Calcul Formel et Numérique, TD 3

Le but de ce TD est d'étudier le mouvement de marche aléatoire en une dimension et en deux dimensions.

1 Marche aléatoire en 1D

Nous étudions des mobiles se déplaçant sur une droite. A chaque pas de temps, le mobile peut soit avancer soit reculer d'un pas de longueur 1 et ce de manière aléatoire. Ainsi la position de la particule se déduit de la position précédente en écrivant $x(n) = x(n-1) \pm 1$. Le signe $+$ ou $-$ est aléatoire.
Bien que ce processus soit fondamentalement aléatoire, nous allons montrer qu'il conduit à des règles statistiques simples.
On considère un nuage de M mobiles (et on prendra M grand, $n > 100$). Ces M mobiles sont initialement à la position $x = 0$. Afin de caractériser l'état du système nous utilisons les deux grandeurs

– la position du nuage, qui est la moyenne sur l'ensemble des mobiles de la position

$$\langle x(n)\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(n) \tag{1}$$

– la racine carrée de l'écart quadratique moyen qui mesure la taille du nuage

$$\sqrt{\langle x^2(n)\rangle} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2(n)\right)^{1/2} \tag{2}$$

Fonction marcheAleatoire1
Nous allons écrire une fonction permettant d'étudier les marches aléatoires. La fonction `rand` permet de générer des nombres aléatoires entre 0 et 1. La fonction a comme variables d'entrées le nombre de pas $nbPAs$ et $nbParticules$, le nombre de particules. Elle retourne un tableau de $nbPas$ lignes et $nbPAs$ colonnes qui contient sur chaque ligne la position des particules. On appellera ce tableau $marche$.
Il vous est demandé

I. de construire la matrice $marche$ qui contient l'historique des positions de tous les mobiles,

II. de construire en utilisant une boucle `for` une animation montrant les positions successives des mobiles (la fonction `pause` permet de ralentir l'exécution).

III. de construire un vecteur pos de $nbPas$ lignes contenant la position du nuage à chaque pas (c'est à dire la moyenne), et un vecteur $taille$ contenant la taille du nuage c'est à dire l'écart quadratique moyen à chaque pas.

IV. de tracer un graphique permettant de vérifier que la marche aléatoire est un phénomène de diffusion, c'est à dire que la taille du nuage évolue comme la racine carrée du temps, ce qui s'écrit également $\langle x^2(n) \rangle = Dn$ où n est le nombre de pas effectué (ici le temps est compté en pas) et D est un coefficient de proportionnalité à déterminer.

La diffusion est le phénomène qu'on observe par exemple lorsqu'on place une goutte d'encre dans l'eau : la taille de cette goutte augmente (et la concentration d'encre au centre diminue) suivant la loi de diffusion ci dessus. Ce phénomène entre en jeu dans tout processus de mélange.

Fonction marcheAleatoire1a

Il s'agit d'étudier le cas où le pas n'est pas de -1 ou 1 mais est une valeur aléatoire comprise entre -1 et 1. On refait les mêmes opérations, et on trace le même graphique. Vérifie-t-on toujours la loi de la diffusion ?

2 Marche aléatoire en 2D

Nous étudions le cas où les particules se déplacent non pas sur une ligne mais dans le plan. Dans ce cas le pas est toujours de 1 mais la direction est aléatoire. Pour construire le mouvement il suffit donc de construire une matrice d'angles aléatoires compris entre 0 et 2π. Il vous est demandé d'écrire une fonction marcheAleatoire2 qui retourne les matrices x et y permettant de connaître la position des particules dans le plan. Vous effectuerez une animation montrant les positions successives des particules. Puis vous tracerez en fonction du temps la position du nuage et sa taille (mesurée comme l'écart quadratique moyen). A-t-on toujours une loi de diffusion ?