Chapter 1

Systèmes de coordonnées

1.1 Repère cartésien

Un repère cartésien est défini par un point origine O et trois axes (Ox, Oy, Oz) perpendiculaires entre eux. Les vecteurs unitaires portés par les axes sont: $\widehat{\mathbf{e}}_x, \widehat{\mathbf{e}}_y, \widehat{\mathbf{e}}_z$. (voir figure 1.1a))

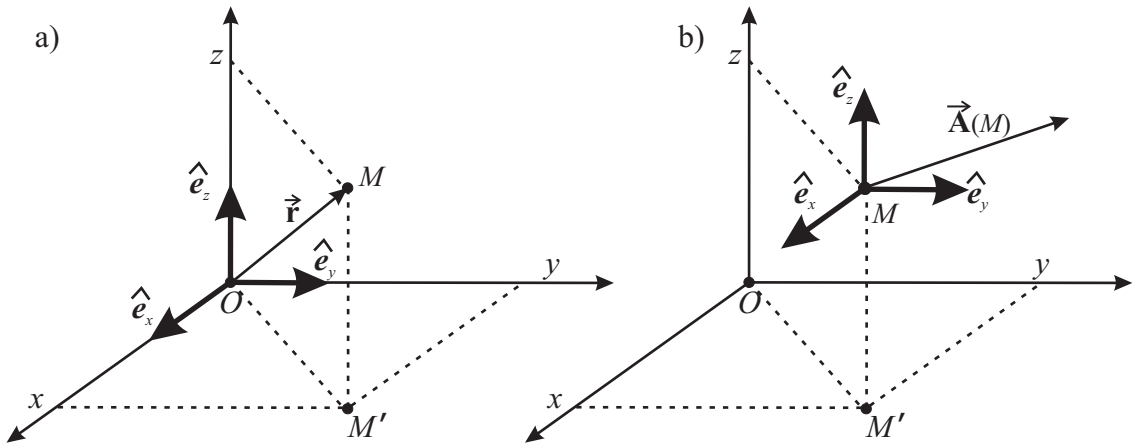

Figure 1.1:

On doit bien noter la disposition relative des directions (Ox, Oy, Oz). Telles qu'elles sont placées, elles définissent un trièdre direct. Dans un tel trièdre, un bonhomme transpercé des pieds à la tête par Oy, regardant la direction Oz, a la direction Ox à sa gauche. On peut noter aussi que Ox, Oy, et Oz sont respectivement orientés selon les directions du pouce, de l'index et du majeur de la main droite. Un point M de l'espace est repéré par les trois composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ joignant O à M ($\overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{OM}}$) (voir fig. 1.1a) :

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(x, y, z) = x\widehat{\mathbf{e}}_x + y\widehat{\mathbf{e}}_y + z\widehat{\mathbf{e}}_z$$

M' est la projection de M dans le plan $(x0y)$. Les composantes x et y de $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ sont les coordonnées du point M' dans ce plan. La composante z est obtenue en traçant la parallèle à OM' passant par M. On dira indistinctement qu'un objet se trouve au point M ou en $\overrightarrow{\mathbf{r}}$.

1.1.1 Repérage d'un vecteur en coordonnées cylindriques

Quand il s'agit de repérer un vecteur $\overrightarrow{\mathbf{A}}\,(M)$ dont le point d'application est situé au point $M(x, y, z)$, ou $\overrightarrow{\mathbf{r}}(x, y, z)$, on peut décrire ce vecteur avec le même base de vecteurs unitaires $\widehat{\mathbf{e}}_x, \widehat{\mathbf{e}}_y, \widehat{\mathbf{e}}_z$ (voir fig.1.1b)). Nous appelons donc $\widehat{\mathbf{e}}_x, \widehat{\mathbf{e}}_y, \widehat{\mathbf{e}}_z$, un répère orthonormé **global** parce qu'on peut l'utiliser à décrire un vecteur ayant n'importe lequel point d'application.

1.2 Coordonnées cylindriques

1.2.1 Repérage d'un point en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, un point M de l'espace est repéré comme un point de cylindre (droit, à base circulaire) dont l'axe Oz est généralement confondu avec l'axe Oz du repère cartésien.

