

Transformation de Fourier

Mise en oeuvre sous OCTAVE

B. Torrèsani

Février 2006

1 Séries de Fourier

Au début du 19^{ème} siècle, Joseph Fourier, alors préfet de l'Isère, propose d'utiliser des décompositions de fonctions comme somme de sinusoides pour résoudre l'équation de la chaleur, et des équations aux dérivées partielles de la même famille. Ce programme marque le début d'une nouvelle ère de l'analyse mathématique, car, comme l'écrit B. Hubbard, Fourier a non seulement découvert un énoncé mathématique, mais a aussi montré en quoi il était utile. L'analyse de Fourier a ainsi très largement dépassé le domaine des mathématiques pures, pour devenir un outil de base du scientifique et de l'ingénieur. Elle se prête admirablement au calcul numérique et scientifique, et l'objectif de ce cours est de donner une introduction à l'analyse de Fourier dans sa version numérique, en se basant sur l'environnement OCTAVE.

1.1 Rappels sur les séries de Fourier

On sait que toute fonction définie sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ peut être décomposée en série de Fourier, c'est à dire sous forme de série de sinus et cosinus : on écrit alors, pour toute fonction f

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(2\pi k \frac{t}{b-a}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(2\pi k \frac{t}{b-a}\right) .$$

Les coefficients a_k et b_k sont alors obtenus en calculant

$$a_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt ,$$

$$a_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \cos\left(2\pi k \frac{t}{b-a}\right) dt ,$$

et

$$b_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \sin\left(2\pi k \frac{t}{b-a}\right) dt ,$$

On peut également utiliser, au lieu de sinus et cosinus, des fonctions exponentielles complexes, et écrire la série de Fourier d'une fonction f quelconque sous la forme

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) \exp\left(2i\pi k \frac{t}{b-a}\right), \quad (1.1)$$

les nombres (complexes en général) $c_k(f)$ étant cette fois obtenus par

$$c_k(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \exp\left(-2i\pi k \frac{t}{b-a}\right) dt. \quad (1.2)$$

C'est avec cette version des séries de Fourier que nous travaillerons dans ce cours. Elle exprime donc une fonction arbitraire comme combinaison linéaire de sinusoides, de fréquences multiples d'une fréquence fondamentale $1/(b-a)$. Le coefficient $c_k(f)$ donne en quelque sorte le "poids" de la sinusoides de fréquence $k/(b-a)$ dans f . On montre de plus une relation appelée "formule de Parseval", qui exprime la "conservation de l'énergie" :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|^2 dt. \quad (1.3)$$

REMARQUE 1 Les séries de Fourier vues sous l'angle de bases orthonormées de l'espace $L^2([a, b])$: il est possible de comprendre le calcul du développement en série de Fourier d'une fonction comme un développement sur une base orthonormée particulière d'un espace de fonctions bien choisi. On considère l'espace $L^2([a, b])$ des fonctions de module carré intégrable, c'est à dire des fonctions f telles que

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Cet espace est muni d'un produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \bar{f}(t)g(t) dt. \quad (1.4)$$

On considère les fonctions trigonométriques

$$e_n : t \rightarrow e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \exp\left(2i\pi \frac{nt}{b-a}\right). \quad (1.5)$$

On vérifie facilement que la famille de fonctions $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est un système orthonormal dans $L^2_p([a, b])$: en effet, il suffit de calculer

$$\langle e_k, e_\ell \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{-2i\pi(k-\ell)t/(b-a)} dt = \delta_{k\ell}.$$

Pour montrer qu'il s'agit d'une base orthonormale, on doit ensuite montrer que le système est complet, c'est à dire tel que la seule fonction $f \in L^2([a, b])$ telle que $\langle e_k, f \rangle = 0$ pour tout k est la fonction identiquement nulle. Cette preuve est omise ici.

Dans ce contexte, la formule de Parseval (1.3) n'est autre qu'une version un peu plus compliquée (car en dimension infinie) du théorème de Pythagore.

1.2 Quelques propriétés importantes

1.2.1 Propriétés de symétries

Les coefficients de Fourier possèdent un grand nombre de propriétés de symétrie, par exemple :

1. On note \bar{f} la fonction complexe conjuguée de f , qui à t associe $\overline{f(t)}$. Alors, on a la propriété suivante : pour tout k ,

$$c_{-k}(f) = \overline{c_k(\bar{f})} .$$

En particulier, si f est à valeurs réelles, on aura $c_{-k}(f) = \overline{c_k(f)}$, alors que si f est imaginaire pure, on aura $c_{-k}(f) = -\overline{c_k(f)}$.

2. De façon similaire, étant donnée une fonction f définie sur $[0, 1]$, si g est son “image miroir” par la symétrie de centre $t = 1/2$, c’est à dire définie par $g(t) = f(1 - t)$, alors on a

$$c_k(g) = c_{-k}(f) .$$

1.2.2 Convolution-produit

Etant données deux fonctions f, g , on s’intéresse à la fonction produit $fg : t \rightarrow f(t)g(t)$. Alors on a

$$c_k(fg) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_{\ell}(f)c_{k-\ell}(g) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_{\ell}(g)c_{k-\ell}(f) . \quad (1.6)$$

On dit que la suite $c(fg) = \{c_k(fg), k \in \mathbb{Z}\}$ est le **produit de convolution** des suites $c(f) = \{c_k(f), k \in \mathbb{Z}\}$ et $c(g) = \{c_k(g), k \in \mathbb{Z}\}$, ce que l’on note

$$c(fg) = c(f) * c(g) .$$

1.3 Séries de Fourier pour les fonctions à bande limitée

Une fonction arbitraire de $L^2([a, b])$ ou de $C([a, b])$ est caractérisé par une infinité de coefficients de Fourier. En général, il n’est pas possible de la caractériser par un nombre fini de valeurs ponctuelles $f(t_k)$, c’est à dire de la reconstruire parfaitement à partir des valeurs $f(t_k)$ (on parle alors d’interpolation). Seules existent des interpolations approchées.

