Électromagnétisme et capteurs
Travaux Dirigés

Année universitaire 2018-19

TD1 - Charge électrique, force de Coulomb

On utilise les valeurs $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C pour le quantum de charge et $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^{9}\,\mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2$ pour la constante de Coulomb, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg pour la masse de l'électron et $m_p = m_n = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg pour la masse d'un nucléon, proton ou neutron.

1 Potentiel, travail et énergie

a. Quelle est la quantité de travail nécessaire pour déplacer une charge de 1C d'une borne à l'autre d'une batterie de 12 V ?

b. Quelle est la perte d'énergie potentielle d'un proton qui traverse une chute de potentiel de 5 kV ?

c. Un proton initialement au repos est accéléré par une différence de potentiel de 1 MV. Quelle est sa vitesse finale ?

2 Équipotentielles et lignes de champ électrostatique

On considère six distributions de charges :

a. Une charge ponctuelle de $q = 1$ nC placée en $x = 0$ m et $y = 0$ m.

b. Un doublet constitué d'une charge de +2 nC en $x = -2$ m et $y = 0$ m et d'une charge de −2 nC en $x = +2$ m et $y = 0$ m.

c. Deux charges de 0,5 nC, l'une en $x = -2$ m et $y = 0$ m et l'autre en $x = +2$ m et $y = 0$ m.

d. Un segment uniformément chargé entre les points ($x = -5$ m; $y = 0$ m) et ($x = +5$ m; $y = 0$ m).

e. Deux segments uniformément chargés, portant des charges égales et opposées, de longueur 10 m et placés parallelement à une distance de 16 m.

f. Deux segments uniformément chargés, portant des charges égales et opposées, de longueur 16 m et placés parallelement à une distance de 4 m.

On donne pour ces six distributions la carte de potentiel dans le plan $z = 0$ en pages 9 à 11.

— Pour chacune de ces cartes, tracer et orienter les lignes de champ électrostatiques.
— Pour les cartes (b) à (f), indiquer les plans de symétrie de la distribution de charges.
— Pour les cartes (b) à (f), indiquer les plans d'anti-symétrie de la distribution de charges.
— Pour les cartes (d), (e) et (f), indiquer quel segment est chargé positivement.

Estimer à l'aide d'une règle l'intensité du champ électrostatique :

— sur la carte (a) au point ($x = 2$ m; $y = 0$ m)
— sur la carte (c) au point ($x = 0$ m; $y = 0$ m)
— sur la carte (f) au point ($x = 0$ m; $y = 0$ m)

3 Densité de charge

Calculer la densité volumique de charge d'un corps portant une charge totale $Q = 3\ \mu$C uniformément répartie sur son volume pour les géométries suivantes :

a. une boule de rayon $R = 30$ cm,

b. un volume délimité par deux sphères concentriques de rayons $R_1 = 30\,\text{cm}$ et $R_2 = 60\,\text{cm}$.

La boule de rayon $R = 30$ cm étant maintenant supposée conductrice, calculer sa densité surfacique de charge, supposée uniforme.

4 Interactions fondamentales

Suivant le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron supposé ponctuel décrit autour du proton une orbite circulaire de rayon $R = 53\,\text{pm} = 5{,}3 \cdot 10^{-11}$ m. On donne la masse de l'électron $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, celle du proton $m_p = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg. Calculer :

a. l'intensité $F_g = G\frac{m_e m_p}{R^2}$ de la force gravitationnelle, avec $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\,\text{Nm}^2/\text{kg}^2$ la constante gravitationnelle,

b. l'intensité $P_e = m_e g$ du poids de l'électron et celle $P_p = m_p g$ du poids du proton, avec $g = 9{,}8\,\text{N/kg}$ l'intensité du champ gravitationnel terrestre,

c. l'intensité $F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_e q_p|}{R^2}$ de la force électrostatique entre ces particules.

d. Comparer ces quatre forces.

TD2 - Courant électrique, milieu conducteur

1 Courant volumique

L'intensité I du courant électrique à travers une surface S orientée est le flux de la densité volumique de courant $\vec{\mathrm{j}}$ à travers cette surface. Pour un type de charges mobiles, la densité volumique de courant $\vec{\mathrm{j}} = \rho_m \vec{\mathrm{v}}$ est reliée à la densité volumique ρ_m et à la vitesse $\vec{\mathrm{v}}$ de ces charges mobiles.

a. Un fusible fond lorsque la densité volumique de courant atteint 500A/cm^2. Quel est le diamètre d'un fusible cylindrique de calibre 0,5A ? On suppose la densité volumique de courant uniforme sur la section du fusible.

b. Dans le cuivre, la densité des charges mobiles est $\rho_m = -1{,}3 \cdot 10^{10}\,\text{C/m}^3$. Calculer la vitesse v des électrons de conduction dans un fil de cuivre de section 1 mm^2 traversée par un courant I=1A. On suppose la densité de courant uniforme sur la section du fil.

