**Entraînement - PEIP 2**

1. **Questions courtes :**

   (a) Un potentiel électrique dans une certaine région de l'espace s'écrit $V(x, y, z) = -Cx^2yz^3$ où $C$ est une constante. Trouver le champ électrique, $\vec{\boldsymbol{E}}(x, y, z)$, associé.

   **Solution :**

   $$\vec{\boldsymbol{E}}(x,y,z) = -\overrightarrow{\textbf{grad}}V = -\vec{\boldsymbol{u}}_x\frac{\partial V}{\partial x} - \vec{\boldsymbol{u}}_y\frac{\partial V}{\partial y} - \vec{\boldsymbol{u}}_z\frac{\partial V}{\partial z} = 2Cxyz^3\vec{\boldsymbol{u}}_x + Cx^2z^3\vec{\boldsymbol{u}}_y + 3Cx^2yz^2\vec{\boldsymbol{u}}_z \ .$$

   (b) Si les coordonnées $x$ et $y$ ont les dimensions de mètres, quelle doivent être les dimensions S.I. de la constante $C$ dans l'exercice précédent.

   **Solution :**

   $$[C] = \mathrm{V.m}^{-6} \ .$$

   (c) Un champ électrique dans une région de l'espace est de la forme $\vec{\boldsymbol{E}}(x, y, z) = C_xxy\vec{\boldsymbol{u}}_x + C_yxy^2\vec{\boldsymbol{u}}_y + C_zx^2z^2\vec{\boldsymbol{u}}_z$, où $C_x$, $C_y$ et $C_z$, sont des constantes ayant des unités appropriées. Trouver la distribution de charge associée avec ce champ.

   **Solution :**

   $$\begin{aligned}\rho(x,y,z) = \epsilon_0 \,\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{E}} &= \epsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z\right)\\ &= \epsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial x}C_xxy + \frac{\partial}{\partial y}C_yxy^2 + \frac{\partial}{\partial z}C_zx^2z^2\right)\\ &= \epsilon_0\left(C_xy + 2C_yxy + 2C_zx^2z\right) \ .\end{aligned}$$

   (d) Considérer un champ électrique constant, $\vec{\boldsymbol{E}} = E_0\vec{\boldsymbol{u}}_x + 2E_0\vec{\boldsymbol{u}}_y$. Trouver le flux du champ électrique à travers une surface d'aire égale à $\mathcal{S}$ et orientée avec une normale à la surface, $\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\boldsymbol{u}}_x - \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{u}}_y$.

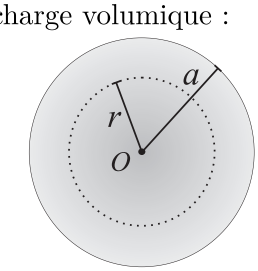
   **Solution :**

   $$\begin{aligned}\Phi_e &= \iint \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \iint \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,d\mathcal{S} = \iint \left(E_0\vec{\boldsymbol{u}}_x + 2E_0\vec{\boldsymbol{u}}_y\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\boldsymbol{u}}_x - \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{u}}_y\right)d\mathcal{S}\\ &= E_0\frac{\sqrt{3}-2}{2}\iint d\mathcal{S} = E_0\frac{\sqrt{3}-2}{2}\mathcal{S} \ .\end{aligned}$$

2. **Champ électrostatique**

   L'intérieur d'une sphère de rayon $a$, contient une distribution de charge volumique :

   $$\rho(r,\theta,\phi) = \begin{cases} \rho_0\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] & r < a \\ 0 & r \geq a \end{cases}$$




   où $\rho_0$ est une constante et $r$ est la coordonnée radiale en coordonnées sphériques $(r, \theta, \phi)$. **Indice :** on se rappelle que l'élément de volume en coordonnées sphériques s'écrit $d\mathcal{V} = r^2dr\sin\theta d\theta d\phi$.

(a) Déterminer la charge contenue dans une sphère de rayon $r < a$.