Cependant, il existe une situation particulière dans laquelle la décomposition en séries de Fourier prend une forme simple : il s’agit du cas des fonctions qui n’ont qu’un nombre fini de coefficients de Fourier non nuls, que l’on appelle **fonctions à bande limitée**. Supposons par exemple que f , que l’on suppose pour simplifier définie sur l’intervalle $[0, T]$, soit telle que $c_k(f) = 0$ pour tout k tel que $k > K$, K étant un entier fixé. f admet donc au plus $2K + 1$ coefficients

de Fourier non nuls, et sa série de Fourier (1.1) peut donc s'écrire comme la somme finie

$$f(t) = \sum_{k=-K}^K c_k(f) \exp\left(2i\pi k \frac{t}{T}\right),$$

(ce qui, notons le au passage, définit une fonction continue, car somme finie de fonctions continues). Supposons maintenant que l'on cherche à caractériser f par un nombre fini de ses valeurs ponctuelles, et posons

$$t_n = \frac{n}{T}, \quad n = 0, \dots, 2K.$$

On a alors

$$f(t_n) = \sum_{k=-K}^K c_k(f) \exp\left(2i\pi \frac{kn}{2K+1}\right),$$

mais on peut également montrer que

$$c_k(f) = \sum_{n=0}^{2K} f(t_n) \exp\left(-2i\pi \frac{kn}{2K+1}\right).$$

Ainsi, dans ce cas particulier, il existe une correspondance bi-univoque entre les $2K+1$ coefficients de Fourier non-nuls et les $2K+1$ valeurs ponctuelles de f . Par ailleurs, comme ces $2K+1$ coefficients de Fourier sont suffisants pour caractériser la fonction f elle-même, les valeurs ponctuelles aussi. On peut en fait montrer qu'il existe une formule d'interpolation de f à partir des valeurs ponctuelles (qu'on nommera **échantillons**)

$$f(t) = \frac{1}{2K+1} \sum_{n=0}^{2K} f\left(\frac{nT}{2K+1}\right) \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{T}\left(K+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{nT}{2K+1}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{T}\left(t-\frac{nT}{2K+1}\right)\right)},$$

ce qui montre qu'il suffit de connaître les valeurs $f(nT/(2K+1))$ pour pouvoir en déduire les autres.

REMARQUE 2 La démonstration de ce résultat, assez simple, est basée sur l'identité donnant la somme de la série géométrique

$$\sum_{\ell=0}^L r^\ell = \begin{cases} \frac{1-r^{L+1}}{1-r} & \text{si } r \neq 1, \\ L+1 & \text{si } r = 1, \end{cases} \quad (1.7)$$

que nous utiliserons de nouveau plus loin.

Un exemple simple se trouve en FIG 1 : une sinusoïde échantillonnée, de la forme $n \rightarrow \sin(2\pi f n/32)$, $n = 1, \dots, 32$ (avec une fréquence $f = 8$) a été interpolée sur 64 points : un point intermédiaire a été ajouté entre deux points de la courbe initiale. On voit que les points de la première courbe sont situés soit sur l'axe des x , soit en $y = \pm 1$, c'est à dire les maxima et minima du sinus, mais que l'interpolation a été capable de régénérer les valeurs intermédiaires.

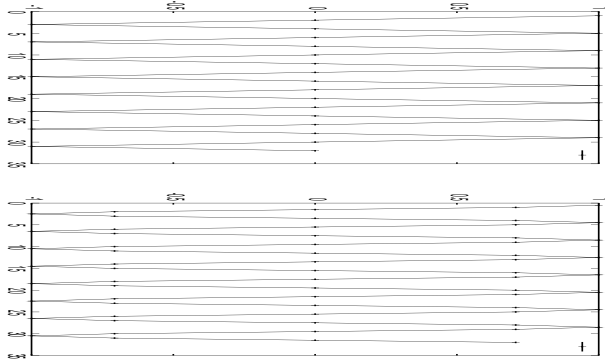


FIG. 1 – Interpolation d'un morceau de sinusoïde

2 Transformation de Fourier finie et Transformation de Fourier rapide

2.1 Transformation de Fourier finie

2.1.1 La TFF

On a vu apparaître dans la section 1.3 une version “finie” de la transformation de Fourier : partant d'une suite finie $\underline{u} = \{u_n, n = 0 \dots N - 1\} \in \mathbb{C}^N$, assimilée à un **vecteur colonne** $\underline{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})^t$, on lui associe la suite de même longueur $\underline{\hat{u}} = \{\hat{u}_k, k = 0, \dots, N - 1\} \in \mathbb{C}^N$, définie par

$$\hat{u}_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-2i\pi kn/N} . \quad (2.8)$$