2 Conductivité ohmique

Un fil électrique de section $1\,\text{mm}^2$ et de longueur $1\,\text{m}$ transporte un courant d'intensité $I = 4\,\text{A}$ lorsqu'on applique une ddp de $U = 2\,\text{V}$ à ses extrémités.

a. Calculer la norme $j = \|\vec{\mathrm{j}}\|$ de la densité volumique du courant, supposé uniformément réparti sur la section du fil.

b. Calculer la norme $E = \|\vec{\mathrm{E}}\|$ du champ électrostatique dans le fil, supposé uniforme.

Un matériau est dit conducteur ohmique lorsque la densité volumique de courant $\vec{\mathrm{j}}$ y est reliée au champ électrostatique $\vec{\mathrm{E}}$ par la loi d'Ohm locale :

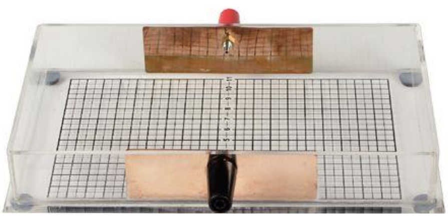
$$\vec{\mathrm{j}} = \gamma\vec{\mathrm{E}}$$

où γ est la conductivité du matériau.

c. En déduire la conductivité γ de l'alliage dont est constitué le fil électrique.

d. Relier la résistance ohmique $R = U/I$ du fil à la conductivité γ de l'alliage le constituant.

3 Cuve rhéographique du TP1



1. Une cuve rhéographique comporte deux électrodes plates conductrices de dimensions $18\,\text{mm}\times100\,\text{mm}$ placées parallèlement à une distance $\ell = 120\,\text{mm}$. Calculer pour une ddp $U = 15\,\text{V}$ entre les électrodes l'amplitude E du champ électrique dans la cuve. Les effets de bord sont négligés.
2. On verse de l'eau de conductivité $\gamma = 10^{-2}\,\text{S/m}$ dans la cuve rhéographique jusqu'à ce que les électrodes soient immergées sur une hauteur $h = 10\,\text{mm}$. Quelle valeur de l'intensité I du courant est lue à l'ampèremètre ?

4 Résistance ohmique

a. Un courant continu d'intensité 1A passe pendant 1 minute dans une résistance de 1Ω. Quelle quantité de charge est déplacée ?

b. Un fil donné à une résistance R. Un autre fil taillé dans le même matériau est une fois et demi plus long et son diamètre est deux fois moins grand. En déduire R'.

5 Électricité atmosphérique

Par beau temps, l'atmosphère peut être considérée comme un condensateur. Une des armatures est constituée par le sol, de potentiel nul. L'autre est la surface inférieure de l'ionosphère et de potentiel $U > 0$, où les molécules sont ionisées par le vent solaire et les rayons cosmiques.

Le rayon de la Terre $R_T = 6400\,\text{km}$ étant beaucoup plus grand que l'épaisseur $\ell = 50\,\text{km}$ de l'atmosphère, on modélise celle-ci par un condensateur plan dont les plaques ont une aire de $S = 4\pi R_T^2$.

L'atmosphère est un milieu isolant imparfait : il est légèrement conducteur de conductivité non uniforme

$$\gamma(z) = \gamma_0 \exp\left(\frac{z}{a}\right),$$

avec z l'altitude comptée à partir du sol et $a = 8{,}8\,\text{km}$.

a. Un courant permanent d'intensité $I = 1{,}5\,\text{kA}$ traverse l'atmosphère. Dans quel sens circule-t-il ?

b. Que vaut $\vec{\mathrm{j}}$ la densité volumique de courant dans l'atmosphère ?

c. Déterminer l'expression du champ $\vec{\mathrm{E}} = E_z(z)\vec{\mathrm{u}}_z$, puis du potentiel $V(z) = -\int_0^z E_z(z)dz$.

d. On mesure au niveau du sol $E_z(0) = -100\,\text{V/m}$. Calculer γ_0 et $U = V(\ell)$.

e. Le courant de retour est assuré par les orages. Sachant qu'il y a environ 100 éclairs par seconde sur toute la Terre, quelle est la charge transportée en moyenne par un éclair ?

f. La durée typique d'un éclair étant de $3\,\text{ms}$, quelle intensité moyenne y circule ?

