Calcul Numérique, TD 5

Tout le travail demandé devra être réalisé sous la forme de "scripts" dont le nom sera `"TD5_xxx.m"` avec "xxx" le numero de la question pricipale (en chiffres romains), et d'un ensemble de fonctions que l'on placera dans un repertoire "TD4". On demande de bien commenter son code, et de ne pas oublier de nommer les auteurs du travail par un commentaire en début de chacun de ces fichiers. Il est par ailleurs conseillé d'utiliser des noms de fonctions significatifs, pour faciliter la lecture du travail.

I. Polynômes.

On rappelle qu'un polynôme est entièrement déterminé par la donnée de ses coefficients. Ainsi,

$$P(X) = \sum_{i=0}^{deg(P)} p_i X^i \,.$$

Dans Octave, il existe la fonction "polyval" permettant de calculer les valeurs d'un polynôme, défini par ses coefficients. Son utilisation est très simple, il suffit de construire un tableau contenant les coefficients de P dans l'ordre **décroissant** des degrés. Par exemple, le polynôme $aX + b$ est représenté par le tableau $[a, b]$ dans cet ordre.

Pour se familiariser avec cette fonction, on va écrire un script octave "PlotPolynome(a,b,n)" réalisant les opérations suivantes :

(I.1) Construire un vecteur x contenant n valeurs réparties uniformément sur l'intervalle $[a, b]$.

(I.2) Remplir un tableau P représentant le polynome $P(X) = 3X^3 + 2X^2 - 6X - 3$.

(I.3) Calculer, en utilisant la fonction *polyval*, un tableau *ypolyval* contenant les valeurs $P(x(i))$ pour i variant de 1 à n.

(I.4) Tracer la courbe $y = P(x)$.

(I.5) Calculer maintenant un tableau *ydirect* en réalisant le calcul uniquement à l'aide d'instructions octave simples (for, $*$ ...). Comparer les temps de calcul de cette méthode et de la fonction *polyval*.

II. Interpolation.

On va réaliser la régression polynômiale d'un ensemble de données comme exposé dans le cours. Pour celà, il suffira de calculer la matrice "Q" et le vecteur Y puis d'utiliser la résolution de systèmes linéaires d'Octave. En effet, si A est une matrice carrée, et B un vecteur colonne, la solution de l'équation $AX = B$ se calcule par l'instruction `X=A\B`.

(II.1) Génerer une vecteur $XEssai$ de $N = 30$ valeurs équiréparties entre -1 et 1. Définir le vecteur

$$\begin{aligned} YEssai \;=\; & XEssai^6 + 0.2\,XEssai^5 - 1.21\,XEssai^4 - 0.222\,XEssai^3 + \\ & 0.2140\,XEssai^2 + 0.0220\,XEssai - 0.004 + \\ & 0.1 * (rand(size(XEssai)) - 0.05). \end{aligned}$$

(II.2) Ecrire une fonction "PolynomeRegression" prenant les vecteurs X, Y et p comme arguments, et réalisant le calcul du polynôme de régression des mesures (X_i, Y_i) par un polynôme de degré p. Pour celà, on pourra définir la matrice Q telle que $Q_{i,j} = X_i^{(}p + 1 - j)$, pour i variant entre 1 et la longueur de X, et j entre 1 et $p+1$ le degré du polynôme. On rappelle que les coefficients A du polynôme de régression sont donnés par la solution du système $(Q^t)QA = (Q^t)Y$ (où Q^t est la matrice transposée de Q). Avec cette convention, les coefficients du polynôme sont dans l'ordre décroissant des degrés, pour pouvoir utiliser les fonctions prédéfinies d'Octave qui respectent cette convention.

(II.3) Utiliser cette fonction pour réaliser la régression sur les vecteurs $XEssai$ et $YEssai$. Tracer les points de coordonnées $(XEssai_i, YEssai_i)$ (symbole "x") et la courbe représentative du polynôme de régression de degré $p = 2$, 5 et 10 (en traits pleins) sur le même graphe, on conseille de faire varier x entre -1.1 et 1.1 par exemple. Il sera sans doute nécessaire de restreindre l'extension du graphe suivant la coordonnée y avec la commande "axis". Que pensez-vous du résultat ?

III. Un peu de calcul "formel".

On va maintenant réaliser un ensemble d'opérations sur des tableaux de nombres servant à implémenter les opérations usuelles sur les polynomes qui seront ensuite exploitées pour réaliser une interpolation par la méthode de Lagrange.

(III.1) Ecrire une fonction octave prenant 2 paramètres de type tableau P et Q représentant les polynomes P et Q, et calculant leur somme R.

(III.2) Ecrire une fonction octave prenant 2 paramètres P (type tableau) et c (type réel), calculant les coefficients du polynôme $R(X) = c * P(X)$.

(III.3) Ecrire une fonction octave prenant 2 paramètres P (type tableau) et rac (type réel), calculant les coefficients du polynôme $(X - rac) * P(X)$.

(III.4) A l'aide des fonctions que vous venez de définir, calculer le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{5}(X - i)/5!$ et le tracer. Que remarquez-vous ?

IV. Interpolation.

On dispose maintenant d'outils utiles au calcul utilisant des polynômes. On va exploiter ces outils pour réaliser l'interpolation d'une fonction cos sur $[-\pi, \pi]$ par un polynôme.

(IV.1) Réaliser une fonction octave *Lagrange*, prenant 2 paramètres $xinter$ (tableau) et i (entier compris entre 1 et la taille n de $xinter$). Cette fonction calculera le polynôme de Lagrange numéro i défini par

$$\mathcal{L}_i(X) = \frac{\prod_{j=1}^{i-1}(X - xinter_j)}{\prod_{j=1}^{i-1}(xinter_i - xinter_j)} \frac{\prod_{j=i+1}^{n}(X - xinter_j)}{\prod_{j=i+1}^{n}(xinter_i - xinter_j)} .$$

(IV.2) Réaliser une autre fonction prenant 2 paramètres $xinter$ et $yinter$ de type tableau qui calculera le polynôme d'interpolation :

$$Pinter(X) = \sum_{i=1}^{n} yinter(i)\mathcal{L}_i(X) .$$

(IV.3) Choisir un nombre de points pour l'interpolation $n = 10$ pour commencer. Remplir 2 tableaux $xuni$ et $xgauss$ tels que $xuni(i) = -\pi + (i-1) * (2\pi)/n$ et $xgauss(i) = \pi \cos((2i-1)\pi/(2n))$. Calculer les 2 tableaux $yuni$ et $ygauss$ contenant les images par la fonction cos de ces précédents tableaux de valeurs.

(IV.4) Calculer les 2 polynomes d'interpolation $Puni$ et $Pgauss$ à l'aide de votre fonction. Tracer sur un même graphique :
- les points $(xuni, yuni)$ en utilisant des croix,
- la courbe $y = cos(x)$,
- la courbe $y = Puni(x)$.

on pourra utiliser environ $20 * n$ *points pour tracer les fonctions.*

(IV.5) Même question pour $xgauss$ et $ygauss$.

(IV.6) A l'aide de la fonction "subplot", mettre les 2 courbes précédentes l'une au dessus de l'autre sur un même graphique.

(IV.7) Répéter les questions 3, 4, 5 et 6 pour 30 et 50 points. Conclure.

(IV.8) Comparer les résultats obtenus par la régression (avec $p = N + 1$) et par l'interpolation. Quel est l'ordre de grandeur du degré du polynôme que l'on peut traiter pour la régression.