Le point M (ou $\overrightarrow{\mathbf{r}}$) est repéré par

- le rayon ρ du cylindre sur lequel il s'appuie
- z sa cote par rapport au plan de référence xOy
- ϕ l'angle (Ox, OM') où M' est la projection de M sur le plan xOy.

La notation $\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \phi, z)$ vient se substituer à $\overrightarrow{\mathbf{r}}(x, y, z)$ du repère cartésien. Vous pouvez facilement vérifier que, pour un point donné, les composantes cartésiennes et cylindriques sont liées par :

$$x = \rho\cos\phi \qquad y = \rho\sin\phi \qquad z = z$$

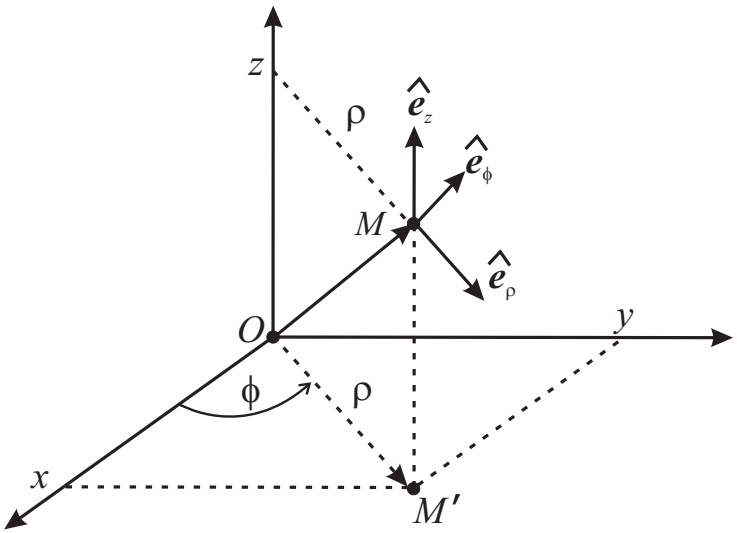

Figure 1.2:

1.2.2 Repérage d'un vecteur en coordonnées cylindriques

Nous nous posons la question de repérer un vecteur dont le point d'application est situé au point $M(\rho, \phi, z)$, ou $\overrightarrow{\mathbf{r}}(\rho, \phi, z)$. Pour cela nous attachons à M un repère orthonormé local $(\widehat{\mathbf{e}}_\rho, \widehat{\mathbf{e}}_\phi, \widehat{\mathbf{e}}_z)$. Nous l'appelons **local** parce qu'il n'est pas le même pour tous les points M de l'espace. Ce repère local est fait de 3 vecteurs unitaires de base orthogonaux $(\widehat{\mathbf{e}}_\rho, \widehat{\mathbf{e}}_\phi, \widehat{\mathbf{e}}_z)$:

- $\widehat{\mathbf{e}}_\rho$ (ou $\widehat{\mathbf{u}}_\rho$ ou $\widehat{\rho}$) est un vecteur parallèle à $\overrightarrow{\mathbf{OM'}}$.
- $\widehat{\mathbf{e}}_\phi$ (ou $\widehat{\mathbf{u}}_\phi$ ou $\widehat{\phi}$) est parallèle au vecteur tangent en M' au cercle de rayon OM' contenu dans le plan xOy
- $\widehat{\mathbf{e}}_z$ (ou $\widehat{\mathbf{u}}_z$ ou $\widehat{\mathbf{z}}$) est parallèle à l'axe Oz

Dans ce repère, le vecteur champ électrique a 3 composantes et s'écrit

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(M) = E_\rho\widehat{\mathbf{e}}_\rho + E_\phi\widehat{\mathbf{e}}_\phi + E_z\widehat{\mathbf{e}}_z \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{\mathbf{E}}(M) = \begin{pmatrix} E_\rho \\ E_\phi \\ E_z \end{pmatrix}$$

Au point M, la relation entre les vecteurs unitaires $(\widehat{\mathbf{e}}_\rho, \widehat{\mathbf{e}}_\phi, \widehat{\mathbf{e}}_z)$ et les vecteurs unitaires cartésiennes $(\widehat{\mathbf{e}}_x, \widehat{\mathbf{e}}_y, \widehat{\mathbf{e}}_z)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{e}}_\rho &= \cos\phi\,\widehat{\mathbf{e}}_x + \sin\phi\,\widehat{\mathbf{e}}_y \\
\widehat{\mathbf{e}}_\phi &= -\sin\phi\,\widehat{\mathbf{e}}_x + \cos\phi\,\widehat{\mathbf{e}}_y \\
\widehat{\mathbf{e}}_z &= \widehat{\mathbf{e}}_z
\end{aligned} \tag{1.1}$$