On peut alors montrer la formule d'inversion

$$u_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k e^{2i\pi kn/N} , \quad (2.9)$$

et la formule de Parseval,

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{u}_k|^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} |u_n|^2 , \quad (2.10)$$

qui exprime la “conservation de l'énergie” (à une constante près). Dans les deux cas, la preuve est basée sur l'identité donnant la somme de la série géométrique (1.7) qui, appliquée au cas $r = e^{2i\pi k/N}$ donne

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi kn/N} = N \delta_{k,0} .$$

Ainsi, on a par exemple

$$\sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k e^{2i\pi kn/N} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} u_m e^{2i\pi k(n-m)/N} = N \sum_{m=0}^{N-1} u_m \delta_{n-m,0} = u_n ,$$

ce qui prouve la formule d'inversion (2.9). La formule de Parseval (2.10) se démontre de la même façon.

2.1.2 Une base orthonormée particulière de \mathbb{C}^N

Les suites finies de longueur constante N peuvent également être vues comme des vecteurs (colonnes) à N composantes complexes. L'ensemble de ces vecteurs forme un espace vectoriel complexe, noté \mathbb{C}^N , sur lequel sont définis un produit scalaire et une norme. Etant donnés deux vecteurs $\underline{u} = (u_0, \dots, u_{N-1})^t$ et $\underline{v} = (v_0, \dots, v_{N-1})^t$ dans \mathbb{C}^N , le produit scalaire de \underline{u} par \underline{v} est défini par

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{u_n} v_n ,$$

et la norme associée est définie par

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} .$$

Dans ce langage, on peut montrer que la famille des vecteurs $\{\underline{\epsilon}^k, k = 0, \dots, N-1\}$ définis par

$$\underline{\epsilon}^k = \left(\frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2i\pi k/N}, \dots, \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2i\pi k(N-1)/N} \right)^t \quad (2.11)$$

est une base orthonormée de \mathbb{C}^N . En effet, on a pour tous k, ℓ ,

$$\underline{\epsilon}^k \cdot \underline{\epsilon}^\ell = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi n(\ell-k)/N} = \delta_{k,\ell}$$

(toujours grâce à la formule donnant la somme de la série géométrique). Par conséquent, on peut écrire, pour tout $\underline{u} \in \mathbb{C}^N$

$$\underline{u} = \sum_k (\underline{\epsilon}^k \cdot \underline{u}) \underline{\epsilon}^k$$

Notons que dans ce langage, les coefficients \hat{u}_k s'écrivent

$$\hat{u}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \underline{\epsilon}_k \cdot \underline{u} ,$$

de sorte que ces équations sont équivalentes à (2.9).

2.1.3 Symétries de la TFF

Au même titre que la TFD, la TFF possède des propriétés de symétrie, qui sont importantes.

1. Tout d'abord, bien que l'équation (2.8) fournisse des valeurs \hat{u}_k de la TFD de $\underline{u} \in \mathbb{C}^N$ pour des valeurs de l'indice de fréquence k compris entre 0 et $N - 1$, on peut aussi noter que cette équation a aussi un sens pour tout $k \in \mathbb{Z}$. En outre, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\hat{u}_{k+N} = \hat{u}_k ,$$

ce qui signifie que si on décide de définir \hat{u} sur \mathbb{Z} , on obtient une suite périodique de période N . Ceci permet par exemple de définir \hat{u}_k pour des valeurs négatives de l'indice de fréquence k , par

$$\hat{u}_{-\ell} = \hat{u}_{N-\ell} , \ell = 0, 1, \dots$$

Cette possibilité est utile, car il est souvent pratique de considérer un domaine de fréquences centré sur la fréquence nulle $k = 0$.

2. La TFF possède aussi une intéressante propriété de symétrie par rapport à la conjugaison complexe. En effet, pour $\underline{u} \in \mathbb{C}^N$, soit $\underline{v} = \overline{\underline{u}} = (\overline{u_0}, \overline{u_1}, \dots, \overline{u_{N-1}})^t$ le vecteur complexe conjugué de \underline{u} . Sa TFD s'écrit alors

$$\hat{v}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{u_n} e^{-2i\pi kn/N} = \overline{\sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{2i\pi kn/N}} = \overline{\hat{u}_{-k}} .$$

En particulier, si \underline{u} est un vecteur réel, on a alors $v_k = u_k$ pour tout k , de sorte que \hat{u} possède la **symétrie Hermitienne** : $\hat{u}_k = \overline{\hat{u}_{-k}}$ pour tout k .

2.1.4 Convolution ; produit

La transformation de Fourier, sous toutes ses formes, est intimement liée au concept de produit de convolution. Nous allons le vérifier tout d'abord dans le cas simple de la TFF.

Etat donnés $\underline{f}, \underline{g} \in \mathbb{C}^N$, on définit leur produit de convolution $\underline{h} = \underline{f} * \underline{g} \in \mathbb{C}^N$ comme le vecteur de composantes

$$h_n = (\underline{f} * \underline{g})_n = \sum_{m=0}^{N-1} f_m g_{n-m \text{ [mod } N]} . \quad (2.12)$$

Ici, l'expression $n - m \text{ [mod } N]$ signifie qu'à l'entier $n - m$, qui n'est pas nécessairement compris entre 0 et $N - 1$, on soustrait autant de fois N qu'il est nécessaire pour obtenir un entier compris entre 0 et $N - 1$: on montre facilement qu'il existe un unique $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq (n - m) - k_0 N \leq N - 1$, et on définit alors $n - m \text{ [mod } N] = (n - m) - k_0 N$.

