TD N°7 : Equations différentielles ordinaires aux conditions initialles :

1. **Mouvement d'un point solide dans un champ de pesanteur :**
On cherche à résoudre numériquement le problème du mouvement d'un point solide de masse m à la position $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}(t) = x\widehat{\boldsymbol{x}} + y\widehat{\boldsymbol{y}} + z\widehat{\boldsymbol{z}}$ ayant une vitesse $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{x}}}{dt}$ dans un champ de pesanteur $\overrightarrow{\boldsymbol{g}}$ et en présence de frottement avec le milieu. L'équation du mouvement du point est :
$$m\frac{d^2\overrightarrow{\boldsymbol{x}}}{dt^2} = m\overrightarrow{\boldsymbol{g}} - \gamma\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{x}}}{dt} \tag{1}$$
ce qui se réduit à un système d'équations découplées :
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dz}{dt} = -g \end{array} \right. \tag{2}$$
avec comme conditions intialles $x_0 = x(t_0)$, $v_{x,0} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}$, $z_0 = z(t_0)$, $v_{z,0} = \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}$.
   (a) Transformer les équations de mouvement de l'éq.(2) en un problème de Cauchy, i.e. $\frac{d}{dt}u(t) = f(u(t), t)$, avec les substitutions :
$$u_1(t) \equiv x(t) \qquad u_2(t) \equiv v_x(t) \qquad u_3(t) \equiv z(t) \qquad u_4(t) = v_z(t) \tag{3}$$
   Ecrire sur papier $\frac{d}{dt}u(t) = f(u(t), t)$ sous forme matricielle.

   (b) Ecrire une fonction Octave 'fprojectile(u,t)' avec comme arguments, un temps t et un vecteur ligne ou colonne $(u_1(t), \ldots, u_4(t))$ et qui retourne un vecteur colonne
$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \tag{4}$$
   En utilisant 'lsode' d'Octave, calculer la trajectoire de la particule avec $x_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\gamma = 0$, $v_0 \equiv \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_0\right\| = 100\text{ms}^{-1}$ dans le cas où $\theta_0 \equiv (\widehat{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_0) = 30°$ degrés i.e. $u_0 = [0, v_0\cos(\theta_0), 0, v_0\sin(\theta_0)]$. On prendra $t = [t_0 = 0, t_1, \ldots, t_N = T]$ avec $T = 11$s. (N.B. afficher le resultat avec 'plot(x,z)' où $x(t) = u_1(t)$, et $z(t) = u_3(t)$)
   A partir de quelle valeur de N peut-on trouver un tracé lisse ? ....
   Comparer la solution obtenue par 'lsode' avec la solution exacte. ....
   (c) Ecrire une fonction qui permet de résoudre les équations différentielles par la méthode d'Euler avec $N = 20$ intervalles temporels dans T, $t = (t_0, t_1, \ldots, t_N)$ avec $t_N = t_0 + T$.
   Comparer les résultats à ceux obtenues par 'lsode'. Que constatez-vous ?..............
   ....
   Pour quelle valeur de N les résultats obtenus par la méthode d'Euler sont-ils comparables à ceux obtenus par 'lsode' ?...
   Comparer le temps d'exécution par la méthode d'Euler au temps d'exécution de 'lsode' quand ils sont dans les mêmes conditions. ....

(d) A partir du vecteur des t et des vecteurs $x(t)$ et $z(t)$, écrire une fonction simple pour trouver la position et le temps d'atterrissage de la particule (i.e. trouver t_a et $x(t_a)$ à l'instant où $z(t_a) = 0$, $t_a \neq 0$).
Pour un projectile lancé depuis le sol, quel est l'angle du départ 'optimal' qui permet d'envoyer la particule le plus loin possible si $\gamma = 0$? ....

(e) Prendre un coefficient de frottement non-nul, ($\gamma/m = 0,02\text{s}^{-1}$ par exemple). Quel est l'effet d'un γ/m non-nul sur l'angle optimal de lancement ?............................. .

2. **Orbite d'une navette spatiale :**
Nous avons vu dans le cours qu'avec les définitions des fonctions inconnues $u_i(t)$ de coordonnées circulaires suivantes :

$$\begin{aligned} u_1(t) &\equiv r(t) \qquad & u_2(t) &\equiv \dot{r}(t) \\ u_3(t) &\equiv \theta(t) \qquad & u_4(t) &\equiv \dot{\theta}(t) \end{aligned} \tag{5}$$

l'équation de mouvement d'un satellite est $\frac{d}{dt}u(t) = f(u(t), t)$ avec :

$$\frac{d}{dt}u(t) = f(u(t), t) = \begin{bmatrix} u_2 \\ -\frac{C}{u_1^2} + u_1 u_4^2 \\ u_4 \\ -2\frac{u_2 u_4}{u_1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

et $C \equiv GM_{\text{terre}} = 3,986\,10^{14}\text{m}^3\text{s}^{-2} = 3,986\,10^5\text{km}^3\text{s}^{-2}$. Le rayon de la terre est $R = 6\,378\,\text{km}$. Une navette spatiale vole typiquement à une altitude située entre 300 et 400 km.

(a) Tracer l'orbite d'une 'navette' avec pour conditions initiales $u_1(t_0) = r(t_0) = r_0 = 6\,700\,\text{km}$, $u_2(t_0) = \dot{r}(t_0) = 0$, $u_3(t_0) = \theta(t_0) = 0$, et une vitesse tangentielle de $v_{t,0} = r_0\dot{\theta}(t_0) = 6\,\text{km}\,\text{s}^{-1}$, donc $u_4(t_0) = \dot{\theta}(t_0) = \frac{v_{t,0}}{r_0} = \frac{7}{6\,700}\text{s}^{-1}$. (N.B. Après avoir obtenu la solution de l'éq.(6) avec 'lsode', utiliser 'plot(x,y)' d'Octave où $x(t) = r(t)\cos(\theta(t))$ et $y(t) = r(t)\sin(\theta(t))$).

Combien de temps faut-il approximativement pour effectuer une orbite complète autour du centre de la terre ?... .
A partie de quelle valeur de N l'orbite générée par 'lsode' est lisse ?...........................
A partie de quelle valeur de N l'orbite générée par la méthode d'Euler est comparable à 'lsode' ?... .
Comparer le temps d'exécution par 'lsode'.........................., avec le temps d'exécution par la méthode d'Euler... .

(b) Tracer la surface de la terre sur le même graphique. Quel avenir prévoyez-vous pour cette 'navette' ?...

(c) Reprendre (a) et (b) avec $v_{t,0} = r_0\dot{\theta}(t_0) = 10\,\text{km}\,\text{s}^{-1}$, $r_0 = 6\,700\,\text{km}$.

(d) Reprendre (a) et (b) avec $v_{t,0} = r_0\dot{\theta}(t_0) = 12\,\text{km}\,\text{s}^{-1}$, $r_0 = 6\,700\,\text{km}$.

(e) Dans quelle cas (pour quelle valeur de la vitesse initiale) l'orbite de la navette est-elle circulaire et à la même altitude (i.e. $\dot{r}(t) = 0$, $\in t$) ?...
Combien de temps faut-il pour effectuer une orbite de la terre dans ces conditions ?..
Grâce au choix judicieux d'un système de coordonnées circulaires, la solution des équations différentielles de l'éq.(6) est triviale pour une orbite circulaire. Pourquoi ?