**Solution :**

$$\begin{aligned}
Q_{\text{int}}(r) &= \iiint \rho(r)\, d\mathcal{V} = 4\pi\rho_0 \int_0^r r^2 \left(1 - \frac{r}{a}\right) dr \\
&= 4\pi\rho_0 \int_0^r r^2 dr - 4\pi\rho_0 \int_0^r r^2 \frac{r^2}{a^2} dr \\
&= \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0 - \frac{4\pi\rho_0}{a^2} \int_0^r r^4 dr = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0 - \frac{4\pi\rho_0}{a^2} \frac{r^5}{5} \\
&= 4\pi\rho_0 r^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right] .
\end{aligned}$$

(b) Déterminer la charge totale de la sphère.

**Solution :**

$$Q_{\text{sphère}} = Q_{\text{int}}(a) = 4\pi\rho_0 a^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = 4\pi\rho_0 a^3 \frac{2}{15} .$$

(c) Quelle est la symétrie du système ? Quelles sont les invariances ?

**Solution :** Le système a une symétrie sphérique et par conséquent invariant par rapport à translations (rotations) en $\theta$ et $\phi$. Le champ électrique est dans la direction radiale partout puisque $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ doit se trouver dans tous les plans de symétrie du système, et ne peut que dépendre de la coordonnée $r$ à cause des invariances, c.-à-d. $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(r, \theta, \phi) = E_r(r)\,\widehat{\boldsymbol{r}}$ .

(d) Déterminer le champ électrostatique en tout point de l'espace (c.-à-d. quand $r < a$ et quand $r > a$) en faisant appel à la Loi de Gauss.

**Solution :**

$$\oiint \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \cdot \widehat{\boldsymbol{n}} dS = \oiint E_r(r)\, \widehat{\boldsymbol{r}} \cdot \widehat{\boldsymbol{r}} dS = E_r(r) \oiint dS = E_r(r)\, 4\pi r^2 .$$

On obtient le champ électrique donc avec le théorème de Gauss :

$$\begin{cases} E_r(r)\, 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}(a)}{\epsilon_0} = \pi\rho_0 a^3 \frac{2}{15} & r > a \\ E_r(r)\, 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\epsilon_0} = 4\pi\rho_0 r^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right] & r < a \end{cases} ,$$

ce qui nous donne pour $E_r(r)$ :

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{Q_{\text{sphère}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 a^3}{\epsilon_0 r^2} \frac{2}{15} & r > a \\ \frac{Q_{\text{int}}(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right] & r < a \end{cases} .$$

Ce n'est pas demandé, mais en coordonnées sphériques, la divergence s'écrit,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{2}{r} E_r + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r} E_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} ,$$

et on peut vérifier que l'équation $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ est vérifiée , d'abord pour $r < a$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \widehat{\boldsymbol{r}} E_r(r) &= \frac{2}{r} E_r(r) + \frac{\partial}{\partial r} E_r(r) \\
&= \frac{2}{r}\frac{\rho_0 r}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\frac{\rho_0 r}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right) = 2\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right) + \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{1}{3} - \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r^3}{5a^2} \\
&= \frac{\rho_0}{\epsilon_0} - 2\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{r^2}{5a^2} - 3\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{r^2}{5a^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \qquad r < a
\end{aligned}$$

et en ensuite pour $r > a$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\hat{\boldsymbol{r}}E_r\left(r\right)\right) &= \frac{2}{r}E_r\left(r\right) + \frac{\partial}{\partial r}E_r\left(r\right) \\
&= \frac{2}{r}\frac{Q_{\text{sphère}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{Q_{\text{sphère}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\
&= 0 \qquad r > a
\end{aligned}$$

(e) Déterminer le potentiel électrostatique, $V(r)$, en tout point de l'espace avec l'état de référence $V(\infty) = 0$.