Une propriété essentielle du produit de convolution est qu'il est symétrique :

$$\underline{f} * \underline{g} = \underline{g} * \underline{f} . \quad (2.13)$$

Calculons maintenant la TFF de \underline{h} :

$$\begin{aligned}
\hat{h}_k &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} f_m g_{n-m} \exp \left\{ -2i\pi \frac{kn}{N} \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} f_m g_{n-m} \exp \left\{ -2i\pi \frac{km}{N} \right\} \exp \left\{ -2i\pi \frac{k(n-m)}{N} \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f_m g_j \exp \left\{ -2i\pi \frac{km}{N} \right\} \exp \left\{ -2i\pi \frac{kj}{N} \right\} = \hat{f}_k \hat{g}_k .
\end{aligned}$$

Ainsi, la transformée de Fourier finie du produit de convolution de deux vecteurs \underline{f} et \underline{g} est égale au vecteur dont les composantes sont égales au produit des composantes correspondantes de $\hat{\underline{f}}$ et $\hat{\underline{g}}$. On note $\hat{\underline{h}} = \hat{\underline{f}} \hat{\underline{g}}$ ce nouveau vecteur, appelé **produit simple** de $\hat{\underline{f}}$ et $\hat{\underline{g}}$.

REMARQUE 3 Attention : il ne faut pas confondre le vecteur $\hat{\underline{f}} \hat{\underline{g}}$ avec le produit scalaire $\hat{\underline{f}} \cdot \hat{\underline{g}}$, qui est un nombre (et pas un vecteur).

Considérons maintenant la TFF du produit simple de deux vecteurs. Pour cela, nous pouvons écrire en utilisant la formule d'inversion de la TFF

$$\begin{aligned}
\widehat{fg}_k &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n g_n \exp \left\{ -2i\pi \frac{kn}{N} \right\} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{g}_\ell \exp \left\{ 2i\pi \frac{(\ell-k)n}{N} \right\} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{g}_\ell \hat{f}_{\ell-k} = \frac{1}{N} (\hat{\underline{f}} * \hat{\underline{g}})_k .
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc, à peu de choses près, un résultat ‘‘symétrique’’ du précédent : la TFF d’un produit simple est égale (à un facteur $1/N$ près) au produit de convolution des TFF. On résume les résultats obtenus dans la proposition suivante :

PROPOSITION 1 Soient $\underline{f}, \underline{g} \in \mathbb{C}^N$. Alors, on a, pour tout $k = 0, \dots, N-1$:

$$(\widehat{\underline{f} * \underline{g}})_k = \hat{f}_k \hat{g}_k \quad (2.14)$$

$$(\widehat{fg})_k = \frac{1}{N} (\hat{\underline{f}} * \hat{\underline{g}})_k . \quad (2.15)$$

Ce résultat, parfois appelé **théorème convolution-produit**, est un résultat que nous allons retrouver dans toutes les formes de transformation de Fourier (à de petites modifications près, à savoir des constantes multiplicatives différentes).

2.2 Complexité, transformation de Fourier rapide

La complexité d'un algorithme donne une indication du nombre d'opérations à effectuer par cet algorithme. On va voir ici qu'une utilisation naïve des formules (2.8) et (2.9) conduit à un nombre d'opérations qui peut devenir rapidement important, alors qu'il existe des algorithmes permettant de calculer des TFF à moindre coût.

2.2.1 La TFF en produit "matrice-vecteur"

Pour évaluer la complexité d'une approche naïve, commençons par remarquer que (2.8) peut aussi s'écrire sous forme vectorielle, comme

$$\hat{u} = Mu ,$$

où M est la matrice $N \times N$, dont les éléments de matrice sont des puissances de $\exp(-2i\pi/N)$. Plus précisément,

$$M_{kn} = e^{-2i\pi kn/N} .$$

Cette matrice peut être construite sous OCTAVE par la séquence d'instructions donnée dans l'exemple 1 ci-dessous. La TFR d'un vecteur (colonne) u de longueur N se calcule alors simplement ; par exemple, la séquence d'instructions suivante permet de générer une sinusoïde de fréquence $f = 32$ de la tracer, et d'en calculer la TFF par produit matriciel, et en tracer le module carré.

EXEMPLE 1 TFF en version matricielle :

```

N = 512 ;
M = zeros(N,N) ;
for k = 1 :N,
    for n = 1 :N,
        M(k,n) = exp(-2*i*pi*(k-1)*(n-1)/N) ;
    end ;
end ;

t = 2*pi*(0 :(N-1))/N ;
f = 32 ;
u = cos(f*t) ;
u=u' ;
subplot(2,1,1) ;
title('sinusoïde') ;
plot(u) ;
uchap = M*u ;
subplot(2,1,2) ;
title('transformée de Fourier') ;
plot(abs(uchap)) ;

```

2.2.2 TFR et OCTAVE

L'environnement OCTAVE met en oeuvre une version de la transformation de Fourier rapide, implémentée dans les fonctions `fft` et `ifft`. Par exemple, la séquence d'instructions suivante, qui remplace les lignes 2 à 7 et 15 de l'exemple 1, permet de calculer la transformée de Fourier de l'exemple ci-dessus par TFR, et en tracer le module carré.