On peut voir cette relation comme une relation matricielle (tensorielle)

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_\rho \\ \widehat{\mathbf{e}}_\phi \\ \widehat{\mathbf{e}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_x \\ \widehat{\mathbf{e}}_y \\ \widehat{\mathbf{e}}_z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_x \\ \widehat{\mathbf{e}}_y \\ \widehat{\mathbf{e}}_z \end{pmatrix}$$

Les relation inverses sont obtenues en prenant l'inverse de la matrice$T$. Puisque les deux bases sont orthonormées, on a $T^{-1} = T^t$ où T^t est la transpose de la matrice T. On obtient de cette manière les vecteurs unitaires $(\widehat{\mathbf{e}}_x, \widehat{\mathbf{e}}_y, \widehat{\mathbf{e}}_z)$ en fonction des $(\widehat{\mathbf{e}}_\rho, \widehat{\mathbf{e}}_\phi, \widehat{\mathbf{e}}_z)$:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_x \\ \widehat{\mathbf{e}}_y \\ \widehat{\mathbf{e}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_\rho \\ \widehat{\mathbf{e}}_\phi \\ \widehat{\mathbf{e}}_z \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire.

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{e}}_x &= \cos\phi\,\widehat{\mathbf{e}}_\rho - \sin\phi\,\widehat{\mathbf{e}}_\phi \\
\widehat{\mathbf{e}}_y &= \sin\phi\,\widehat{\mathbf{e}}_\rho + \cos\phi\,\widehat{\mathbf{e}}_\phi \\
\widehat{\mathbf{e}}_z &= \widehat{\mathbf{e}}_z
\end{aligned}$$

On peut également vérifier ces relations avec de la géométrie.

1.2.3 Position et déplacement (différentielle) en coordonnées cylindriques

On se rappelle qu'en coordonnées cartésiennes, le vecteur position s'écrit

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = x\widehat{\mathbf{e}}_x + y\widehat{\mathbf{e}}_y + z\widehat{\mathbf{e}}_z$$

et la différentielle de cette position s'écrit

$$d\overrightarrow{\mathbf{OM}} \equiv \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial x}dx + \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial y}dy + \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial z}dz = \widehat{\mathbf{e}}_x\,dx + \widehat{\mathbf{e}}_y\,dy + \widehat{\mathbf{e}}_z\,dz$$

En coordonnées cylindriques par contre, on écrit

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \rho\widehat{\mathbf{e}}_\rho + z\widehat{\mathbf{e}}_z$$

et la différentielle s'exprime :

$$d\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial\phi}d\phi + \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial z}dz$$

Si l'on veut exprimer $d\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ en coordonnées cylindriques, il faut tenir compte du fait que le vecteur unitaire local $\widehat{\mathbf{e}}_\rho$ dépend de la coordonnée ϕ (voir eq.(1.1)) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial\rho} &= \widehat{\mathbf{e}}_\rho + \rho\frac{\partial\widehat{\mathbf{e}}_\rho}{\partial\rho} = \widehat{\mathbf{e}}_\rho \\
\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial\phi} &= \rho\frac{\partial\widehat{\mathbf{e}}_\rho}{\partial\phi} = \rho\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\widehat{\mathbf{e}}_x + \sin\phi\widehat{\mathbf{e}}_y\right) = \rho\left(-\sin\phi\widehat{\mathbf{e}}_x + \cos\phi\widehat{\mathbf{e}}_y\right) = \rho\widehat{\mathbf{e}}_\phi
\end{aligned}$$

Un déplacement en coordonnées cylindriques s'exprime donc

$$\boxed{d\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \widehat{\mathbf{e}}_\rho d\rho + \widehat{\mathbf{e}}_\phi\rho d\phi + \widehat{\mathbf{e}}_z dz} \tag{1.2}$$

