

Pratique des modèles approchés de diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses

Gabriel Soriano – Charles-Antoine Guérin

22 juillet 2011

Table des matières

1	Introduction	1
2	Amplitude diffractée	2
3	Etude des dioptré plan	3
3.1	Réflexion	3
3.2	Fonction de Green	4
4	Approche de frontière et approximation(s) de Kirchhoff	5
4.1	Approximation du plan tangent	5
4.2	Approximation haute fréquence	6
5	Approche volumique et méthode perturbative	6
6	Moments de l'intégrale de Kirchhoff	7
6.1	Processus gaussien	8
A	Dyades	11

1 Introduction

Nous abordons ici la mise en œuvre numérique des méthodes approchées de diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses¹. Nous détaillerons les points suivants.

- L'utilisation du formalisme dyadique pour l'amplitude diffractée. Ce formalisme permet de s'affranchir de toute convention sur la base de polarisation. On peut alors retrouver l'expression de la matrice de polarisation dans la base classique, ou dans toute autre base.
- L'expression dyadique de l'amplitude diffractée est aussi indépendante du repère cartésien choisi. C'est très utile pour traiter des micro-rugosités sur des plans inclinés, comme dans le cas d'un modèle à deux échelles en télédétection océanique, ou pour de la propagation indoor en micro-ondes.

1. Lire *méthodes approchées de diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses*, par les mêmes auteurs

- Le calcul rapide, précis et fiable de l'intégrale de KIRCHHOFF statistique

$$\tilde{C}(\mathbf{Q}_H, Q_z) = e^{-Q_z^2 \sigma_h^2} \mathcal{F}[e^{Q_z^2 \rho(\mathbf{r})} - 1](\mathbf{Q}_H) \quad (1.1)$$

pour les différents spectres/corrélations les plus communément rencontrés à toutes les gammes de fréquence.

- Les méthodes modernes de diffraction qui reprennent les éléments des méthodes asymptotiques : méthode perturbative (SPM1) et Optique physique (KA) : la Small Slope Approximation à l'ordre 1 (SSA) et la Weighted Curvature Approximation (WCA).
- La prise en compte de la largeur du faisceau incident.
- La définition des différentes grandeurs utilisées en Optique, en microondes et en télé-détection : BRDF, SER...

2 Amplitude diffractée

On appelle air le milieu incident, homogène et transparent, de nombre d'onde

$$K = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.1)$$

réel à la pulsation de travail ω . La dépendance temporelle implicite est $e^{-i\omega t}$.

Dans un repère cartésien, la surface rugueuse $\Sigma : z = h(x, y) = h(\mathbf{r})$, déformation du plan (xOy), est l'interface entre l'air $z > h(\mathbf{r})$ ou tout autre milieu homogène et transparent pris comme référence et un milieu diffusant $z > h(\mathbf{r})$.

Le champ électrique vérifie en tout point $\mathbf{R} = \mathbf{r} + z\hat{\mathbf{z}}$ au dessus de la région de la surface $z > H = \max h$ l'équation de HELMHOLTZ $(\Delta + K^2)\mathbf{E} = \mathbf{0}$ d'où

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, z > H = \max h) = \int \frac{\mathbf{s}^-(\mathbf{k})}{q} e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - qz]} d\mathbf{k} + \int \frac{\mathbf{s}^+(\mathbf{k})}{q} e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + qz]} d\mathbf{k} \quad (2.2)$$

avec

$$\begin{cases} q = \sqrt{K^2 - \mathbf{k}^2} & k^2 \leq K^2 \\ q = i\sqrt{\mathbf{k}^2 - K^2} & k^2 > K^2 \end{cases} \quad (2.3)$$

La première intégrale porte sur les vecteurs d'onde $\mathbf{k} - q\hat{\mathbf{z}}$. Elle correspond à des ondes descendantes, soit le **champ incident** \mathbf{E}^i . La deuxième intégrale des ondes planes montantes de vecteurs d'onde $\mathbf{k} + q\hat{\mathbf{z}}$ s'identifie au **champ diffracté** \mathbf{E}^s .

Dans la direction $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$ et lorsque la distance $R = |\mathbf{R}| = \sqrt{\mathbf{r}^2 + z^2}$ tend vers l'infini ($KR \gg 1$), le terme $e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + qz]}$ de l'intégrande devient très rapidement oscillant. On peut facilement déterminer que la phase en est stationnaire pour $q\mathbf{r} = z\mathbf{k}$, soit $q\mathbf{R} = z\mathbf{K}$ et enfin $\mathbf{K} = K\hat{\mathbf{R}}$ d'où $\mathbf{k} = K\mathbf{r}/R$ et $q = Kz/R$. Alors, la méthode de la phase stationnaire donne l'expression du **champ lointain** diffracté

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}, z > H) = \int \frac{\mathbf{s}^+(\mathbf{k})}{q} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} d\mathbf{k} \sim -i \frac{e^{iKR}}{R} \mathbf{s}^+(\mathbf{k} = K \frac{\mathbf{r}}{R}) \quad (2.4)$$

qui s'applique notamment dans le cas d'une surface rugueuse éclairée par un faisceau collimaté.

La condition de divergence nulle du champ électrique dans l'air impose $\mathbf{s}^\pm(\mathbf{k}) \perp \mathbf{k} \pm q\hat{\mathbf{z}}$. $\mathbf{s}^-(\mathbf{k})$ et $\mathbf{s}^+(\mathbf{k})$ sont les amplitudes complexes vectorielles, ou vecteurs de Jones, des ondes planes constituant les champs incident et diffracté. Ces vecteurs n'ont que deux composantes indépendantes. Le plan perpendiculaire à $\mathbf{k} \pm q\hat{\mathbf{z}}$ est appelé **plan de polarisation**. Soient

$\hat{\mathbf{p}}_1^\pm(\mathbf{k})$ et $\hat{\mathbf{p}}_2^\pm(\mathbf{k})$ deux vecteurs unitaires indépendants de la rugosité et formant une base de ce plan, ou base de polarisation, les amplitudes s'écrivent

$$\mathbf{s}^- = \sum_{\alpha=1}^2 s_{\alpha}^- \hat{\mathbf{p}}_{\alpha}^- \quad \mathbf{s}^+ = \sum_{\beta=1}^2 s_{\beta}^- \hat{\mathbf{p}}_{\beta}^+ \quad (2.5)$$