EXEMPLE 2 **TFF par TFR** :

```
uchap = fft(u);
title('transformee de Fourier');
plot(abs(uchap));
```

REMARQUE 4 **Conventions d'indice** : Il est important d'être attentif au point suivant : dans l'environnement numérique OCTAVE, les indices de tableau commencent à 1, et pas 0. Par contre, les routines `fft` et `ifft` considèrent le premier élément du tableau comme la d'indice 0. Ainsi, dans l'exemple 1 ci-dessus, l'élément `u(1)` du vecteur u contient en fait la coordonnée u_0 , et ainsi de suite.

REMARQUE 5 Notons que la TFF de $\underline{u} \in \mathbb{C}^N$ produit des nombres \hat{u}_k , pour des valeurs positives de l'indice de fréquence k , comme on l'a remarqué dans la section 2.1.3. Il est souvent utile de représenter une transformée de Fourier par un graphe centré sur la fréquence nulle $k = 0$, c'est à dire par un vecteur

$$(\hat{u}_{1-N/2}, \hat{u}_{2-N/2}, \dots, \hat{u}_{N/2})^t$$

(si N est pair). L'instruction OCTAVE `fftshift` permet d'effectuer le passage de $\underline{\hat{u}}$ au vecteur transformé ci-dessus.

EXEMPLE 2 (SUITE)

```
title('transformee de Fourier');
plot(fftshift(abs(uchap)));
```

Les courbes obtenues dans les exemples 1 et 2 se trouvent en FIG 2. On y voit bien le fait que la sinusoïde est composée de deux exponentielles complexes, ce qui se traduit par deux pics aux fréquences correspondantes sur la TFF.

2.3 Séries de Fourier tronquées et phénomène de Gibbs

Revenons au cas des séries de Fourier définies en (1.1), et considérons le problème de leur approximation par des versions finies, obtenues en tronquant leur développement de Fourier :

$$f_K(t) = \sum_{k=-K}^K c_k(f) e^{2i\pi kt}, \quad (2.16)$$

où on a pris pour simplifier l'intervalle $[a, b] = [0, 1]$. Cette dernière expression montre que f_K est une approximation de f , où manquent les sinusoïdes de

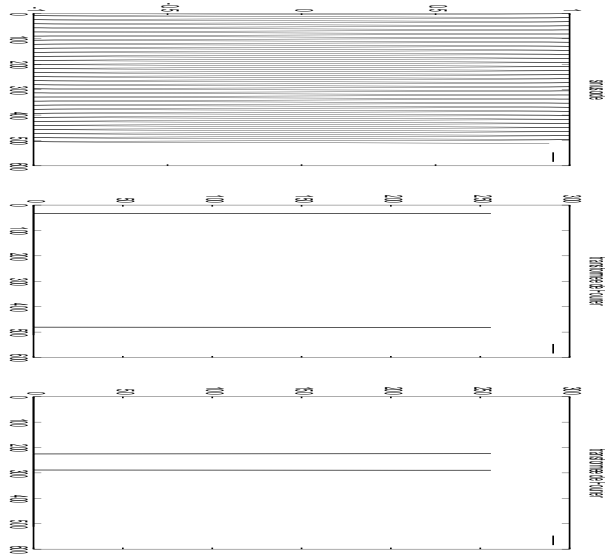


FIG. 2 – Transformée de Fourier d’une sinusoïde : sinus (haut), TFF par `fft` (milieu) et TFF centrée sur l’origine des fréquences, calculée par `fft` et `fftshift` (bas).

haute fréquence, c’est à dire qui oscillent le plus rapidement. Dès lors, il ne sera pas surprenant de voir apparaître sur le tracé de f_K une erreur d’approximation rapidement oscillante, d’autant plus rapidement oscillante (et petite) que K sera grand. Ce phénomène est appelé **phénomène de Gibbs**, et apparaît clairement sur la FIG 3, où on a considéré une fonction “carrée”, valant soit 0 soit 1, sur des intervalles de longueur constante. La génération de la fonction carrée en OCTAVE est donnée ci-dessous.

EXEMPLE 3 Fonction carrée

```
x = zeros(512,1);
for k=0 :3,
    x((64*2*k+1) :64*(2*k+1))=1;
end
title('fonction carree');
plot(x)
```

L’illustration du phénomène de Gibbs est effectuée en calculant la transformée de Fourier de la fonction carrée f , puis en effectuant une transformée de Fourier inverse à partir de versions de la transformée de Fourier de f dans laquelle les coefficients de Fourier $c_k(f)$ correspondant aux plus grandes valeurs de k , i.e. $|k| > K$, sont remplacés par des zéros.

