Exercises d'Electromagnétisme PEIP Polytech Aix-Marseille Université
19 septembre 2022

Formule pour le champ électrique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_i(P_i)$ créé par une charge Q_i et évalué à la position P_i évalué à une position P_j :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_i\left(P_j\right) = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1}\right|^3} . \tag{1}$$

Enoncé du problème :

On considère deux charges : $Q_1 = 200\mu C$ aux coordonnées P_1 (-1,-2,-1)m et $Q_2 = -500\mu C$ aux coordonnées P_2 (3,-2,2)m.

1. Calculer le champ, $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1\left(P_2\right)$, créé par la particule 1 à la position de la particule 2.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1(P_2) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q_1\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1}\right|^3}\\
\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2} &= \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{O}} + \overrightarrow{\boldsymbol{O}\boldsymbol{P}_2} = \overrightarrow{\boldsymbol{O}\boldsymbol{P}_2} - \overrightarrow{\boldsymbol{O}\boldsymbol{P}_1} = (3,-2,2)-(-1,-2,-1) = (4,0,3)\text{m}\\
\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}\right\| &= \sqrt{16+9} = 5\text{m}\\
\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1(P_2) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q_1\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1}\right|^3}\\
&= 9\times10^9\times2\times10^{-4}\frac{(4,0,3)}{5^3} = \frac{18\times10^5}{25}\frac{(4,0,3)}{5}\text{Vm}^{-1}\\
&= 72\times10^3\frac{(4,0,3)}{5}\text{Vm}^{-1}
\end{aligned}$$

   (a) Calculer la force, $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{1\to2}$, sur la particule 2.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{1\to2} &= Q_2\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1(P_2) = -5\times10^{-4}\times72\times10^3\frac{(4,0,3)}{5}\text{N}\\
&= -5\frac{72}{10}\frac{(4,0,3)}{5}\text{N} = -36\frac{(4,0,3)}{5}\text{N}
\end{aligned}$$

2. Calculer le champ, $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_2\left(P_1\right)$, créé par la particule 1 à la position de la particule 2.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_2(P_1) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q_2\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1}\right|^3}\\
\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1} &= \overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{O}} + \overrightarrow{\boldsymbol{O}\boldsymbol{P}_1} = \overrightarrow{\boldsymbol{O}\boldsymbol{P}_1} - \overrightarrow{\boldsymbol{O}\boldsymbol{P}_2} = (-1,-2,-1)-(3,-2,2) = -(4,0,3)\text{m}\\
\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1}\right\| &= \sqrt{16+9} = 5\text{m}\\
\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_2(P_1) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}Q_2\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1}\right|^3} = \frac{9\times10^9\times5\times10^{-4}}{25}\frac{(4,0,3)}{5}\\
&= 18\times10^4\frac{(4,0,3)}{5}\text{Vm}^{-1}
\end{aligned}$$

(a) Calculer la force, $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{2\to 1}$, sur la particule 1. Quelle est sa relation avec $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{1\to 2}$?

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{2\to 1} &= Q_1\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_2(P_1) = 200\times 10^{-6}\times 18\times 10^4\frac{(4,0,3)}{5}\\ &= 36\frac{(4,0,3)}{5} = -\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{1\to 2}\end{aligned}$$

3. Expliquer pourquoi la force, $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{i\to j}$, exercée sur une charge Q_j par une charge Q_i :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{i\to j} = \frac{Q_i Q_k}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_{ij}^2}\widehat{\boldsymbol{r}}_{ij}\ , \tag{2}$$

produit exactement les mêmes résultats que les calculs des deux premières exercices. On voit par inspection des deux formules que :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{i\to j} = Q_j\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_i(P_j) = -Q_i\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_j(P_i) = -\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{j\to i}\ .$$

(a) Ecrire explicitement les expressions pour $\widehat{\boldsymbol{r}}_{ij}$ et r_{ij} de l'éq.(2) en utilisant la notation de l'éq.(1).

$$r_{ij} = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}\right|$$

et

$$\widehat{\boldsymbol{r}}_{ij} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j}\right|} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}_{ij}}}{r_{ij}}\ .$$

4. Donner l'expression pour le champ électrique produit par les deux charges à n'importe quelle position, $M\,(x,y,z)$ de l'espace en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = x\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x + y\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y + z\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_z\ .$$

Solution :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{E}}(M) = \overrightarrow{\boldsymbol{E}}(x,y,z) = \frac{Q_1\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{M}}}{4\pi\epsilon_0\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{M}}\right|^3} + \frac{Q_2\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}}}{4\pi\epsilon_0\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}}\right|^3}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{M}} &= \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} - \overrightarrow{\boldsymbol{OP}_1} = (x,y,z)-(-1,-2,-1) = (x+1,y+2,z+1)\\ \overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}} &= \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} - \overrightarrow{\boldsymbol{OP}_2} = (x,y,z)-(3,-2,2) = (x-3,y+2,z-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{Q_1\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{M}}}{4\pi\epsilon_0\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{M}}\right|^3} &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x+1,y+2,z+1)}{\left[(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2\right]^{3/2}}\\ &= \frac{18\times 10^5(x+1,y+2,z+1)}{\left[(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2\right]^{3/2}}\mathrm{V.m^{-1}}\\ \frac{Q_2\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}}}{4\pi\epsilon_0\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}}\right|^3} &= \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x-3,y+2,z-2)}{\left[(x-3)^2+(y+2)^2+(z-2)^2\right]^{3/2}}\\ &= -\frac{45\times 10^5(x-3,y+2,z-2)}{\left[(x-3)^2+(y+2)^2+(z-2)^2\right]^{3/2}}\mathrm{V.m^{-1}}\ .\end{aligned}$$