Pour une onde plane incidente d'amplitude unité et de polarisation α

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{R}) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - q_0 z} \hat{\mathbf{p}}_{\alpha}^-(\mathbf{k}_0) \Leftrightarrow \mathbf{s}^-(\mathbf{k}) = q_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \hat{\mathbf{p}}_{\alpha}^-(\mathbf{k}_0) \quad (2.6)$$

avec $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ la distribution de Dirac dans l'espace des \mathbf{k} et centrée sur \mathbf{k}_0 , le champ diffracté permet de définir les éléments $S_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ de la **matrice de diffraction**

$$\mathbf{s}^+(\mathbf{k}) = \sum_{\beta=1}^2 S_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \hat{\mathbf{p}}_{\beta}^+(\mathbf{k}) \quad (2.7)$$

Par linéarité, cette matrice de diffraction permet de calculer le champ diffracté pour tout champ incident et toute polarisation, puisque si

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}, z) = \sum_{\alpha} \int \frac{s_{\alpha}^-(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{p}}_{\alpha}^-(\mathbf{k})}{q} e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - qz]} d\mathbf{k} \quad (2.8)$$

alors

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}, z > H) = \sum_{\beta, \alpha} \iint \frac{S_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') s_{\alpha}^-(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{p}}_{\beta}^+(\mathbf{k})}{qq'} e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + qz]} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \quad (2.9)$$

avec q' associé à \mathbf{k}' suivant (2.3). La matrice de diffraction définit entièrement le processus de diffraction, mais reste attachée au choix des vecteurs de polarisation $\hat{\mathbf{p}}$.

3 Etude des dioptré plan

Une surface rugueuse est avant tout un plan déformé, et le cas du plan fournit des outils qui seront utilisés pour les surfaces rugueuses.

3.1 Réflexion

On considère donc un dioptré plan d'équation $z = 0$ séparant l'air $z > 0$ d'un milieu diffractant de caractéristiques $\varepsilon(z)$ et $\mu(z)$ à la pulsation de travail ω . Pour une onde plane incidente de vecteur d'onde $\mathbf{K}^i = \mathbf{k} - q\hat{\mathbf{z}}$, avec \mathbf{k} réel et q suivant (2.3), on obtient une onde plane réfléchie de vecteur d'onde $\mathbf{K}^r = \mathbf{k} + q\hat{\mathbf{z}}$ et éventuellement une onde transmise; on distingue deux cas fondamentaux et indépendants de polarisation. Le plan d'incidence étant défini par les vecteurs \mathbf{k} et $\hat{\mathbf{z}}$ (on laisse pour l'instant de côté le cas de l'incidence normale $\mathbf{k} = \mathbf{0}$), on associe aux vecteurs de base

$$\hat{\mathbf{p}}_1^\pm(\mathbf{k}) = \frac{k\hat{\mathbf{z}} \mp q\hat{\mathbf{k}}}{K} \quad \hat{\mathbf{p}}_2^\pm(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{z}} \wedge \hat{\mathbf{k}} \quad (3.1)$$

les coefficients de réflexion $r_1(k)$ et $r_2(k)$.

Ces coefficients s'identifient dans le cas du milieu diffractant homogène aux coefficients de Fresnel

$$r_1 = \frac{\varepsilon q - \tilde{q}}{\varepsilon q + \tilde{q}} \quad r_2 = \frac{\mu q - \tilde{q}}{\mu q + \tilde{q}} \quad (3.2)$$

avec q défini par (2.3) et \tilde{q} vérifiant $k^2 + \tilde{q}^2 = K^2 \varepsilon \mu$ et $0 \leq \arg \tilde{q} \leq \pi/2$.

Ainsi, pour un vecteur de Jones incident $\mathbf{E}^i = E_1^i \hat{\mathbf{p}}_1^- + E_2^i \hat{\mathbf{p}}_2^-$, le vecteur de Jones réfléchi vaut

$$\mathbf{E}^r = E_1^r \hat{\mathbf{p}}_1^+ + E_2^r \hat{\mathbf{p}}_2^+ = r_1 E_1^i \hat{\mathbf{p}}_1^+ + r_2 E_2^i \hat{\mathbf{p}}_2^+ \quad (3.3)$$

$$= r_1 \hat{\mathbf{p}}_1^+ \hat{\mathbf{p}}_1^- \cdot \mathbf{E}^i + r_2 \hat{\mathbf{p}}_2^+ \hat{\mathbf{p}}_2^- \cdot \mathbf{E}^i \quad (3.4)$$

$$= (r_1 \hat{\mathbf{p}}_1^+ \hat{\mathbf{p}}_1^- + r_2 \hat{\mathbf{p}}_2^+ \hat{\mathbf{p}}_2^-) \cdot \mathbf{E}^i \quad (3.5)$$

$$= \mathbb{R} \cdot \mathbf{E}^i \quad (3.6)$$

où \mathbb{R} est la dyade de réflexion. Un tenseur d'ordre 2 ou dyade est une application linéaire qui associe un vecteur à un vecteur. Pour ceux qui ne sont pas familiers avec les dyades, c'est le moment de se reporter à la petite annexe A.

Dans le cas de l'incidence normale, lorsque $k \rightarrow 0$ à $\hat{\mathbf{k}}$ fixé, $r_1 \rightarrow -r_2$ et $\hat{\mathbf{p}}_1^\pm \rightarrow \mp \hat{\mathbf{k}}$, de sorte que

$$\mathbb{R} \rightarrow r_2 [\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} + (\hat{\mathbf{z}} \wedge \hat{\mathbf{k}})(\hat{\mathbf{z}} \wedge \hat{\mathbf{k}})] = r_2 (1 - \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}}) \quad (3.7)$$

Ainsi, si les vecteurs de polarisation ne doivent pas être utilisés en incidence normale, la dyade de réflexion, elle est définie pour tous les \mathbf{k} réels.