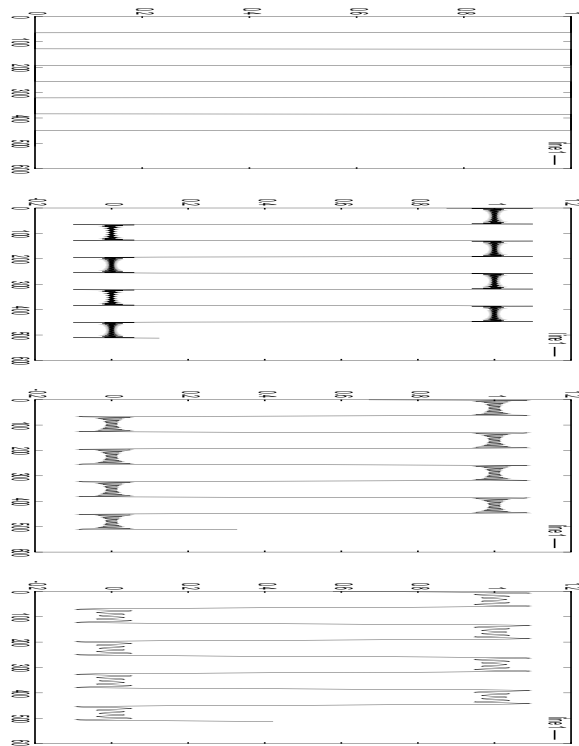


FIG. 3 – Illustration de phénomène de Gibbs : fonction carrée f , et trois approximations par séries de Fourier tronquées f_K avec des valeurs décroissantes de K .

3 Application : filtrage passe-bas et passe-bande de signaux

3.1 Le cas des fonctions d'une variable continue

En traitement du signal, on appelle “signal analogique” une information portée par un support physique comme par exemple une onde acoustique (son), un courant électrique, une onde électromagnétique,... On modélise généralement un signal analogique par une fonction d'une variable continue, $t \rightarrow f(t)$, la variable t étant généralement une variable de temps.

La représentation d'un signal f par sa série de Fourier le fait apparaître sous la forme d'une superposition de sinusoides de fréquences variables. La notion de fréquence est une notion importante : qualitativement, la fréquence d'une sinusoïde représente sa “vitesse” d'oscillation, ou encore la vitesse à laquelle elle varie. Elle a également une signification physique forte. Par exemple, si la fonction f considérée représente un signal sonore, la fréquence d'une sinusoïde est étroitement associée à la “hauteur” du son.

Dans ce contexte, les opérations de filtrage peuvent être vues comme des opérations visant à atténuer, ou au contraire rehausser certaines hauteurs de son, comme on pourrait le faire avec un amplificateur “HIFI”. Ainsi, un **filtre linéaire** peut être défini comme une application linéaire, qui à tout signal x associe un autre signal, obtenu en modifiant ses coefficients de Fourier par multiplication par une suite fixée.

Plus précisément, étant donnée une suite infinie $m = \{m_k, k \in \mathbb{Z}\}$, on lui associe le filtre linéaire T_m , qui à toute fonction f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ associe la fonction $T_m f$ définie par

$$(T_m f)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_k c_k(f) e^{2i\pi kt} . \quad (3.17)$$

Des exemples simples sont fournis par les filtres dits **passe-bas** idéaux, définis par

$$m_k = \begin{cases} 1 & \text{si } |k| \leq K \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

L'effet de tels filtres est de “supprimer” toutes les composantes “haute-fréquence” du signal f , c'est à dire les sinusoides rapidement variables, en préservant les “basses fréquences”. Ce filtre est dit idéal car il “coupe” les fréquences de façon stricte. Un exemple de tel filtrage “passe-bas” est donné en FIG 4 et FIG 5. Dans le premier cas, le signal initial est une somme de deux sinus à des fréquences très différentes, et le filtrage a totalement supprimé la sinusoïde de fréquence la plus haute. Le second cas concerne un signal “aléatoire”, très irrégulier. On voit en particulier que le signal filtré (en bas) présente des variations bien moins rapides que le signal original (en haut). Ceci s'explique encore facilement, dans la mesure où le filtrage a supprimé toutes les “fonctions élémentaires” les plus rapidement variables.

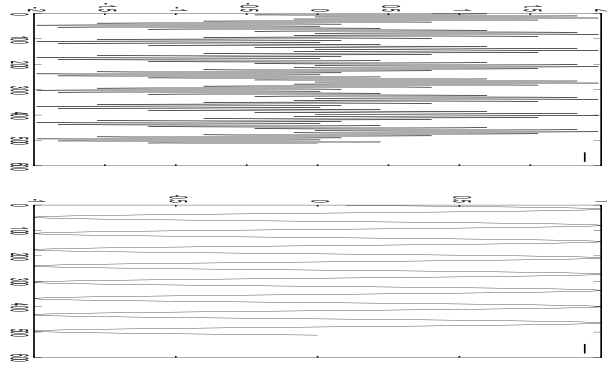


FIG. 4 – Filtrage passe-bas d’une somme de deux sinusoides. En haut : signal original ; en bas : signal filtré.

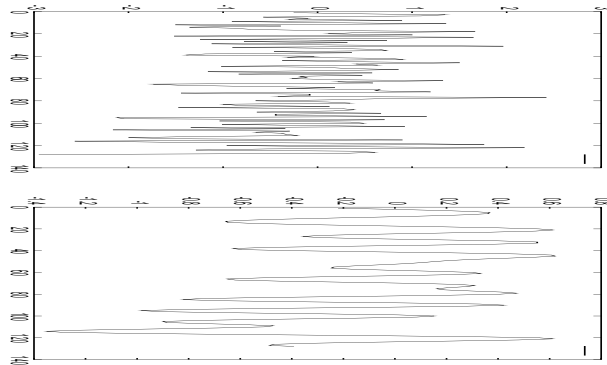


FIG. 5 – Filtrage passe-bas d’un signal aléatoire. En haut : signal original ; en bas : signal filtré.