TD3 - Milieu isolant, condensateur, capacité

1 Condensateur

Dans un circuit électrique en régime continu, un condensateur de capacité $C = 10\,\mu\text{F}$ a ses deux armatures aux potentiels $V_1 = +6\,V$ et $V_2 = +12\,\text{V}$.

a. Quelle référence est utilisée pour ces potentiels ?

b. Quelle armature porte une charge positive ?

c. Calculer les charges Q_1 et Q_2 portées par ces armatures.

d. Calculer l'énergie $\mathcal{E}^e$ emmagasinée dans le condensateur.

2 Condensateur sphérique

Un condensateur sphérique est composé de deux sphères concentriques conductrices chargées et séparées par un isolant homogène de constante diélectrique ε_r. On note a le rayon de la sphère intérieure, portant la charge $+Q > 0$, et $b > a$ le rayon de la sphère extérieure, portant la charge $-Q$.

a. Quelles sont les symétries et les invariances du problème ?

b. Dans le systèmes de coordonnées sphériques associées au centre des sphères, le champ électrique vaut

$$\vec{\mathrm{E}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{\mathrm{u}}_r$$

entre les sphères ($a < r < b$) et $\vec{\mathrm{E}} = \vec{0}$ ailleurs. Calculer la ddp U entre les deux sphères.

c. En déduire la capacité de ce condensateur.

3 Condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique est formé de deux cylindres conducteurs coaxiaux de longueur ℓ, chargés et séparés par un isolant homogène de constante diélectrique ε_r. On note a le rayon du cylindre intérieur, portant la charge $+Q > 0$, et $b > a$ le rayon du cylindre extérieur, portant la charge $-Q$.

a. Quelles sont les symétries et les invariances du problème ? La charge se répartit-elle uniformément sur les cylindres ? On utilise le système de coordonnées cylindriques associées à l'axe des cylindres.

b. On suppose pourtant la charge uniformément répartie, et dans l'approximation du condensateur infiniment long ($\ell \gg b$), le champ électrique vaut

$$\vec{\mathrm{E}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \rho\ell}\vec{\mathrm{u}}_\rho$$

entre les deux cylindres ($a < \rho < b$) et $\vec{\mathrm{E}} = \vec{0}$ ailleurs. Calculer la ddp U entre les deux cylindres.

c. En déduire la capacité C de ce condensateur, et sa capacité linéique C/ℓ.

4 Condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux disques conducteurs parallèles de rayon a, portant des charges égales et opposées et séparés par une épaisseur ℓ d'un isolant homogène de constante diélectrique ε_r.

a. Quelles sont les symétries et les invariances du problème ? La charge se répartit-elle uniformément sur les disques ? On utilise le système de coordonnées cylindriques associées à l'axe des disques.

b. On suppose pourtant la charge uniformément répartie, et dans l'approximation du condensateur infiniment fin ($a \gg \ell$), le champ électrique vaut

$$\vec{\mathrm{E}} = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0\varepsilon_r a^2}\vec{\mathrm{u}}_x$$

entre les disques ($-\ell/2 < x < +\ell/2$) et $\vec{\mathrm{E}} = \vec{0}$ ailleurs. Calculer la ddp U entre les deux disques.

c. En déduire la capacité de ce condensateur.

5 Rigidité diélectrique

Un condensateur plan est rempli de polystyrène, isolant de constante diélectrique $\varepsilon_r = 2{,}6$ et de rigidité diélectrique $E_{\max} = 24\,\mathrm{MV/m}$, et sa capacité est de $C = 10\,\mathrm{pF}$.

a. Exprimer l'intensité E de ce champ en fonction de la ddp U aux bornes du condensateur et de l'épaisseur ℓ.

b. Quelle serait sa capacité C_0 s'il était rempli d'air ?

c. Quelle doit être l'aire minimale des plaques pour que le condensateur rempli de polystyrène puisse soutenir une ddp de $4\,\mathrm{kV}$?

TD4 - Champ magnétique, effet Hall, force de Laplace

1 Solénoïde des TP 2 et 3

Calculer le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde de 40 cm de long comportant 200 spires de rayon 25 mm traversé par un courant de 2 A. Préciser l'orientation du champ magnétique en fonction du sens du courant dans le solénoïde.

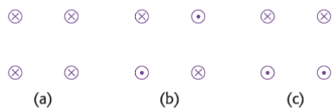
2 Bobine plate des TP 2 et 3

a. Calculer le champ magnétique B_0 au centre d'une bobine d'épaisseur 25 mm et comportant 90 spires de rayon 65 mm, pour une intensité de 2 A. Préciser l'orientation du champ magnétique en fonction du sens du courant.

b. Que devient ce champ magnétique sur l'axe de la bobine, à une distance $x = R$, $x = 10R$ puis $x = 20R$?