**Solution :**

$$V\left(r\right) - V(\infty) = \int_r^{\infty} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{\ell}} = \int_r^{\infty} E_r\left(r\right) dr = \frac{\rho_0}{r^2\epsilon_0}\frac{2}{15}a^3 \int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{2}{15}\frac{a^3}{r}\ , \qquad r > a\ .$$

On peut obtenir le potentiel à la surface de la sphère en prenant la limite à $r \to a^+$

$$V\left(a\right) = V\left(r \to a^+\right) = \frac{Q_{\text{int}}\left(a\right)}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{2\rho_0 a^2}{15\epsilon_0}\ .$$

On peut maintenant obtenir le potentiel à l'intérieur de la sphère $(r < a)$

$$\begin{aligned}
V\left(r\right) - V(a) &= \int_r^{a} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{\ell}} = \int_r^{a} \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right) dr \qquad r < a \\
&= \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\int_r^a\left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2}\right)dr = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\int_r^a r dr - \frac{\rho_0}{5\epsilon_0 a^2}\int_r^a r^3 dr \\
&= \frac{\rho_0}{6\epsilon_0}\left(r^2 - a^2\right) - \frac{\rho_0}{20\epsilon_0 a^2}\left(r^4 - a^4\right) = \frac{\rho_0 r^2}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{10a^2}\right) + \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{\rho_0 r^2}{60\epsilon_0 a^2}\left(10a^2 - 3r^2\right) - \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0}\frac{7}{60}\ .
\end{aligned}$$

Le potentiel à l'intérieur de la sphère est donc,

$$\begin{aligned}
V\left(r\right) &= \frac{\rho_0 r^2}{60\epsilon_0 a^2}\left(10a^2 - 3r^2\right) - \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0}\frac{7}{60} + V(a) \\
&= \frac{\rho_0 r^2}{60\epsilon_0 a^2}\left(10a^2 - 3r^2\right) - \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0}\frac{7}{60} + \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{8}{60}a^2 \\
&= \frac{\rho_0 r^2}{60\epsilon_0 a^2}\left(10a^2 - 3r^2\right) + \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{1}{60}a^2 \qquad r < a\ .
\end{aligned}$$

On peut bien vérifier que le potentiel est continu à la surface de la sphère puisque dans la limite à $r \to a^-$ :

$$\begin{aligned}
V\left(a\right) = V\left(r \to a^-\right) &= \frac{\rho_0}{60\epsilon_0}\left(10a^2 - 3a^2\right) + \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{1}{60}a^2 \\
&= \frac{\rho_0 a^2}{60\epsilon_0}7 + \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{1}{60}a^2 = \frac{2}{15}\frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0}\ .
\end{aligned}$$

$$V\left(r\right) = \left\{\begin{array}{ll}
\frac{Q_{\text{sphère}}}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{2}{15}\frac{a^3}{r} & r > a \\[2ex]
\frac{\rho_0 r^2}{60\epsilon_0 a^2}\left(10a^2 - 3r^2\right) + \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{1}{60}a^2 & r < a
\end{array}\right.\ .$$

(f) Calculer le Laplacien du potentiel, $\Delta V$, à tout point de l'espace (c.-à-d. quand $r < a$ et quand $r > a$), sachant qu'en coordonnées sphériques :

$$\Delta f\left(r,\theta,\phi\right) = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\right]$$

**Solution :** Pour un potentiel qui ne dépend que du coordonnée $r$, les dérivées partielles $\frac{\partial V}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial V}{\partial\phi}$ sont nuls. Le Laplacien s'écrit alors (au choix),

$$\Delta V\left(r\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) \quad \text{ou} \quad \Delta V\left(r\right) = \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\ .$$

(g) Est-ce que l'équation de Poisson est vérifiée par le $V(r)$ que vous avez calculé ?

**Solution :** C'est obligé qu'elle soit vérifiée si on n'a pas fait d'erreur de calcul. Dans la région $r < a$ on a :

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{\rho_0}{60a^2\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}r^2\left(10a^2 - 3r^2\right)\\ &= \frac{\rho_0}{15a^2\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(5r^3a^2 - 3r^5\right) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{r^2a^2 - r^4}{r^2a^2}\\ &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\ .\end{aligned}$$

et dans la région $r > a$ on a :

$$\Delta V = \frac{Q_{\text{sphère}}}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} = 0\ .$$

Donc l'équation de Poisson est vérifiée :

$$\Delta V(r) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & r > a \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) & r < a \end{array}\right\} = \frac{\rho\left(r\right)}{\epsilon_0}$$