.

(f) (2 points) Montrez qu'à l'extérieur le champ électrique est celui d'un dipôle ; calculez son moment dipolaire $\boldsymbol{p}$.

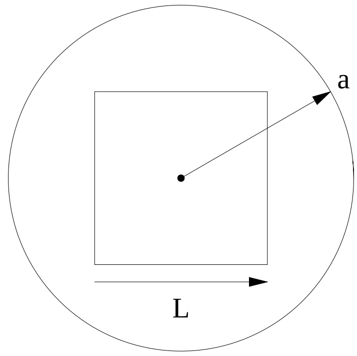
(g) (1 point) Faites un schéma des equipotentielles dans tout l'espace, et montrez la direction de $\boldsymbol{E}$ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

2. Champ magnétique variable et induction

On considère un solénoïde toroïdal de section circulaire de rayon a. Le rayon interne du tore est b. Le solénoïde est parcouru par un courant alternatif $I = I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ sur N spires. Voir la figure.



Solénoïde toroïdal de section circulaire.



Spire à l'intérieur du tore.

(a) (1 point) Montrez que le champ magnétique ne dépend que de r (la distance au centre de symétrie).

(b) (2 points) Calculez le champ magnétique dans tout l'espace. Montrez qu'à l'intérieur du solénoïde il s'écrit :

$$\boldsymbol{B}(r,t) = \frac{\mu_0 N I(t)}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\varphi}}\,.$$

(c) (4 points) On place à l'intérieur du tore une spire carrée de côté L (avec $L < \sqrt{2}a$, et centrée sur le cercle intérieur du tore, comme montré sur la figure). Calculez le flux magnétique Φ traversant la spire et déduisez la force électromotrice $\mathcal{E}_s$ induite sur la spire carrée.

(d) (2 points) La spire possède une résistance R_s, calculer le courant induit I_s par la loi d'Ohm. Faites le graphe du courant $I(t)$ et du courant induit sur la spire I_s en fonction du temps.

Formules utiles

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\,;$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} = A_x\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{B} + A_y\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{B} + A_z\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{B}\,.$$