3 Fils électriques parallèles

Quatre fils électriques rectilignes infinis parcourus par des courants d'intensité I sont placés aux sommets d'un carré.



a. Pour les trois cas d'orientation des courants suivants, représenter sur un schéma les quatre vecteurs champ magnétique au centre du carré. Dans quel(s) cas le champ magnétique est-il non nul ?

b. Représenter dans le cas (b) la direction et le sens de la force de Laplace exercée sur le fil haut-droit par chacun des trois autres fils.

4 Courant Continu Haute Tension

La ligne électrique Jinping-Sunan est en 2015 la plus puissante du monde, avec des intensités continues atteignant 5kA.

a. En supposant cette ligne traversée d'Ouest en Est par une telle intensité, quelle force de Laplace le champ magnétique terrestre, orienté vers le nord et supposé horizontal et d'amplitude $B = 50\,\mu$T, exerce-t-il ?

b. En supposant qu'une telle intensité traverse en sens opposés deux fils électriques rectilignes infinis parallèles séparés d'une distance de 1 m, déteminer quelle force exercent les fils l'un sur l'autre.

5 Circulation sanguine

On utilise l'effet Hall pour mesurer la vitesse d'écoulement du sang dans une artère. Sous l'action d'un champ magnétique, les cations du sang se séparent des anions, ce qui crée une ddp dans l'artère. Si un champ magnétique de 0,5 mT produit une ddp de 1 μV dans une artère de diamètre intérieur 4 mm, quelle est la vitesse du sang ?

6 Solénoïde court

On considère un solénoïde court, constitué de N spires circulaires de courant I bobinées sur un cylindre de longueur ℓ et de centre O. Le calcul donne le champ magnétique

$$\vec{\mathrm{B}}_\ell(x) = \frac{\mu_0 N I}{2\ell}\left(\frac{x+\ell/2}{\sqrt{a^2+(x+\ell/2)^2}} - \frac{x-\ell/2}{\sqrt{a^2+(x-\ell/2)^2}}\right)\vec{\mathrm{u}}_x$$

en un point d'abscisse x de son axe.

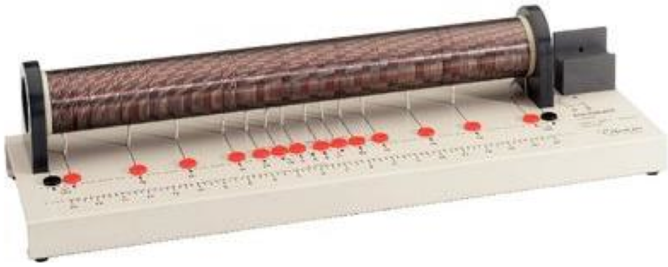
a. Trouver l'expression du champ magnétique $\vec{\mathrm{B}}_\infty$ du solénoïde long à la limite $\ell \to \infty$ en gardant la densité de spires N/ℓ constante ?

b. Trouver l'expression du champ magnétique $\vec{\mathrm{B}}_b(x)$ de la bobine plane à la limite $\ell \to 0$ en gardant le nombre de spires N constant.

TD5 - Induction, loi de Lenz-Faraday, inductance

1 Solénoïde des TP 2 et 3

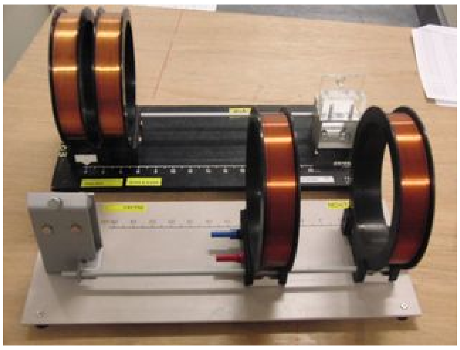
Un solénoïde de 40 cm de long est formé de deux enroulements comportant chacun 200 spires de rayon 25 mm .



Calculer l'inductance propre L de chaque enroulement et l'inductance mutuelle M entre deux enroulements. On utilise pour le champ magnétique l'approximation du solénoïde infini.

2 Bobine plate des TP 2 et 3

On considère deux bobines parallèles, et distantes de $x = 100\,\mathrm{mm}$, coaxiales, d'épaisseur 25 mm et comportant chacune 90 spires de rayon 65 mm.



Calculer l'inductance propre L de chaque bobine, et l'inductance mutuelle M entre les deux bobines. On utilise pour le champ magnétique la valeur sur l'axe de la bobine.

3 Bobine torique

On considère une bobine torique constitué d'un anneau isolant à section rectangulaire de hauteur h, de rayon intérieur a et de rayon extérieur $b > a$, sur lequel on bobine régulièrement N spires de fil électrique. La bobine étant traversée par un courant continu d'intensité I, on montre que le champ magnétique est nul $\vec{\mathrm{B}} = \vec{0}$ à l'extérieur de l'anneau et vaut à l'intérieur :

$$\vec{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi\rho}\vec{\mathrm{u}}_\theta$$

en utilisant le système de coordonnées cylindriques associées à l'axe de l'anneau. Calculer l'inductance propre L de la bobine.