Cette formule est très utile afin d'en déduire des volumes et des surfaces élémentaires. Par exemple, un élément de volume élémentaire en coordonnées cylindriques s'exprime

$$\boxed{d\mathcal{V} = (d\rho)\,(\rho d\phi)\,(dz) = \rho d\rho d\phi dz} \tag{1.3}$$

Exemple : On peut utiliser ce résultat à dériver la formule pour un cylindre de rayon R et de cote L :

$$\begin{aligned}\underset{\text{cylindre } R,L}{\text{Volume}} &= \iiint_{\text{cylindre}} d\mathcal{V} = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\phi \int_0^L dz = L\int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi L \int_0^R \rho d\rho = \pi R^2 L\end{aligned}$$

1.2.4 Gradient en coordonnées cylindriques

La différentielle en coordonnées cylindriques d'un champ scalaire Φ s'exprime :

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \tag{1.4}$$

Le gradient en coordonnées cylindriques est définie telle que :

$$d\Phi = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\Phi \cdot d\overrightarrow{\mathbf{OM}} \tag{1.5}$$

Une comparaison entre (1.2), (1.4) et (1.5) montre que l'expression du gradient en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\widehat{\mathbf{e}}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\widehat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\widehat{\mathbf{e}}_z} \tag{1.6}$$

Exemple : Lorsque le potentiel électrique $V(M)$ est exprimé en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z), les composantes du champ électrique dans le repère cylindrique attaché au point M sont données par:

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}\,(\rho,\phi,z) = -\overrightarrow{\mathbf{grad}} V(\rho,\phi,z)$$

$$\overrightarrow{\mathbf{E}} = E_\rho \widehat{\mathbf{e}}_\rho + E_\phi \widehat{\mathbf{e}}_\phi + E_z \widehat{\mathbf{e}}_z \qquad \begin{array}{l} E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \\ E_\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{array}$$

Le potentiel créé par une distribution linéique de charge avec une densité par unité de longueur λ est donné par $V(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(\rho) + Cte$. On obtient immédiatement le champ électrique par

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}\,(\rho) = -\overrightarrow{\mathbf{grad}} V(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho}\widehat{\mathbf{e}}_\rho$$

1.3 Coordonnées sphériques

1.3.1 Repérage d'un point en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, un point $M(r)$ est considéré comme un point d'une sphère centrée sur O. Le point M est repéré

- par le rayon r de la sphère à laquelle il appartient
- L'angle θ entre la direction $\overrightarrow{\mathbf{Oz}}$ et la direction $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$. $\theta = (\overrightarrow{\mathbf{Oz}}, \overrightarrow{\mathbf{OM}})$
- l'angle ϕ entre la direction $\overrightarrow{\mathbf{Ox}}$ et la direction $\overrightarrow{\mathbf{OM'}}$ où M' est la projection de M dans le plan xOy.: $\phi = (\overrightarrow{\mathbf{Ox}}, \overrightarrow{\mathbf{OM'}})$

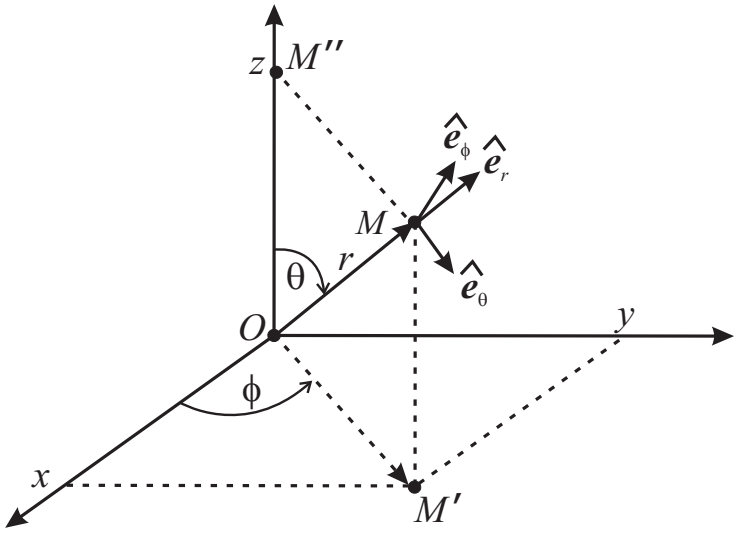

Figure 1.3: *Coordonnées sphériques*

Un point $M(\mathbf{r})$ étant donné, on trouve que ses coordonnées cartésiennes s'écrivent en fonction des coordonnées sphériques; ainsi:

$$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad y = r\sin\theta\sin\phi \qquad z = r\cos\theta$$

En géographie, où on est amené à repérer un point sur la sphère terrestre, l'angle θ indiquerait la latitude par rapport au pôle nord et l'angle ϕ, la longitude est par rapport au méridien de référence.