On définit similairement le filtre **passe-bande**, par

$$m_k = \begin{cases} 1 & \text{si } K_1 \leq |k| \leq K_2 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Ces filtres ne conservent du signal original qu’une “bande” de fréquences : les sinusoides de fréquences comprises (en valeur absolue) entre K_1 et K_2 .

3.2 Le cas de la dimension finie, résolution sous OCTAVE

On peut définir les mêmes opérations dans le cas où on considère des vecteurs $u \in \mathbb{C}^N$ plutôt que des fonctions d’une variable continue (on parle alors de “signaux numériques”). Il suffit de remplacer le calcul des coefficients de Fourier par la transformation de Fourier finie, que l’on pourra utiliser sous OCTAVE grâce à `fft`.

Plus précisément, partant d'un vecteur (signal original) $\underline{u} \in \mathbb{C}^N$ et d'un filtre défini par sa fonction de transfert $m \in \mathbb{C}^N$, on effectue les opérations suivantes :

$$\underline{u} \xrightarrow{\text{fft}} \hat{\underline{u}} \xrightarrow{\text{multiplication}} m\hat{\underline{u}} \xrightarrow{\text{ifft}} \underline{v} .$$

le vecteur $\underline{v} \in \mathbb{C}^N$ est le **signal filtré**. Par un choix convenable de la fonction de transfert m , on construit ainsi un filtre passe-bas ou un filtre passe-bande.

REMARQUE 6 Si \underline{u} est un vecteur réel alors sa TFF $\hat{\underline{u}}$ possède la symétrie Hermitienne. Si l'on veut que le signal filtré soit lui aussi réel, alors il faut que sa TFF possède elle aussi la symétrie Hermitienne, donc que la fonction de transfert m possède la symétrie Hermitienne :

$$m_{N-k} = \overline{m_k} , \quad \forall k .$$

Les figures FIG 4 et FIG 5 ont été réalisées sous OCTAVE selon cette procédure.

4 Application : équation de la chaleur discrète

On s'intéresse à l'équation de la chaleur, qui était la première motivation de J. Fourier. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles, décrivant l'évolution d'un champ de température $T(x, t)$ en fonction d'une variable d'espace x et d'une variable de temps t :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = C \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} ,$$

où C est une constante positive. Cette équation est complétée par une condition initiale $T(x, 0)$, supposée connue.

Ce problème peut être résolu par des techniques faisant intervenir la transformation de Fourier. On se propose ici d'étudier ce problème dans un cas simplifié.

4.1 Position du problème

Le problème de l'équation de la chaleur peut être résolu assez facilement dans un cadre numérique simple. Supposons que la variable temporelle soit une variable continue ($t \in \mathbb{R}^+$), mais considérons une variable spatiale discrète : $n \in \mathbb{Z}$. On considère un champ de température

$$T : (n, t) \rightarrow T_n(t) \in \mathbb{R} ,$$

et on suppose pour simplifier encore que le champ T est périodique en n : il existe un nombre entier positif N tel que pour tout n , on ait $T_{n+N}(t) = T_n(t)$ pour tout t . Ainsi, nous avons ramené notre problème à un problème plus simple ne faisant intervenir que N variables indépendantes. Il faut encore trouver une version "discrétisée" de la dérivée et de la dérivée seconde par rapport à x . On se contente ici de la version la plus simple : on remplace $\partial T / \partial x$ par la différence

finie $(T_{n+1} - T_n)/h$ (où h est une constante), et la dérivée seconde $\partial^2 T / \partial x^2$ par la différence finie $(T_{n+1} - 2T_n + T_{n-1})/h^2$.

La version correspondante de l'équation de la chaleur précédente est la famille d'équation différentielles couplées

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = \alpha (T_{n+1}(t) - 2T_n(t) + T_{n-1}(t)) , \quad n = 0, \dots, N-1 , \quad (4.18)$$

et c'est ce système que nous voulons résoudre, connaissant aussi une condition initiale

$$\underline{T}(0) = (T_0(0), T_1(0), \dots, T_{N-1}(0))^t .$$

On note

$$\underline{T}(t) = (T_0(t), T_1(t), \dots, T_{N-1}(t))^t \in \mathbb{C}^N ,$$

et on introduit les fonctions $(t, k) \rightarrow \hat{T}_k(t)$, définies par TFF de \underline{T} :

$$\hat{T}_k(t) = \sum_{n=0}^{N-1} T_n(t) e^{-2i\pi kn/N} . \quad (4.19)$$

On peut maintenant calculer

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{dT_n(t)}{dt} e^{-2i\pi kn/N} = \frac{d\hat{T}_k(t)}{dt} .$$

La même transformation appliquée au membre de droite de l'équation de la chaleur discrète conduit à

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} (T_{n+1}(t) - 2T_n(t) + T_{n-1}(t)) e^{-2i\pi \frac{kn}{N}} &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{2i\pi k/N} - 2 + e^{-2i\pi k/N} \right) T_n(t) e^{-2i\pi \frac{kn}{N}} \\ &= -4 \sin^2 \left(\frac{\pi k}{N} \right) \hat{T}_k(t) . \end{aligned}$$

Ainsi, notre équation matricielle devient

$$\frac{d\hat{T}_k(t)}{dt} = -4\alpha \sin^2 \left(\frac{\pi k}{N} \right) \hat{T}_k(t) , \quad k = 0, \dots, N-1 . \quad (4.20)$$

Il s'agit d'une famille de N équations différentielles découplées, dont les solutions sont connues :

$$\hat{T}_k(t) = \hat{T}_k(0) \exp \left\{ -4\alpha t \sin^2 \left(\frac{\pi k}{N} \right) \right\} . \quad (4.21)$$

Ainsi, si nous savons calculer les $T_n(t)$ à partir des $\hat{T}_k(t)$, nous aurons résolu notre problème.