4 Câble coaxial

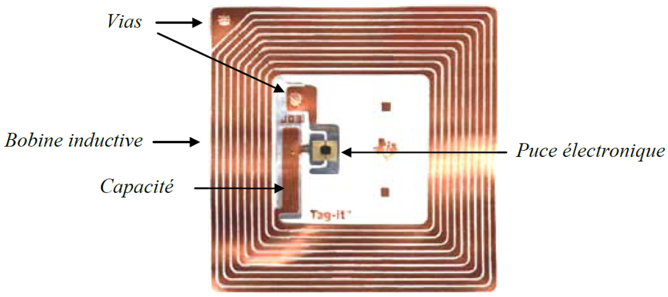
Un câble coaxial de longueur ℓ est constitué d'un fil électrique rectiligne circulaire de rayon a et d'un second conducteur cylindrique coaxial au fil et de rayon intérieur $b > a$. Les deux conducteurs sont séparés par un isolant homogène de constante diélectrique ε_r. Le fil est traversé par un courant $+I$ et le conducteur extérieur par le courant opposé. Dans le système de coordonnées cylindriques associé à l'axe des conducteurs, le champ magnétique vaut :

$$\vec{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{\mathrm{u}}_\theta$$

dans l'isolant séparant les deux conducteurs et $\vec{B} = \vec{0}$ ailleurs. Comment définir l'inductance propre L du câble ? Calculer cette inductance propre, et l'inductance linéique L/ℓ du câble.

5 Carte d'accès

Les technologies de radio-identification (puces RFID) sont des technologies d'identification sans contact massivement utilisées dans le quotidien (cartes d'identification pour le transport, l'emprunt de documents, puces antivol...). Elles sont pour la plupart basées sur l'induction électromagnétique, avec une architecture typique représentée sur la figure ci-dessous.



Prenons l'exemple d'une carte permettant de commander à distance la barrière d'accès d'un parking. L'antenne de la barrière est une boucle de courant circulaire de rayon 5 cm qui comporte 200 tours et qui est alimentée par un courant alternatif d'amplitude 2,5 mA. Elle emet régulièrement un train d'ondes à la fréquence de 400 MHz. La carte d'accès, de la taille d'une carte de crédit (5 cm par 8 cm), comporte une boucle de 200 tours de fils. L'antenne crée un champ magnétique qui induit dans la carte une tension électromotrice. Celle-ci alimente un circuit qui réémet une onde modulée selon un code qui est spécifique à la carte.

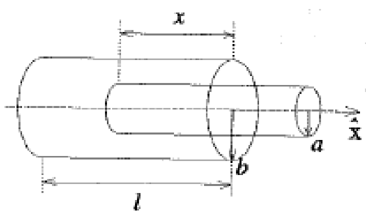
a. La carte est présentée dans l'axe de l'antenne, à une distance de 80 cm. Calculer la valeur du champ magnétique au centre de la carte.

b. Quelle est le coefficient de mutuelle inductance entre la carte et l'antenne en fonction de l'angle formé par l'axe de l'antenne et la normale à la surface de la carte ? On supposera le champ magnétique uniforme sur la surface de la carte.

c. En déduire la tension électromotrice induite dans la boucle de la carte.

6 Capteur de déplacement

Un capteur de déplacement est formé de deux bobines solénoïdales coaxiales de longueur ℓ comportant chacune N tours. Un courant $i(t) = I_0 \sin \omega t$ circule dans la bobine extérieure de rayon b. Le rayon b est beaucoup plus petit que la longueur ℓ, ce qui permet de considérer que le champ magnétique est constant à l'intérieur de la bobine et nul à l'extérieur.



a. Quel est le coefficient de mutuelle inductance entre les deux bobines lorsque le chevauchement entre les deux bobines est égal à x ?

b. En déduire la force électromotrice induite aux bornes de la bobine intérieure.

Une spire conductrice carrée de côté c est à une distance x d'un fil rectiligne infini parcouru par un courant continu I. La spire et le fil sont dans un même plan, avec deux des côtés de la spire parallèles au fil. Calculer la *fem* induite dans la spire lorsqu'on écarte celle-ci du fil à une vitesse v. Faire un schéma et spécifier le sens du courant induit.

TD6 - Onde électromagnétique

1 Longueur d'onde électromagnétique

Donner la fréquence et la longueur d'onde dans le vide des onde électromagnétiques suivantes :

a. une onde dans un circuit électrique à la fréquence secteur,

b. une onde radio pour la fréquence de RADIO GALÈRE 88.4 FM.

c. une microonde émise par un téléphone portable,

d. le faisceau d'un pointeur laser rouge.

