

Comme nous l'avons vu dans la discussion en classe du chapitre 3 du cours d'électromagnétisme, Isaac Newton devait démontrer que sa loi de la gravitation universelle, avec une force décroissant comme l'inverse du carré de la distance, permettait de calculer les orbites des planètes en assimilant une planète à symétrie sphérique à une masse ponctuelle située en son centre.

Pour établir ce résultat, il pouvait faire appel au calcul infinitésimal, qu'il venait lui-même de développer. La démonstration historique publiée par Newton est néanmoins beaucoup plus longue et plus élaborée que celle présentée ici, car elle repose sur des arguments géométriques plutôt que sur le calcul intégral.¹ La démonstration présentée ici montre néanmoins que le calcul intégral conduit au même résultat que celui que l'on obtient beaucoup plus simplement à l'aide du théorème de Gauss, établi bien plus tard, en 1813.

Ce résultat est aujourd'hui connu sous le nom de « théorème des coquilles de Newton » (*Newton's shell theorem*). Il affirme notamment que, pour une distribution de masse à symétrie sphérique, le champ gravitationnel extérieur est identique à celui produit par une masse ponctuelle égale à la masse totale de la distribution et placée en son centre.

Théorème de la coquille sphérique de Newton

1. Énoncé

Considérons une coquille sphérique de rayon R , de masse totale M , et de densité superficielle uniforme σ .

Le théorème de la coquille sphérique de Newton affirme que :

- à l'extérieur de la coquille, le champ gravitationnel est exactement celui d'une masse ponctuelle M placée au centre.
- à l'intérieur de la coquille, le champ gravitationnel est nul.

Nous allons démontrer directement ces résultats par intégration, sans utiliser la loi de Gauss. Comme la loi de Coulomb est aussi une loi en inverse carrée, ce même théorème s'applique directement au cas du champ électrostatique créé par une coquille de charge.

De nos jours, on voit peu souvent de telles démonstrations car ce même résultat s'obtient plus simplement en invoquant la symétrie du problème et le théorème de Gauss.

2. Géométrie

Soit O le centre de la sphère et P le point où nous cherchons le champ gravitationnel. On pose :

$$OP = r, \quad r > R. \quad (1)$$

Choisissons l'axe Oz suivant OP , et repérons un point Q de la coquille par son angle polaire θ . La distance entre P et Q est :

$$s = |PQ| = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}. \quad (2)$$

Considérons maintenant une couronne de la sphère comprise entre θ et $\theta + d\theta$. La surface différentielle de surface de cette couronne vaut :

$$dS = (2\pi R \sin \theta)(R d\theta) = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta. \quad (3)$$

Par conséquent sa masse est

$$dm = \sigma dS = 2\pi\sigma R^2 \sin \theta d\theta. \quad (4)$$

3. Contribution de la couronne au champ

Chaque élément de masse de la couronne produit au point P un champ dirigé suivant QP . Par symétrie, les composantes perpendiculaires à l'axe OP se compensent lorsqu'on additionne les contributions de toute la couronne. Il ne reste donc que la composante suivant OP .

L'angle entre PQ et PO donne :

$$\cos \alpha = \frac{r - R \cos \theta}{s}. \quad (5)$$

La contribution de la couronne au champ, dirigée vers le centre, est donc :

$$dg = \frac{G dm}{s^2} \cos \alpha. \quad (6)$$

1. Certains historiens des sciences estiment que Newton a volontairement choisi de présenter une démonstration géométrique, plus accessible à ses contemporains peu familiers du calcul infinitésimal, qu'il venait tout juste de développer et que très peu de savants maîtrisaient encore à l'époque.

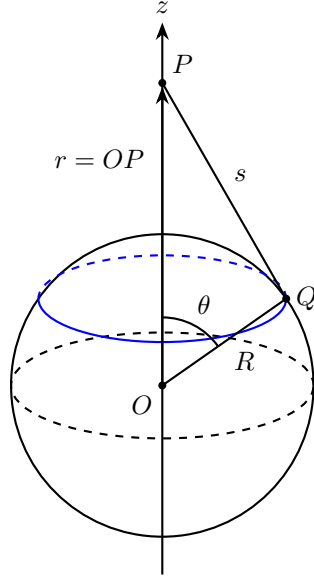


FIGURE 1 – Géométrie pour le calcul du champ gravitationnel créé par une coquille sphérique : point P à l'extérieur, et anneau de masse à l'angle θ .

