Calcul Formel et Numérique, TD 1

Votre travail en TD est noté dans le cadre du contrôle continu. Avant de quitter la salle, vous devez appeler un enseignant qui viendra évaluer votre travail.
L'ensemble de votre travail doit apparaître dans un fichier script `td1.m`. Pour noter votre travail l'enseignant executera le script td1 dans Octave. L'enseignant peut également être amené à vérifier le code. Celui ci devra donc être commenté (rappels : les lignes de commentaire commencent par un %).
Votre répertoire aura une arborescence du type *home/calcul/td1*. Le fichier td1 sera créé à l'aide d'un éditeur de texte. Ce fichier doit contenir la suite d'instructions permettant de répondre aux questions du TD. Avant de lancer octave, il convient de se placer dans le bon répertoire en utilisant la commande UNIX `cd`.

1 Opérations élémentaires

Opérations sur les vecteurs
† Créer le vecteur $v1 = (1, 2, 3, ...50)$, en utilisant la syntaxe `début:fin`
Question 1.1: *Ce vecteur est-il en ligne ou en colonne ? (Utilisez la fonction size)*
† A partir du vecteur $v1$, créer le vecteur $v2 = (\log(1), \log(2), \log(3), ... \log(50))$ (sous octave `log` est le logarithme népérien).
Question 1.2: *Calculer le produit scalaire des deux vecteurs* . . . .
Question 1.3: *Calculer le produit scalaire des éléments 20 à 30 de $v1$ et $v2$.* . . .
Opération sur les matrices et les vecteurs
† Définir les deux variables $n = 200$ et $m = 1000$.
† Construire le vecteur en colonne x contenant m éléments régulièrement espacés entre -1 et 1 à l'aide de la fonction `linspace`.
† Construire le vecteur en ligne k contenant $n + 1$ éléments entre 0 et 20 puis supprimer le premier élément.
† Construire (à l'aide d'une multiplication de vecteurs) la matrice

$$L = \begin{pmatrix} \sin 2\pi k(1)x(1) & \sin 2\pi k(2)x(1) & ... & \sin 2\pi k(n)x(1) \\ \sin 2\pi k(1)x(2) & \sin 2\pi k(2)x(2) & ... & \sin 2\pi k(n)x(2) \\ ... & ... & ... & ... \\ \sin 2\pi k(1)x(m) & \sin 2\pi k(2)x(m) & ... & \sin 2\pi k(n)x(m) \end{pmatrix}$$

† Construire le vecteur colonne a dont les éléments sont les inverses des éléments de k.
† Calculer le vecteur colonne y dont le j-ème élément est

$$y(j) = \sum_{l=1}^{l=n} a(l) \sin 2\pi k(l)x(j)$$

Question 1.4: *Tracer y en fonction de x. A quoi ressemble cette courbe ?* . . . . . .
Manipulations de matrices

On souhaite construire les matrices

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Question 1.5: *Proposer une instruction pour construire la matrice a par bloc* . .
Question 1.6: *Construire la matrice b en modifiant une partie de a* . . . .
Question 1.7: *Construire la matrice c à partir de la matrice b* . . . .

2 Vecteurs et fonctions, représentation graphique

Représentation graphique
Nous allons effectuer la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \exp(x) - 2x^2$ pour x allant de -1 à 3.
† Créer le vecteur xv de 200 points régulièrement espacés entre -1 et 3.
† Calculer le vecteur yv contenant les valeurs de $f(x)$.
† Tracer yv en fonction de xv en utilisant l'instruction `plot`.
Approximation de la dérivée
L'objectif de cette partie est de calculer de manière approchée la dérivée de la fonction f à partir de la relation

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

Ainsi, il est possible de calculer une approximation de la dérivée en calculant la fonction en x et $x + h$. On a intérêt à prendre h petit, et on prendra $h = 10^{-6}$.
† Construire le vecteur xvh déduit de xv contenant les points $xv(1) + h, xv(2) + h, ..., xv(200) + h$.
† Construire le vecteur yvh des valeurs de f aux points de xvh.
† Calculer alors le vecteur dyv contenant les valeurs approchées de la dérivée.
Erreur commise
Afin d'estimer l'erreur commise, on peut comparer la valeur approchée de la dérivée et la valeur théorique de la dérivée.
Question 2.1: *Déterminer l'expression de la dérivée de f* . . . .
† Construire le vecteur $dyvt$ contenant les valeurs théoriques de la dérivée aux points $xv(1), xv(2), ..., xv(N)$.
† Tracer sur un même graphique dyv et $dyvt$.
† Tracer le vecteur err qui est le vecteur contenant les erreurs.
Question 2.2: *Calculer la moyenne de l'erreur commise. Est ce que cette grandeur est une bonne mesure de l'erreur ?* . . . .
Question 2.3: *Calculer la racine carrée de la moyenne du carré de l'erreur (cette grandeur s'appelle écart quadratique moyen)* . . . .