2 Longueur d'onde acoustique

Calculer la longueur d'onde d'une onde sonore de fréquence $f = 440$ Hz (la) dans les milieux suivants : l'air ($v = 343$ m/s), l'eau ($v = 1480$ m/s), le verre ($v = 5300$ m/s), le sable ($v = 100$ m/s).

3 Câble coaxial du TP 4

Un câble coaxial forme une ligne de transmission de capacité linéique C et d'inductance linéique L valant :

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln(b/a)} \qquad\qquad L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

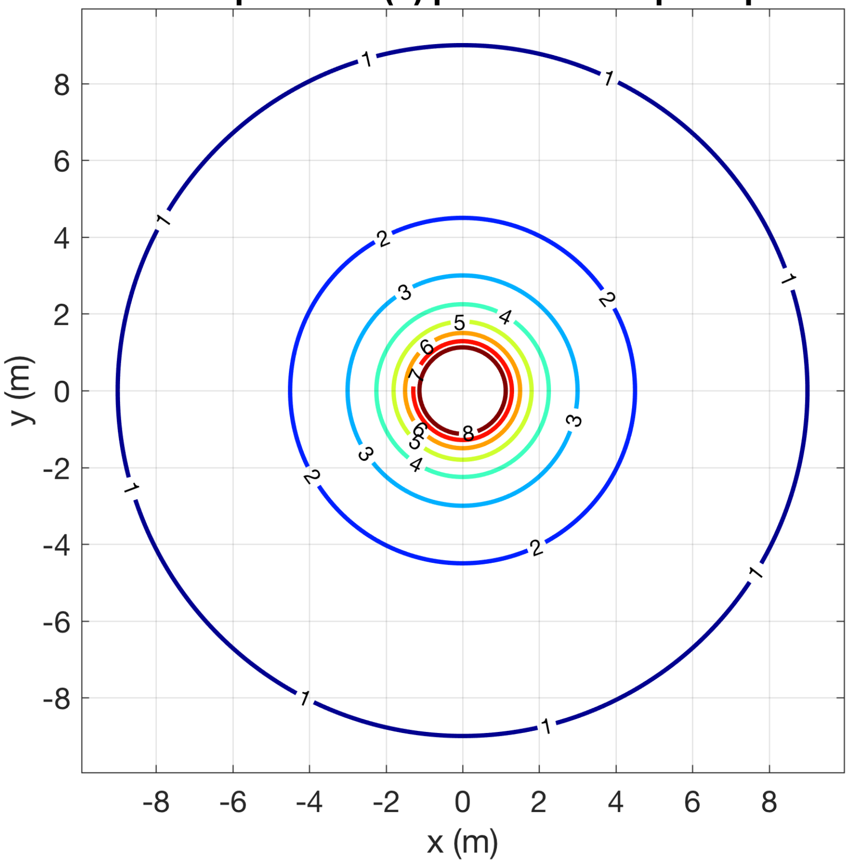
où a est le rayon du conducteur intérieur, b le rayon intérieur du conducteur extérieur et ε_r la constante diélectrique de l'isolant.

1. La vitesse
$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$
de l'onde électrique sur la ligne est mesurée à $2 \cdot 10^8$ m/s. En déduire la valeur de la constante diélectrique de l'isolant utilisé, du polyéthylène.