1.3.2 Repérage d'un vecteur en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, un vecteur $\overrightarrow{\mathbf{E}}(M)$ (ou simplement $\overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{\mathbf{r}})$) attaché au point $M(\mathbf{r})$ est repéré par trois composantes (E_r, E_θ, E_ϕ) dans un repère orthonormé **local** $(\widehat{\mathbf{e}}_r, \widehat{\mathbf{e}}_\theta, \widehat{\mathbf{e}}_\phi)$:

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(M) = E_r\widehat{\mathbf{e}}_r + E_\theta\widehat{\mathbf{e}}_\theta + E_\phi\widehat{\mathbf{e}}_\phi$$

avec

- $\widehat{\mathbf{e}}_r$ (ou $\widehat{\mathbf{u}}_r$ ou $\widehat{\mathbf{r}}$) est un vecteur parallèle à $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$.
- $\widehat{\mathbf{e}}_\theta$ (ou $\widehat{\mathbf{u}}_\theta$ ou $\widehat{\theta}$) est parallèle au vecteur tangent en M au cercle de rayon r décrit dans le plan qui contient à la fois les directions $\overrightarrow{\mathbf{Oz}}$, $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ et $\mathbf{OM}'$.
- $\widehat{\mathbf{e}}_\phi$ (ou $\widehat{\mathbf{u}}_\phi$ ou $\widehat{\phi}$) est tangent en M au cercle de centre M'' et de rayon $M''M = OM'$, contenu dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathbf{Oz}}$.

  Au point M, la relation entre les vecteurs unitaires $(\widehat{\mathbf{e}}_r, \widehat{\mathbf{e}}_\theta, \widehat{\mathbf{e}}_\phi)$ et les vecteurs unitaires cartésiennes $(\widehat{\mathbf{e}}_x, \widehat{\mathbf{e}}_y, \widehat{\mathbf{e}}_z)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{e}}_r &= \sin\theta\cos\phi\,\widehat{\mathbf{e}}_x + \sin\theta\sin\phi\,\widehat{\mathbf{e}}_y + \cos\theta\,\widehat{\mathbf{e}}_z \\
\widehat{\mathbf{e}}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\,\widehat{\mathbf{e}}_x + \cos\theta\sin\phi\,\widehat{\mathbf{e}}_y - \sin\theta\,\widehat{\mathbf{e}}_z \\
\widehat{\mathbf{e}}_\phi &= -\sin\phi\,\widehat{\mathbf{e}}_x + \cos\phi\,\widehat{\mathbf{e}}_y
\end{aligned} \tag{1.7}$$

  On peut voir cette relation comme une relation matricielle (tensorielle)

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_r \\ \widehat{\mathbf{e}}_\theta \\ \widehat{\mathbf{e}}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_x \\ \widehat{\mathbf{e}}_y \\ \widehat{\mathbf{e}}_z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_x \\ \widehat{\mathbf{e}}_y \\ \widehat{\mathbf{e}}_z \end{pmatrix}$$

ainsi que les relation inverses

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_x \\ \widehat{\mathbf{e}}_y \\ \widehat{\mathbf{e}}_z \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_r \\ \widehat{\mathbf{e}}_\theta \\ \widehat{\mathbf{e}}_\phi \end{pmatrix} = T^t \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_r \\ \widehat{\mathbf{e}}_\theta \\ \widehat{\mathbf{e}}_\phi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_r \\ \widehat{\mathbf{e}}_\theta \\ \widehat{\mathbf{e}}_\phi \end{pmatrix}$$

où nous avons encore utilisé le fait que les deux bases sont orthonomés donne implique $T^{-1} = T^t$.