Les ondes électromagnétiques étant transverses, on utilise beaucoup la dyade $\mathbb{P} = 1 - \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}}$, qui supprime la composante longitudinale. On définit ainsi le projecteur

$$\mathbb{P}^\pm(\mathbf{k}) = 1 - \frac{(\mathbf{k} \pm q \hat{\mathbf{z}})(\mathbf{k} \pm q \hat{\mathbf{z}})}{K^2} \quad (3.8)$$

qui vérifie notamment

$$\mathbb{P}^+(\mathbf{k}) \cdot \mathbb{R}(\mathbf{k}) = \mathbb{R}(\mathbf{k}) = \mathbb{R}(\mathbf{k}) \cdot \mathbb{P}^-(\mathbf{k}) \quad (3.9)$$

On conclue ce paragraphe sur l'expression de la dyade de réflexion.

$$\mathbb{R}(\mathbf{k}) = r_1(k) \hat{\mathbf{p}}_1^+(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{p}}_1^-(\mathbf{k}) + r_2(k) \hat{\mathbf{p}}_2^+(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{p}}_2^-(\mathbf{k}) \quad (3.10)$$

$$\mathbb{R}(\mathbf{0}) = r_2(0)(1 - \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}}) = r_2(0) \mathbb{P}^\pm(\mathbf{0}) \quad (3.11)$$

3.2 Fonction de Green

Sous la dépendance temporelle adoptée $e^{-i\omega t}$, la fonction de Green scalaire de l'espace libre G , solution élémentaire causale de l'équation de Helmholtz $(\Delta + K^2)G = \delta$ s'écrit comme la somme d'ondes planes scalaires

$$G(\mathbf{R} = \mathbf{r} + z \hat{\mathbf{z}}) = -\frac{e^{iKR}}{4\pi R} = -\frac{i}{8\pi^2} \int \frac{e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + q|z|]}}{q} d\mathbf{k} \quad (3.12)$$

tandis que la dyade de Green électrique de l'espace libre \mathbb{G} , solution élémentaire causale de l'équation de propagation $(\mathbf{rot} \mathbf{rot} - K^2)\mathbb{G} = \delta \mathbb{I}$ vaut

$$\mathbb{G}(\mathbf{R}) = -\left(\mathbb{I} + \frac{\mathbf{grad} \mathbf{grad}}{K^2} \right) G(\mathbf{R}) = -\frac{\delta(\mathbf{R})}{K^2} \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} + \frac{i}{8\pi^2} \int \frac{e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + q|z|]}}{q} \mathbb{P}^{\text{sgn}(z)}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (3.13)$$

avec \mathbb{I} la dyade identité, $\text{sgn}(z)$ le signe de z et voir (A.7) pour le double gradient.

Considérons maintenant un point source $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 + z_1 \hat{\mathbf{z}}$ et un point d'observation $\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 + z_2 \hat{\mathbf{z}}$, tous deux dans l'air au dessus du dioptré plan d'équation $z = 0$.

$$\tilde{\mathbb{G}}(\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, z_1, z_2) = -\frac{\delta(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)}{K^2} \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} \quad (3.14)$$

$$+ \frac{i}{8\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{q} \left(e^{iq|z_2 - z_1|} \mathbb{P}^{\text{sgn}(z_2 - z_1)}(\mathbf{k}) + e^{iq(z_2 + z_1)} \mathbb{R}(\mathbf{k}) \right) d\mathbf{k} \quad (3.15)$$

La partie singulière (3.14) de la dyade de Green du dioptre $\tilde{\mathbf{G}}$ s'identifie à celle de l'espace libre, tandis que le reste intégral (3.15) est la somme d'un terme d'interaction directe et d'un terme comportant une réflexion, sa partie singulière

4 Approche de frontière et approximation(s) de Kirchhoff

Dans le cas où la surface rugueuse $\Sigma : z = h(\mathbf{r})$ est l'interface entre l'air et un milieu diffractant, de vecteur $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{grad} h$ normal à la surface et dirigé vers le vide, le formalisme intégral de frontière permet d'établir que l'amplitude diffractée $s^+(\mathbf{k})$ s'exprime en fonction des composantes tangentielles $\mathbf{m} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}^s$ et $\mathbf{j} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^s$ du champ électromagnétique diffracté à la limite depuis l'air sur le point $\mathbf{r} + h(\mathbf{r})\hat{\mathbf{z}}$ de Σ comme l'intégrale

$$\mathbf{s}^+(\mathbf{k}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} [(\mathbf{k} + q\hat{\mathbf{z}}) \wedge \mathbf{m} + K Z \mathbb{P}^+(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j}] e^{-i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + qh(\mathbf{r})]} d\mathbf{r} \quad (4.1)$$

où Z est l'impédance caractéristique de l'air. La résolution du problème direct de diffraction est donc ramené à la recherche de \mathbf{m} et \mathbf{j} pour une surface et un champ incident donnés.

4.1 Approximation du plan tangent

L'approximation de Kirchhoff-plan tangent propose de considérer la surface rugueuse comme localement plane et d'utiliser la dyade de réflexion pour déterminer \mathbf{m} et \mathbf{j} . Cela suppose que le champ incident est une onde plane, de vecteur d'onde $\mathbf{K}_0 = \mathbf{k}_0 - q_0\hat{\mathbf{z}}$. En un point de la surface de normale $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}/\|\mathbf{n}\|$, le vecteur d'onde s'écrit $\mathbf{K}_0 = \mathbf{k}_0^\ell - q_0^\ell \hat{\mathbf{n}}$, avec $\mathbf{k}_0^\ell \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, et la dyade de réflexion $\mathbb{R}(\mathbf{k}_0^\ell, \hat{\mathbf{n}})$ s'obtient suivant (3.1) avec les substitutions $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}_0^\ell$, $q \rightarrow q_0^\ell$ et $\hat{\mathbf{z}} \rightarrow \hat{\mathbf{n}}$. On pose

$$\mathbf{E}^s = \mathbb{R}(\mathbf{k}_0^\ell, \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{E}^0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - q_0 h(\mathbf{r})} \quad \mathbf{H}^s = \frac{(\mathbf{k}_0^\ell + q_0^\ell \hat{\mathbf{n}}) \wedge \mathbf{E}^s}{KZ} \quad (4.2)$$

pour obtenir \mathbf{m} et \mathbf{j} à injecter dans (4.1), et ainsi obtenir l'amplitude diffractée pour la direction $\mathbf{K} = \mathbf{k} + q\hat{\mathbf{z}}$ dans le cadre de l'approximation de Kirchhoff-plan tangent.