En substituant dm , s et $\cos \alpha$, des eqs.(4), (2) et (5) on obtient :

$$dg = 2\pi G\sigma R^2 \frac{(r - R \cos \theta) \sin \theta}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{3/2}} d\theta . \quad (7)$$

Il faut donc calculer :

$$g(r) = 2\pi G\sigma R^2 \int_0^\pi \frac{(r - R \cos \theta) \sin \theta}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{3/2}} d\theta . \quad (8)$$

4. Calcul de l'intégrale. Posons le changement de variable :

$$u := r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta . \quad (9)$$

Alors

$$du = 2rR \sin \theta d\theta , \quad (10)$$

et du coup :

$$\sin \theta d\theta = \frac{du}{2rR} . \quad (11)$$

D'autre part,

$$u = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta , \quad (12)$$

donne

$$2rR \cos \theta = r^2 + R^2 - u , \quad (13)$$

d'où

$$r - R \cos \theta = r - \frac{r^2 + R^2 - u}{2r} = \frac{r^2 - R^2 + u}{2r} . \quad (14)$$

Ainsi,

$$(r - R \cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{r^2 - R^2 + u}{4r^2 R} du . \quad (15)$$

Les bornes de l'intégrale deviennent :

$$\theta = 0 \implies u = (r - R)^2 , \quad (16)$$

et

$$\theta = \pi \implies u = (r + R)^2 . \quad (17)$$

On obtient donc

$$g(r) = \frac{\pi G \sigma R}{2r^2} \int_{(r-R)^2}^{(r+R)^2} \frac{r^2 - R^2 + u}{u^{3/2}} du . \quad (18)$$

On sépare maintenant les deux termes :

$$g(r) = \frac{\pi G \sigma R}{2r^2} \int_{(r-R)^2}^{(r+R)^2} \left[(r^2 - R^2) u^{-3/2} + u^{-1/2} \right] du . \quad (19)$$

Or

$$\int u^{-3/2} du = -2u^{-1/2} , \quad \int u^{-1/2} du = 2u^{1/2} . \quad (20)$$

Ainsi

$$g(r) = \frac{\pi G \sigma R}{r^2} \left[-(r^2 - R^2) u^{-1/2} + u^{1/2} \right]_{(r-R)^2}^{(r+R)^2} . \quad (21)$$

5. Évaluation aux deux bornes

Puisque $r > R$,

$$\sqrt{(r + R)^2} = r + R , \quad (22)$$

et

$$\sqrt{(r - R)^2} = r - R . \quad (23)$$

À la borne supérieure, nous avons

$$-\frac{r^2 - R^2}{r + R} + (r + R) . \quad (24)$$

Comme

$$r^2 - R^2 = (r - R)(r + R) , \quad (25)$$

cela donne

$$-(r - R) + (r + R) = 2R . \quad (26)$$

À la borne inférieure,

$$-\frac{r^2 - R^2}{r - R} + (r - R) , \quad (27)$$

donne

$$-(r + R) + (r - R) = -2R . \quad (28)$$

La différence entre les deux valeurs est donc :

$$2R - (-2R) = 4R . \quad (29)$$

Par conséquent,

$$g(r) = \frac{\pi G \sigma R}{r^2} (4R) , \quad (30)$$

soit

$$g(r) = \frac{4\pi G \sigma R^2}{r^2} . \quad (31)$$

Mais la masse totale de la coquille est :

$$M = 4\pi R^2 \sigma . \quad (32)$$

Nous obtenons finalement

$$\boxed{g(r) = \frac{GM}{r^2}} . \quad (33)$$

Le champ est dirigé vers le centre, donc sous forme vectorielle,

$$\boxed{\mathbf{g}(P) = \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}} . \quad (34)$$

La coquille sphérique produit donc, à l'extérieur, exactement le même champ qu'une masse ponctuelle M placée en son centre.

6. Corps sphérique de densité quelconque

Le résultat s'étend immédiatement à tout corps ayant une symétrie sphérique, même si sa densité n'est pas uniforme. Considérons le corps comme une succession de coquilles sphériques infinitésimales de rayon R' . Une coquille de rayon R' et d'épaisseur dR' possède la masse :

$$dM = 4\pi R'^2 \rho(R') dR' . \quad (35)$$

Si le point P est situé à l'extérieur du corps, chaque coquille produit en P le champ :

$$d\mathbf{g} = -\frac{G dM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} . \quad (36)$$

En sommant toutes les coquilles,

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{G}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \int_0^{R_{\max}} dM . \quad (37)$$

Or

$$\int_0^{R_{\max}} dM = M . \quad (38)$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}} . \quad (39)$$

Tout corps à symétrie sphérique produit donc, à l'extérieur du corps, le même champ gravitationnel qu'une masse ponctuelle égale à sa masse totale et placée en son centre.

Cette démonstration ci-dessus était effectuée dans le cadre de gravité, mais comme la loi de Coulomb est aussi une loi en inverse carrée de la distance, il suffit de remplacer, $-G \rightarrow K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, et $M \rightarrow Q$, et on trouve pour le champ électrostatique d'un objet de symétrie sphérique :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} . \quad (40)$$

dans la région $r > R$.