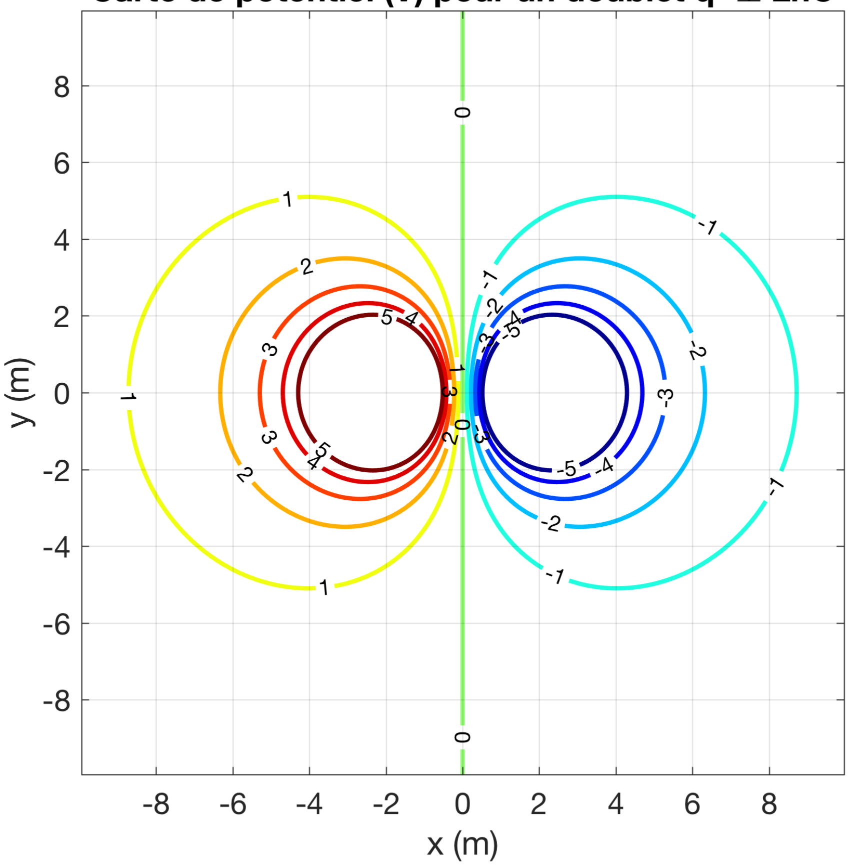
2. Pour ce câble, la mesure de l'impédance caractéristique
$$Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}}$$
donne $50\,\Omega$. En déduire les valeurs de C sa capacité linéique et L son inductance linéique, ainsi que le rapport b/a du câble.

3. La résistance ohmique R des conducteurs entraine une atténuation exponentielle de l'onde dans le câble. Le constructeur donne pour ce câble une atténuation de $A = 2\,\text{dB}/100\text{m}$. Cette atténuation A est reliée au coefficient d'amortissement α :
$$A = 100\frac{20\,\alpha}{\ln 10} \qquad\qquad \alpha = \frac{R}{2Z_C} \tag{1}$$
En déduire la valeur de R.

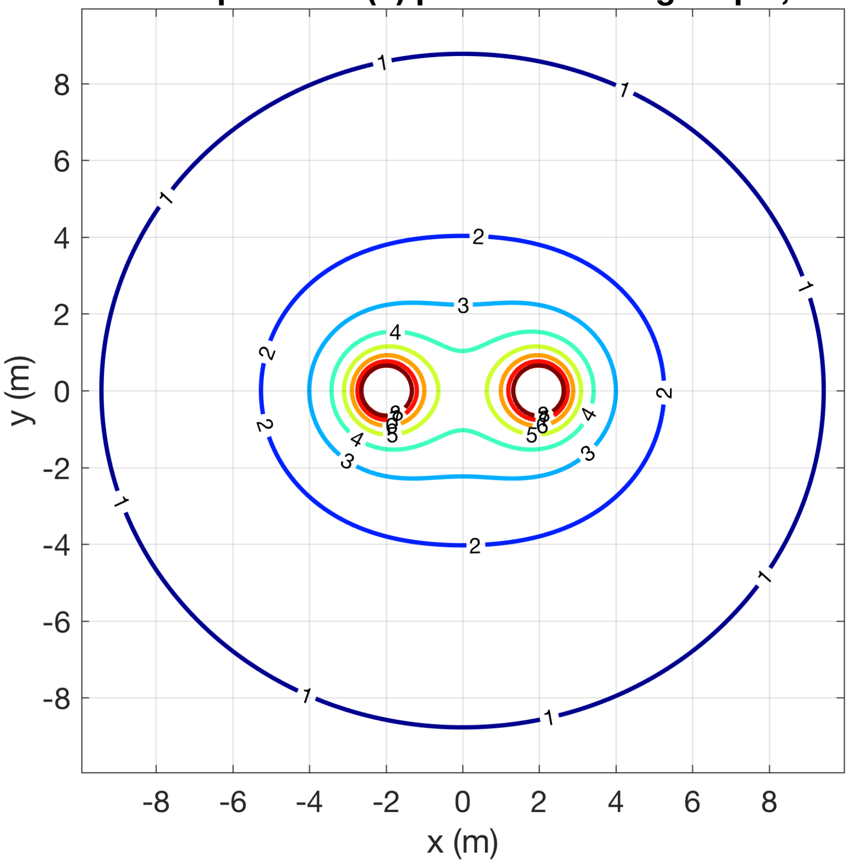
Carte de potentiel (V) pour un monopôle q=1nC