Cette expression comporte notamment le terme d'Optique physique

$$e^{-i\Phi(\mathbf{r})} \quad \Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r} + Q_z h(\mathbf{r}) \quad \mathbf{Q}_H = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0 \quad Q_z = q + q_0 \quad (4.3)$$

qui permet d'effectuer certaines intégrales surfaciques analytiquement. Notamment, si on suppose que $\int \mathbf{grad} \Phi e^{-i\Phi} d\mathbf{r} = \mathbf{0}$, et on dit à ce moment là qu'on *néglige les effets de bord*, alors

$$\int \mathbf{grad} \Phi e^{-i\Phi} d\mathbf{r} = \mathbf{0} = \int [\mathbf{Q}_H + Q_z \mathbf{grad} h] e^{-i\Phi} d\mathbf{r} \quad (4.4)$$

$$\Rightarrow -\frac{\mathbf{Q}}{Q_z} \int e^{-i\Phi} d\mathbf{r} = \int (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{grad} h) e^{-i\Phi} d\mathbf{r} = \int \mathbf{n} e^{-i\Phi} d\mathbf{r} \quad (4.5)$$

avec $\mathbf{Q} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}_H + Q_z \hat{\mathbf{z}}$. Le vecteur \mathbf{n} , pondérée par le terme d'Optique physique, est ainsi intégrable, mais pas le terme $\mathbb{R}(\mathbf{k}_0^\ell, \hat{\mathbf{n}})$, parce qu'il ne dépend pas linéairement des pentes $\mathbf{grad} h$.

4.2 Approximation haute fréquence

Pour aller plus loin, il faut tenir un raisonnement haute fréquence. Le terme d'Optique physique $e^{-i\Phi(\mathbf{r})}$ sera rapidement oscillant avec $K \rightarrow \infty$. Les points brillants, principaux contributeurs à l'intégrale, sont ceux pour lesquels la phase Φ est stationnaire, c'est-à-dire vérifiant

$$\mathbf{grad} \Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{grad} h(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{Q}_H}{Q_z} \Leftrightarrow \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{Q}}{Q_z} \Leftrightarrow \quad (4.6)$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|} \Leftrightarrow \mathbf{k}_0^\ell + q_0^\ell \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k} + q\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{K} \Leftrightarrow \mathbf{k}_0^\ell = \frac{\mathbf{K} + \mathbf{K}_0}{2} \quad (4.7)$$

et géométriquement, ces points sont pour le couple $(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ en configuration de réflexion spéculaire.

Pour ces points brillants, après quelques manipulations d'algèbre vectorielle et avec $\mathbf{K} \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbf{E}^0 = 0$, il apparaît que les deux termes de l'intégrande de (4.1) sont égaux

$$(\mathbf{k} + q\hat{\mathbf{z}}) \wedge \mathbf{m} = KZ\mathbb{P}^+(\mathbf{k})\mathbf{j} = -\frac{K^2 - \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}_0}{q + q_0} \mathbb{R}(\mathbf{k}_0^\ell, \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{E}^0 = \frac{\mathbb{K}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{E}^0}{q + q_0} \quad (4.8)$$

et permettent de définir la dyade de Kirchhoff \mathbb{K} :

$$\mathbb{K}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = (K^2 - \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}_0) \mathbb{R} \left(\mathbf{k}_0^\ell = \frac{\mathbf{K} + \mathbf{K}_0}{2}, \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{K} - \mathbf{K}_0}{|\mathbf{K} - \mathbf{K}_0|} \right) \quad (4.9)$$

L'intégrale scalaire

$$A(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} e^{-i\Phi(\mathbf{r})} d\mathbf{r} \quad \Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r} + Q_z h(\mathbf{r}) \quad \mathbf{Q}_H = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0 \quad Q_z = q + q_0 \quad (4.10)$$

est appelée intégrale de Kirchhoff ou intégrale de l'Optique physique.

L'approximation de Kirchhoff-haute fréquence consiste se placer aux points brillants pour obtenir la dyade de Kirchhoff, tout en gardant l'intégrale de Kirchhoff. La dyade de diffraction s'écrit alors finalement

$$\mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{\mathbb{K}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)}{Q_z} A(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \quad (4.11)$$

5 Approche volumique et méthode perturbative

Pour l'approche volumique, on considère un dépôt rugueux $\mathcal{D} : 0 < z < h(\mathbf{r})$ homogène de caractéristiques ε et μ sur un dioptre $z = 0$ de dyade de réflexion \mathbb{R} , le tout éclairé par une onde plane. Le problème de référence est constitué du dioptre seul, pour lequel le champ vaut dans l'air facilement

$$z > 0, \tilde{\mathbf{E}}^i(\mathbf{r}, z) = \mathbf{E}^0 e^{i[\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - q_0 z]} + \mathbb{R}(\mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{E}^0 e^{i[\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} + q_0 z]} \quad (5.1)$$

$$= e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} \left[\mathbb{P}^-(\mathbf{k}_0) e^{-iq_0 z} + \mathbb{R}(\mathbf{k}_0) e^{+iq_0 z} \right] \cdot \mathbf{E}^0 \quad (5.2)$$

et le champ électrique pour le problème complet vérifie en tout point au dessus du dioptre

$$z > 0, \mathbf{E}(\mathbf{r}, z) = \tilde{\mathbf{E}}^i(\mathbf{r}, z) + K^2(\varepsilon\mu - 1) \int_{\mathcal{D}} \tilde{\mathbb{G}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', z', z) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', z') d\mathbf{r}' dz' \quad (5.3)$$