Exemple de coordonnées sphériques : Considérons le potentiel et le champ électriques créés par une charge ponctuelle q placée à l'origine O. En coordonnées sphériques, ceux-ci s'expriment entièrement en fonction du vecteur radial $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ et du coordonnée radial $r = \left\| \overrightarrow{\mathbf{r}} \right\|$:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \qquad \overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\widehat{\mathbf{e}}_r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{\mathbf{r}}}{r^3}$$

ce qui est plus simple et "naturel" que les expressions en coordonnées cartésiennes :

$$V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \overrightarrow{\mathbf{E}}(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\widehat{\mathbf{e}}_x + y\widehat{\mathbf{e}}_y + z\widehat{\mathbf{e}}_z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

1.3.3 Position et déplacement (différentielle) en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, le vecteur position s'écrit simplement

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = r\widehat{\mathbf{e}}_r$$

La différentielle, $d\overrightarrow{\mathbf{OM}}$, en coordonnées sphériques s'éxprime:

$$d\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial r}dr + \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial\phi}d\phi$$

Afin d'exprimer $d\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ en coordonnées sphériques, il faut tenir compte du fait que le vecteur unitaire local $\widehat{\mathbf{e}}_r$ dépend des coordonnées θ, et ϕ (mais pas sur r) :

$$\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial r} = \widehat{\mathbf{e}}_r + r\frac{\partial\widehat{\mathbf{e}}_r}{\partial r} = \widehat{\mathbf{e}}_r$$
$$\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial\theta} = r\frac{\partial\widehat{\mathbf{e}}_r}{\partial\theta} = r\widehat{\mathbf{e}}_\theta$$
$$\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\partial\phi} = r\frac{\partial\widehat{\mathbf{e}}_r}{\partial\phi} = r\sin\theta\widehat{\mathbf{e}}_\phi$$

Un déplacement en coordonnées sphériques s'exprime donc

$$\boxed{d\overrightarrow{\mathbf{OM}} = dr\,\widehat{\mathbf{e}}_r + rd\theta\,\widehat{\mathbf{e}}_\theta + r\sin\theta d\phi\,\widehat{\mathbf{e}}_\phi} \tag{1.8}$$

Cette formule est très utile afin d'en déduire des volumes et des surfaces élémentaires. Par exemple, un élément de volume élémentaire en coordonnées cylindriques est

$$\boxed{d\mathcal{V} = (dr)\,(rd\theta)\,(r\sin\theta d\phi) = r^2 dr\sin\theta d\theta d\phi} \tag{1.9}$$

Exemple : On peut utliser ce résultat à dériver la formule pour le volume d'une sphère de rayon R :

$$\underset{\text{sphère de rayon } R}{\text{Volume}} = \iiint_{\text{sphère}} d\mathcal{V} = \int_0^R dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta d\phi = \int_0^R r^2 dr\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\phi$$
$$= 2\pi\int_0^R r^2 dr\int_{-1}^1 d(\cos\theta) = 4\pi\int_0^R r^2 dr = \frac{4\pi}{3}R^3$$

1.3.4 Gradient en coordonnées sphériques

La différentielle en coordonnées sphériques s'écrit :

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} d\phi \equiv \overrightarrow{\mathbf{grad}}\, \Phi \cdot d\overrightarrow{\mathbf{OM}} \tag{1.10}$$

Une comparaison entre cette équation et l'éq.(1.8) montre que l'expression du gradient en coordonnées sphériques est donnée par :

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, \Phi = \widehat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \widehat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \widehat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \tag{1.11}$$

Exemple : Pour une charge ponctuelle située à l'origine par exemple, si on se rappelle que son potentiel électrique, s'écrit $V(r) = q/(4\pi\epsilon_0 r)$, on obtient toute suite son champ électrique en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{E}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}) &= -\overrightarrow{\mathbf{grad}} V(r) = -\widehat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \widehat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\widehat{\mathbf{e}}_r}{r^2} \end{aligned}$$

alors que le calcul est plus onéreux en coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{E}}(x,y,z) &= -\overrightarrow{\mathbf{grad}} V(x,y,z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\widehat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \widehat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \widehat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \widehat{\mathbf{e}}_x + \frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \widehat{\mathbf{e}}_y + \frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \widehat{\mathbf{e}}_z \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\widehat{\mathbf{e}}_x + y\widehat{\mathbf{e}}_y + z\widehat{\mathbf{e}}_z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \end{aligned}$$