La transformation $\{T_n, n = 0, \dots, N-1\} \rightarrow \{\hat{T}_k, k = 0, \dots, N-1\}$ est un exemple de ce que l'on appelle la transformation de Fourier finie. Cette dernière est inversible, comme nous allons maintenant le voir. Ainsi, nous pourrions, à partir des fonctions $t \rightarrow \hat{T}_k(t)$ données en (4.21), obtenir le champ de température $T_n(t)$ en tout point n et tout instant t .

4.2 Résolution numérique sous OCTAVE

La mise en œuvre sous OCTAVE de ce problème consiste à développer une méthode donnant le champ de température à l’instant t , pour tout t , à partir d’une condition initiale fixée. Pour cela, on forme tout d’abord un vecteur colonne \underline{T} à N composantes, les variables $T_n(t)$. On forme également un vecteur colonne \underline{T}_0 , représentant les N composantes de la condition initiale. La transformée de Fourier \hat{T}_0 de la condition initiale prend elle-aussi la forme d’un vecteur colonne à N composantes $\hat{\underline{T}}_0$, obtenu par transformée de Fourier finie de \underline{T}_0 .

Pour tout temps $t \in \mathbb{R}^+$, la transformée de Fourier du vecteur température $\hat{\underline{T}}(t)$ est alors obtenu en utilisant l’équation (4.21), d’où on peut déduire le vecteur température au temps t par TFF inverse.

Un exemple de résultat, obtenu avec une condition initiale aléatoire (générée en utilisant la fonction OCTAVE `rand`) se trouve dans en FIG 6. On y voit en particulier que le champ de température a tendance à devenir de plus en plus uniforme, ou “plat”, au fur et à mesure que le temps croît. Ceci est intimement lié au fait que dans l’équation (4.21), les composantes de $\hat{\underline{T}}$ qui sont atténuées le plus rapidement sont les composantes $\hat{T}_k(t)$ pour des valeurs de k proches de $N/2$, c’est à dire celles qui correspondent aux sinusoides les plus rapidement oscillantes, donc les plus rapidement variables. Dans ce sens, la transformation

$$\underline{T}(0) \longrightarrow \underline{T}(t)$$

s’apparente pour tout $t > 0$ à un filtrage passe-bas, comme nous l’avons vu dans la section précédente.

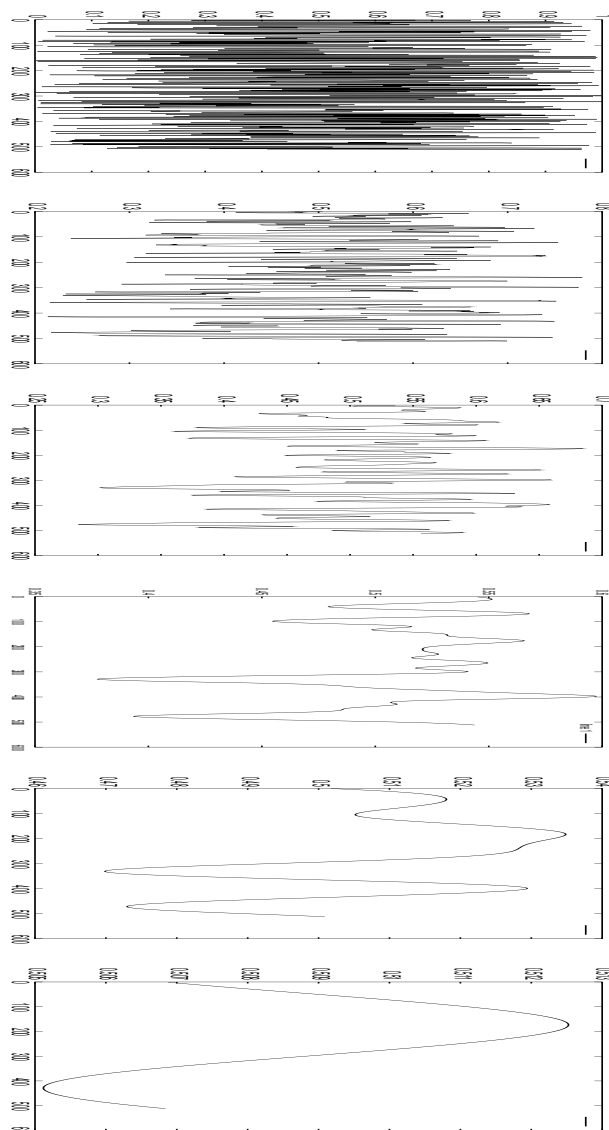


FIG. 6 – Evolution du champ de température au cours du temps par l'équation de la chaleur finie : de haut en bas : $t = 0$, $t = 1$, $t = 5$, $t = 50$, $t = 500$, $t = 10000$. Attention : les échelles ne sont pas les mêmes d'une courbe à l'autre sur l'axe des ordonnées.