avec $\tilde{\mathbb{G}}$ la dyade de Green du dioptre plan. On peut traiter analytiquement la partie (3.14), et en notant $\tilde{\mathbb{G}}^r$ sa partie intégrale (3.15),

$$z > h(\mathbf{r}), \mathbf{E}(\mathbf{r}, z) = \tilde{\mathbf{E}}^i(\mathbf{r}, z) + K^2(\varepsilon\mu - 1) \int d\mathbf{r}' \int_0^{h(\mathbf{r}')} dz' \tilde{\mathbb{G}}^r(\mathbf{r} - \mathbf{r}', z', z) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', z') \quad (5.4)$$

$$0 < z < h(\mathbf{r}), \mathbf{E}(\mathbf{r}, z) = \mathbb{A} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^i(\mathbf{r}, z) + K^2(\varepsilon\mu - 1) \int d\mathbf{r}' \int_0^{h(\mathbf{r}')} dz' \mathbb{A} \cdot \tilde{\mathbb{G}}^r(\mathbf{r} - \mathbf{r}', z', z) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', z') \quad (5.5)$$

avec la dyade

$$\mathbb{A} = \mathbb{I} + \left(\frac{1}{\varepsilon\mu} - 1\right) \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}} \quad (5.6)$$

Maintenant, on cherche le développement de \mathbf{E} par rapport au petit paramètre h : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \dots$ où \mathbf{E}_n est d'ordre n , c'est-à-dire varie comme h^n . Pour ce, on injecte (5.5) dans (5.4), et ce plusieurs fois. Au bout de n fois, on se retrouve avec $n + 2$ termes dans l'expression de \mathbf{E} , les termes de rang $1 \leq m \leq n + 1$ ne faisant intervenir que $\tilde{\mathbf{E}}^i$. Le premier terme $\mathbf{E}(\mathbf{r}, z)$ ne dépend pas de h , il est d'ordre 0 ; ensuite chacun des termes de rang $m \leq n + 2$ comprend $m - 1$ intégrales verticales, il contribue donc aux termes du développement d'ordre $m - 1$ ou plus. Ainsi, les $n + 1$ termes de l'expression contiennent au complet les termes du développement jusqu'à l'ordre n .

Le terme $K^2(\varepsilon\mu - 1) \int d\mathbf{r}' \int_0^{h(\mathbf{r}')} dz' \tilde{\mathbb{G}}^r(\mathbf{r} - \mathbf{r}', z', z) \cdot \mathbb{A} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^i(\mathbf{r}', z')$ contient donc entièrement l'ordre 1 et partiellement les ordres supérieurs. Pour isoler l'ordre 1, il faut remarquer que pour $z > H = \max h$, $\tilde{\mathbb{G}}^r(\mathbf{r} - \mathbf{r}', z', z)$ et $\tilde{\mathbf{E}}^i(\mathbf{r}', z')$ sont deux fonctions dérivables de z' sur le domaine d'intégration, et elles peuvent être développées en $z' = 0^+$, de telle sorte que

$$z > H, \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, z) = K^2(\varepsilon\mu - 1) \int d\mathbf{r}' h(\mathbf{r}') \tilde{\mathbb{G}}^r(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0^+, z) \cdot \mathbb{A} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^i(\mathbf{r}', 0^+) \quad (5.7)$$

soit avec (3.15) et $\tilde{h}(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi^2} \int h(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}$,

$$z > H, \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, z) = \int d\mathbf{k} \frac{e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + qz]}}{q} \tilde{h}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) iK^2 \frac{\varepsilon\mu - 1}{2} [\mathbb{P}^+(\mathbf{k}) + \mathbb{R}(\mathbf{k})] \cdot \mathbb{A} \cdot [\mathbb{P}^-(\mathbf{k}_0) + \mathbb{R}(\mathbf{k}_0)] \cdot \mathbf{E}^0 \quad (5.8)$$

6 Moments de l'intégrale de Kirchhoff

On a défini l'intégrale de Kirchhoff pour une surface rugueuse $\Sigma : z = h(\mathbf{r})$ comme

$$A(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} e^{-i[\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r} + Q_z h(\mathbf{r})]} d\mathbf{r} \quad (6.1)$$

avec $\mathbf{Q}_H = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ et $Q_z = q + q_0$. Maintenant, si h est un processus stochastique stationnaire de densité de probabilité (pdf) $p(h)$, centré $\langle h \rangle = \int h p(h) dh = 0$, d'écart-type $\sigma_h = \sqrt{\langle h^2 \rangle}$ et de fonction de corrélation $\rho(\mathbf{r}) = \sigma_h^2 u(\mathbf{r})$ définie par

$$\rho(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \langle h(\mathbf{r}_2) h(\mathbf{r}_1) \rangle = \langle h_2 - h_1 \rangle \quad (6.2)$$

on cherche à caractériser A d'un point de vue statistique au second ordre : moyenne et variance.

Moyenne La moyenne de l'intégrale de KIRCHHOFF

$$\langle A(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int \langle e^{-iQ_z h} \rangle e^{-i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \langle e^{-iQ_z h} \rangle \delta(\mathbf{Q}_H) = \phi(-2q_0) \delta(\mathbf{Q}_H) \quad (6.3)$$

fait intervenir la fonction caractéristique de la distribution des hauteurs

$$\phi(k) = \langle e^{ikh} \rangle = \int e^{ikh} p(h) dh \quad (6.4)$$

et la distribution de DIRAC $\delta(\mathbf{Q}_H) = \frac{1}{4\pi^2} \int e^{-i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}$, ce qui indique que le champ moyen ou champ cohérent est confiné à la direction de réflexion spéculaire $\mathbf{Q}_H = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{k} = \mathbf{k}_0 \Rightarrow Q_z = 2q_0$. Le champ moyen de l'intégrale de KIRCHHOFF ne dépend que de la distribution des hauteurs, et pas de leur corrélation.