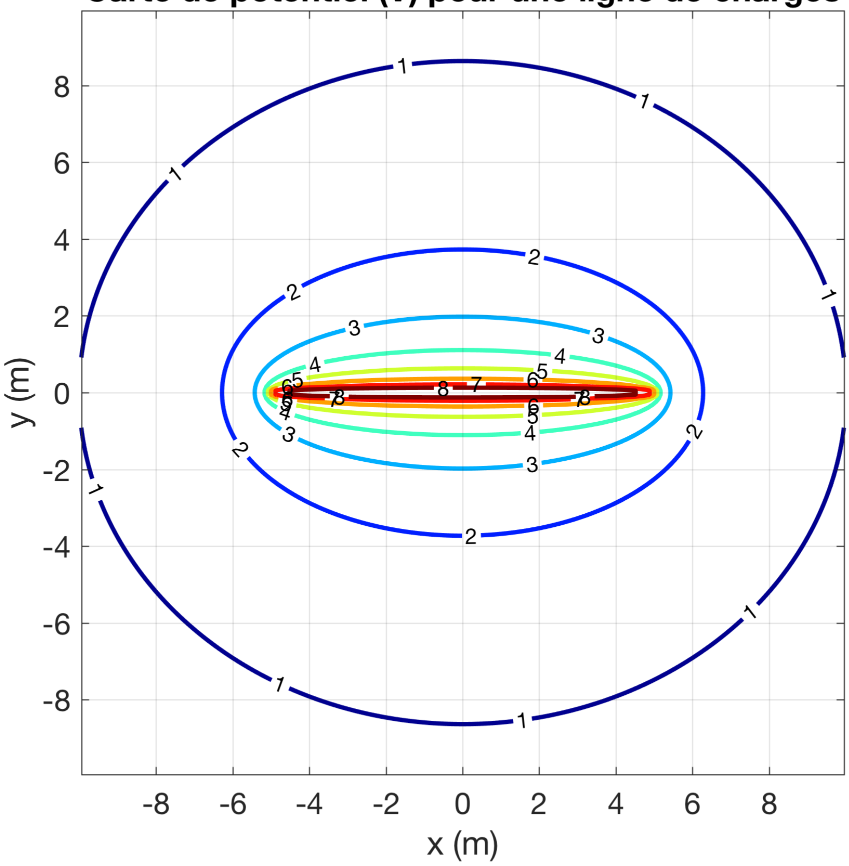
Carte de potentiel (V) pour un doublet q=± 2nC



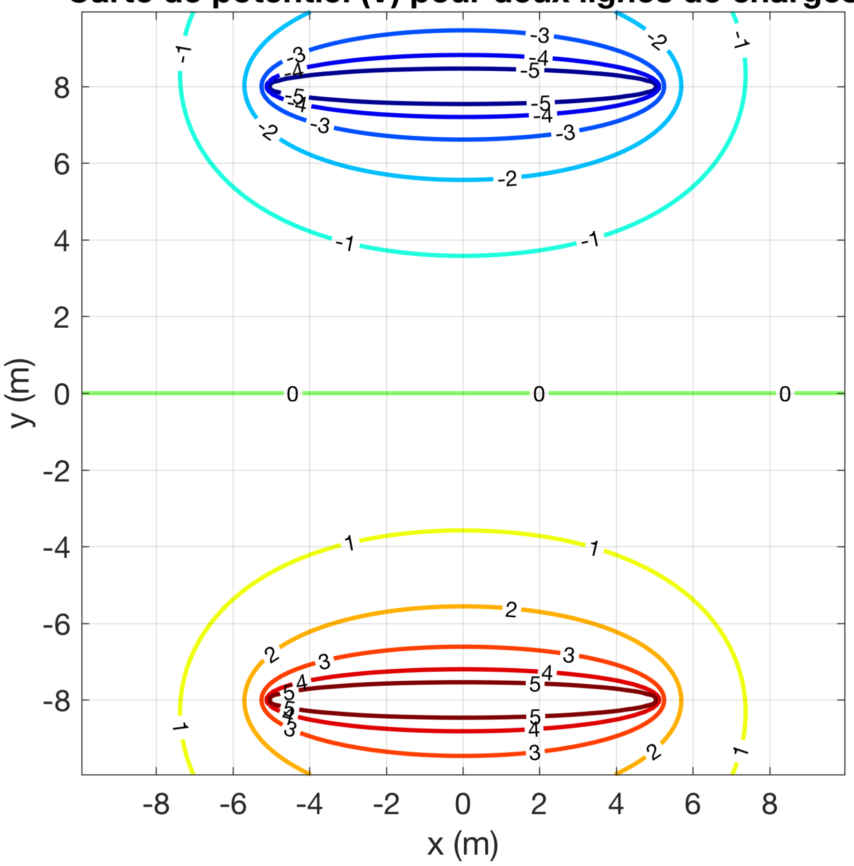
Carte de potentiel (V) pour deux charges q=0,5nC



Carte de potentiel (V) pour une ligne de charges



Carte de potentiel (V) pour deux lignes de charges



Carte de potentiel (V) pour un condensateur plan