7. Méthode par théorème de Gauss.

La symétrie sphérique d'une coquille homogène impose que $\mathbf{g} = g(r)\hat{\mathbf{r}}$. La loi de Gauss permet en effet d'obtenir immédiatement :

$$\oiint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi G M_{\text{int}} , \quad (41)$$

où M_{int} est la masse à l'intérieur de la surface fermée. Donc pour une surface sphérique de rayon $r > R$, $M_{\text{int}} = M$ i.e. la masse totale de l'objet sphérique, et le théorème de Gauss nous donne :

$$g(r) 4\pi r^2 = -4\pi G M , \quad (42)$$

d'où

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} . \quad (43)$$

8. Champ gravitationnel à l'intérieur de la coquille.

Considérons maintenant un point P situé «à l'intérieur »de la coquille :

$$r < R. \quad (44)$$

Nous pouvons reprendre exactement le même calcul que précédemment. La contribution d'une couronne située à l'angle θ est :

$$dg = 2\pi G\sigma R^2 \frac{(r - R \cos \theta) \sin \theta}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{3/2}} d\theta. \quad (45)$$

Il faut donc calculer

$$g(r) = 2\pi G\sigma R^2 \int_0^\pi \frac{(r - R \cos \theta) \sin \theta}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{3/2}} d\theta. \quad (46)$$

Comme précédemment, posons

$$u = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta. \quad (47)$$

On a alors

$$du = 2rR \sin \theta d\theta \quad (48)$$

et

$$r - R \cos \theta = \frac{r^2 - R^2 + u}{2r}. \quad (49)$$

Ainsi,

$$(r - R \cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{r^2 - R^2 + u}{4r^2 R} du. \quad (50)$$

Les bornes sont toujours

$$\theta = 0 \implies u = (R - r)^2, \quad (51)$$

et

$$\theta = \pi \implies u = (R + r)^2. \quad (52)$$

Nous avons donc :

$$g(r) = \frac{\pi G\sigma R}{2r^2} \int_{(R-r)^2}^{(R+r)^2} \frac{r^2 - R^2 + u}{u^{3/2}} du. \quad (53)$$

Après intégration,

$$g(r) = \frac{\pi G\sigma R}{r^2} \left[-(r^2 - R^2)u^{-1/2} + u^{1/2} \right]_{(R-r)^2}^{(R+r)^2}. \quad (54)$$

C'est maintenant que la condition $r < R$ joue un rôle essentiel. En effet,

$$\sqrt{(R+r)^2} = R + r, \quad (55)$$

et

$$\sqrt{(R-r)^2} = R - r. \quad (56)$$

À la borne supérieure, on obtient

$$-\frac{r^2 - R^2}{R + r} + (R + r). \quad (57)$$

mais en se rappelant que :

$$r^2 - R^2 = -(R - r)(R + r) , \quad (58)$$

on a :

$$-\frac{r^2 - R^2}{R + r} = R - r . \quad (59)$$

Ainsi la valeur à la borne supérieure est

$$(R - r) + (R + r) = 2R . \quad (60)$$

À la borne inférieure :

$$-\frac{r^2 - R^2}{R - r} + (R - r) \quad (61)$$

on obtient :

$$(R + r) + (R - r) = 2R . \quad (62)$$

Les deux valeurs des limites sont donc « identiques ». Leur différence est par conséquent nulle :

$$\left[-(r^2 - R^2)u^{-1/2} + u^{1/2} \right]_{(R-r)^2}^{(R+r)^2} = 0 . \quad (63)$$

Il s'ensuit que

$$g(r) = 0, \quad r < R , \quad (64)$$

Le champ gravitationnel à l'intérieur d'une coquille sphérique uniforme est donc nul.

Sous forme vectorielle,

$$\boxed{\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad r < R.} \quad (65)$$

9. Interprétation

Ce dernier résultat peut sembler surprenant. Le point P est attiré par « toute la masse de la coquille », mais les masses situées dans les différentes directions ne se compensent pas simplement deux à deux.

En effet, la partie de la coquille la plus proche de P exerce une force plus intense, puisque la distance est plus petite. Mais la masse contenue dans un angle solide donné diminue aussi en s'approchant de la coquille. À l'inverse, les régions plus éloignées contiennent davantage de masse dans le même angle solide. Pour une loi en $1/r^2$, ces deux effets se compensent exactement.

C'est précisément cette compensation qui conduit au résultat remarquable :

$$\mathbf{g} = 0 \quad (66)$$

partout à l'intérieur de la coquille.

Ainsi, le théorème complet de Newton est :

$$\boxed{\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{0} , & r < R \\ -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, & r > R \end{cases} .} \quad (67)$$

Pour $r = R$, le champ présente naturellement le saut correspondant à la masse surfacique de la coquille.