Variance Pour la variance de l'intégrale de KIRCHHOFF,

$$\langle A(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) A^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}_0) \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{1}{4\pi^2} \int \langle e^{iQ_z(h_2 - h_1)} \rangle e^{-i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (6.5)$$

où h_1 et h_2 sont les hauteurs de deux points décalés de $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Ainsi on cherche la fonction caractéristique du processus différence $h_2 - h_1$, les deux processus h_1 et h_2 étant corrélé de coefficient $\rho(\mathbf{r}) = \sigma_h^2 u(\mathbf{r})$. On peut facilement établir

$$\langle h_2 - h_1 \rangle = 0 \quad \langle (h_2 - h_1)^2 \rangle = 2\sigma^2 [1 - u(\mathbf{r})] \quad (6.6)$$

en remarquant que $\langle (h_2 - h_1)^2 \rangle \rightarrow 0$ à faible distance et $\langle (h_2 - h_1)^2 \rangle \rightarrow 2\sigma^2$ à l'infini. Ainsi, à grande distance,

$$\langle e^{iQ_z(h_2 - h_1)} \rangle \rightarrow \langle e^{iQ_z h_2} \rangle \langle e^{-iQ_z h_1} \rangle = |\phi(Q_z)|^2 \quad (6.7)$$

et finalement,

$$\langle \delta A(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \delta A^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}_0) \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') I(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \quad (6.8)$$

$$I(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int \left[\langle e^{iQ_z(h_2 - h_1)} \rangle - |\phi(Q_z)|^2 \right] e^{-i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (6.9)$$

Cette variance va dépendre à la fois de la distribution p et de la corrélation ρ des hauteurs. Le terme entre crochets se révèle être dans le cas général stationnaire une fonction de \mathbf{r} et $\alpha = Q_z^2 \sigma_h^2$. On décompose :

$$I(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \tilde{C}(\mathbf{Q}_H, Q_z^2 \sigma_h^2) = \frac{1}{4\pi^2} \int C(\mathbf{r}, Q_z^2 \sigma_h^2) e^{-i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (6.10)$$

$$C(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, Q_z^2 \sigma_h^2) = \langle e^{-iQ_z(h_2 - h_1)} \rangle - |\phi(Q_z)|^2 \quad (6.11)$$

6.1 Processus gaussien

On traite ici le cas particulier d'un processus stationnaire gaussien centré. On note $p_g(h) = e^{-(h/\sigma_h)^2/2} / \sqrt{2\pi}\sigma_h$ la pdf de sa hauteur, d'écart-type σ_h .

Pour le champ moyen (6.3), on a directement $2\pi\tilde{p}(Q_z) = e^{-\frac{Q_z^2 \sigma_h^2}{2}}$ ce qui indique que le champ moyen décroît très rapidement avec la fréquence ou la rugosité, sauf aux angles rasants.

Concernant le champ incohérent, le processus $Q_z h(\mathbf{r}_2) - Q'_z h(\mathbf{r}_1)$ est gaussien centré de variance $[(Q_z^2 + Q'^2_z) - 2Q_z Q'_z u(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] \sigma_h^2$, de sorte que directement, $\langle e^{-iQ_z h(\mathbf{r}_2) + iQ'_z h(\mathbf{r}_1)} \rangle = e^{-\left\{ \frac{Q_z^2 + Q'^2_z}{2} + Q_z Q'_z u(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \right\} \sigma_h^2}$.

Ainsi,

$$2\pi\tilde{p}(Q_z) = e^{-\frac{Q_z^2\sigma_h^2}{2}} \quad (6.12)$$

$$C(\mathbf{r}, Q_z^2\sigma_h^2) = e^{-Q_z^2\sigma_h^2}(e^{Q_z^2\sigma_h^2 u(\mathbf{r})} - 1) \quad (6.13)$$

sont analytiques, il reste toutefois à évaluer $\tilde{C}(\mathbf{k}, Q_z^2\sigma_h^2)$.

En notant $\alpha = Q_z^2\sigma_h^2$, on écrit

$$C(\mathbf{r}, \alpha) = \frac{e^{\alpha u(\mathbf{r})} - 1}{e^\alpha} = \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\alpha} \alpha^n}{n!} u^n(\mathbf{r}) = \sum_{n \geq 1} f_\alpha(n) u^n(\mathbf{r}), \quad f_\alpha(x) = \frac{e^{-\alpha} \alpha^x}{\Gamma(x+1)} \quad (6.14)$$

$$\Rightarrow \tilde{C}(\mathbf{Q}_H, \alpha) = \sum_{n \geq 1} f_\alpha(n) \mathcal{F}[u^n](\mathbf{Q}_H) = \sum_{n \geq 1} f_\alpha(n) \tilde{u}^{*n}(\mathbf{Q}_H) \quad (6.15)$$

où \tilde{u}^{*n} est la nième puissance convolutive de $\tilde{u} = \tilde{\rho}/\sigma_h^2$, et Γ est la fonction Gamma.

Termes prépondérants Pour $\alpha > 1, x \geq 1$, la fonction $f_\alpha(x) = \frac{e^{-\alpha} \alpha^x}{\Gamma(x+1)}$ est d'abord croissante à cause du terme α^x , puis le factoriel devient prépondérant, faisant rapidement tendre f_α vers zéro. On trouve que $f_\alpha(x)$ est maximale au voisinage de $x = \alpha$.

$$f'_\alpha(x) = 0 \Rightarrow x \simeq \alpha \quad (6.16)$$

La formule de Stirling, valable pour $x \gg 1$, donne $\alpha = x e^{\frac{1}{2x}}$.

Ainsi les termes prédominant de la série $\sum_{n \geq 1} f_\alpha(n)$ se situent pour les n au voisinage de $\alpha = Q_z^2\sigma_h^2$, et il apparaît (figure 1) que la largeur de ce voisinage varie comme $\sqrt{\alpha}$ dès que n dépasse quelques unités. L'expérience numérique montre que ce résultat reste valable pour la série (6.15).

Ceci s'explique au moins partiellement par le fait que \tilde{u} constitue une densité de probabilité :

- $\tilde{u}(\mathbf{k}) > 0$,
- $\int \tilde{u}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = u(\mathbf{0}) = 1$,
- ρ est dérivable et maximum en $\mathbf{0}$, d'où $-i \mathbf{grad} \rho(\mathbf{0}) = \int \mathbf{k} \tilde{u}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \mathbf{0}$,
- les dérivées secondes de ρ en $\mathbf{0}$

$$- \mathbf{grad} \mathbf{grad} u(\mathbf{0}) = \int \mathbf{k} \mathbf{k} \tilde{u}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \frac{1}{\sigma_h^2} \begin{bmatrix} s_x^2 & 0 \\ 0 & s_y^2 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

fournissent les pentes quadratiques moyennes s_x et s_y .

Corrélation gaussienne Pour une corrélation gaussienne de hauteur quadratique moyenne σ_h et de longueurs de corrélations $\ell_x = \sqrt{2}\sigma_h/s_x$ suivant l'axe des x et $\ell_y = \sqrt{2}\sigma_h/s_y$ suivant l'axe des y ,

$$u_g(\mathbf{r}) = e^{-(x^2/\ell_x^2 + y^2/\ell_y^2)} \rightarrow \tilde{u}(\mathbf{Q}_H) = \frac{\ell_x \ell_y}{4\pi} e^{-\frac{1}{4}(Q_x^2 \ell_x^2 + Q_y^2 \ell_y^2)} \quad (6.18)$$

$$u_g^n(\mathbf{r}) = e^{-n(x^2/\ell_x^2 + y^2/\ell_y^2)} \rightarrow \tilde{u}^{*n}(\mathbf{Q}_H) = \frac{\ell_x \ell_y}{4\pi n} e^{-\frac{1}{4n}(Q_x^2 \ell_x^2 + Q_y^2 \ell_y^2)} \quad (6.19)$$

$$= \frac{\sigma_h^2}{2\pi n s_x s_y} e^{-\frac{1}{2n}(Q_x^2 \sigma_h^2 / s_x^2 + Q_y^2 \sigma_h^2 / s_y^2)} \quad (6.20)$$

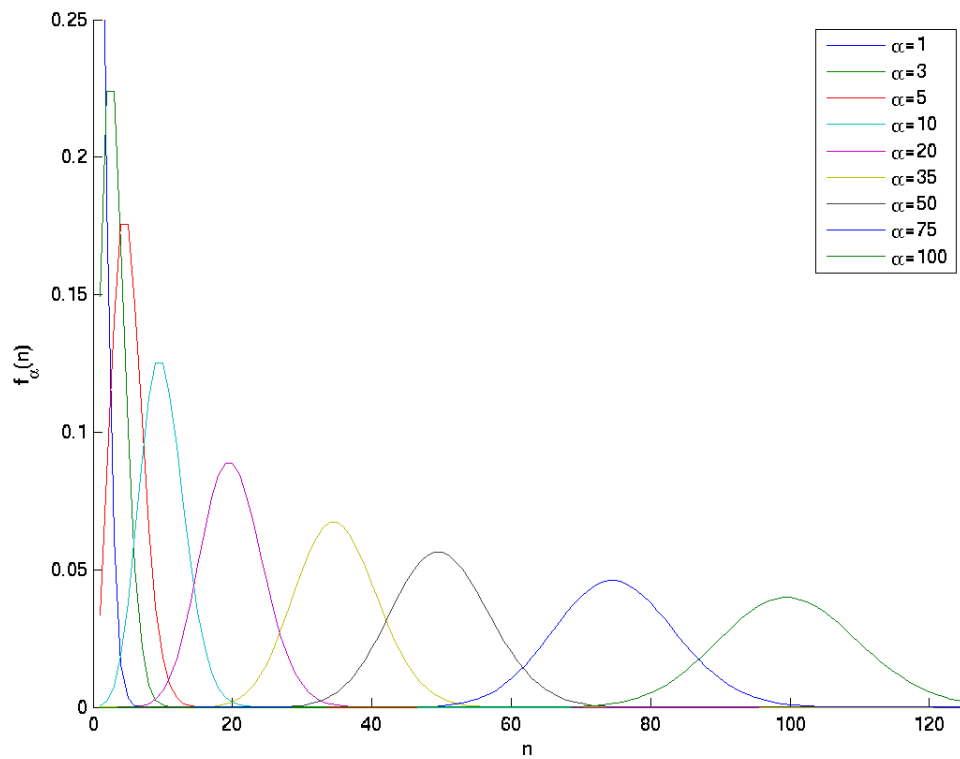
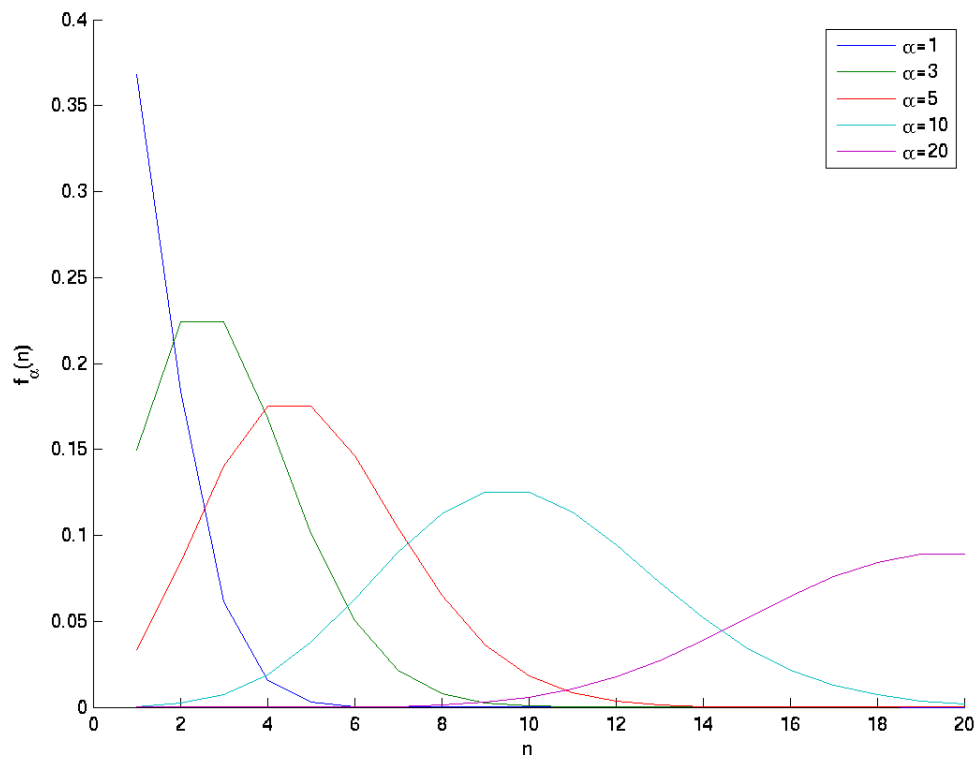


FIGURE 1 – $f_\alpha(n) = \frac{e^{-\alpha} \alpha^n}{n!}$ pour $\alpha = 1, 3, 5, 10, 20, 35, 50, 75, 100$

donc dans le cas idéal où h est à la fois normalement distribuée et à corrélation gaussienne,

$$\tilde{C}_g(\mathbf{Q}_H, \alpha) = \frac{\sigma_h^2}{2\pi s_x s_y} \frac{\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{1}{n} e^{-\frac{1}{2n}(Q_x^2 \sigma_h^2 / s_x^2 + Q_y^2 \sigma_h^2 / s_y^2)}}{\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{n!}} \quad (6.21)$$

sachant de plus que chacune des séries du numérateur et du dénominateur peuvent être limitées aux termes de rang n dans un voisinage plus ou moins étendu de $\alpha = Q_z^2 \sigma_h^2$.

On remarque en particulier que pour $n = \alpha = Q_z^2 \sigma_h^2$,

$$\tilde{u}_g^{*\alpha}(\mathbf{Q}_H) = \frac{1}{Q_z^2} \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{Q_x / Q_z}{s_x} \right)^2}}{\sqrt{2\pi s_x}} \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{Q_y / Q_z}{s_y} \right)^2}}{\sqrt{2\pi s_y}} = \frac{P_{s_x}(Q_x / Q_z) P_{s_y}(Q_y / Q_z)}{Q_z^2} = \frac{P_s(\mathbf{Q}_H / Q_z)}{Q_z^2} \quad (6.22)$$

où P_s est la densité de probabilité bidimensionnelle des pentes de la surface.

Limite haute fréquence A la limite quand $n \rightarrow \infty$, le théorème de la limite centrale indique que quelque soit la surface de corrélation $\rho = \sigma_h^2 u$ et de pentes quadratiques moyennes s_x et s_y ,

$$\tilde{u}^{*n}(\mathbf{Q}_H) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \tilde{u}_g^{*n}(\mathbf{Q}_H) \quad (6.23)$$

Aussi, à haute fréquence quand $K \rightarrow \infty \Rightarrow Q_z \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha = Q_z^2 \sigma_h^2 \rightarrow \infty$, tous les termes \tilde{u}_g^{*n} de rang $n = \alpha + m$ au voisinage de α s'alignent sur la même valeur $\tilde{u}_g^{*\alpha}$:

$$\tilde{u}_g^{*(\alpha+m)} = \frac{1}{Q_z^2 + \frac{m}{\sigma_h^2}} \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{Q_x^2}{s_x^2 (Q_z^2 + m / \sigma_h^2)}}}{\sqrt{2\pi s_x}} \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{Q_y^2}{s_y^2 (Q_z^2 + m / \sigma_h^2)}}}{\sqrt{2\pi s_y}} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \tilde{u}_g^{*\alpha} \quad (6.24)$$

Ces deux arguments, et aussi le fait que le voisinage considéré augmente doucement en $\sqrt{\alpha}$, prouvent qu'à la limite haute fréquence, pour une surface de hauteurs normalement distribuées et de corrélation quelconque,

$$\tilde{C}(\mathbf{Q}_H, Q_z^2 \sigma_h^2) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \frac{P_s(\mathbf{Q}_H / Q_z)}{Q_z^2} \quad (6.25)$$

Il est à noter que, même si nous ne le montrons pas ici, cette limite reste valable même pour une surface de hauteurs non normalement distribuées, et donc de densité de probabilité des pentes P_s quelconque.

A Dyades

Soient trois vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}$ auxquels on associe les vecteurs-colonnes $\bar{a}, \bar{b}, \bar{v}$ constitués de leurs trois coordonnées cartésiennes

$$\mathbf{a} \rightarrow \bar{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} \rightarrow \bar{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} \rightarrow \bar{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

et tels que le produit scalaire s'écrive

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \bar{a}^t \bar{b} \quad (A.2)$$

où \bar{a}^t est le transposé de \bar{a} .

On constitue avec les vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} la dyade $\mathbb{D} = \mathbf{a}\mathbf{b}$, telle que les produits à droite et à gauche soient définis par

$$\mathbf{d} = \mathbb{D} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{a}\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \rightarrow \bar{d} = \bar{a}\bar{b}^t\bar{v} = \bar{D}\bar{v} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{v} \cdot \mathbb{D} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}\mathbf{b} \rightarrow \bar{g} = \bar{v}^t\bar{a}\bar{b}^t = \bar{v}^t\bar{D} = \bar{D}^t\bar{v} \quad (\text{A.4})$$

où on associe à la dyade \mathbb{D} la matrice

$$\bar{D} = \bar{a}\bar{b}^t = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

On peut aussi constituer des opérateurs différentiels dyadiques. Ainsi, à partir du gradient $\mathbf{grad} f \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} f$ du champ scalaire f , on peut constituer la dyade $\mathbf{grad grad} f$ telle qu'appliquée sur le vecteur \mathbf{a} :

$$\mathbf{grad grad} f \cdot \mathbf{a} = \mathbf{grad} (\mathbf{grad} f \cdot \mathbf{a}) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} f \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

soit en définitive

$$\mathbf{grad grad} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Références

- [1] E.I. Thorsos. The validity of the Kirchhoff approximation for rough surface scattering using a Gaussian roughness spectrum. *J. Acoust. Soc. Am*, 83(1) :78–92, 1988.