

Diffraction électromagnétique par des surfaces rugueuses  
pour le Master 2 Optique Image Signal  
– notes de cours –

Gabriel SORIANO

18 janvier 2010

# Table des matières

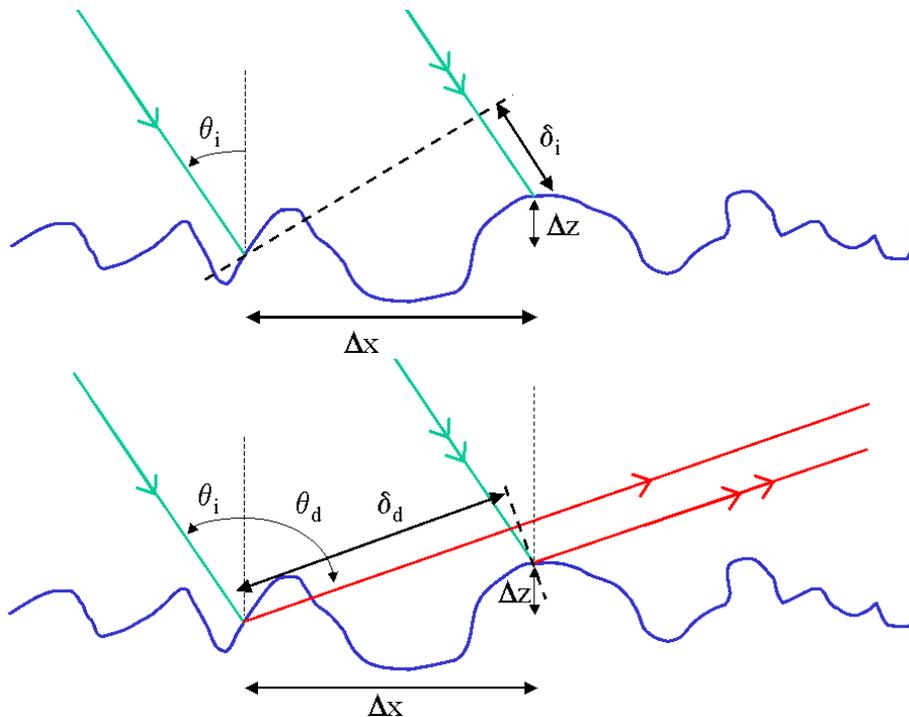
<b>A</b>	<b>Introduction-panorama</b>	<b>3</b>
A.1	Principe d'HUYGENS-FRESNEL . . . . .	3
A.2	Critère de RAYLEIGH . . . . .	5
A.3	Surfaces rugueuses aléatoires . . . . .	5
A.4	Approximations de la diffraction . . . . .	5
A.4.a	Intégrale de KIRCHHOFF . . . . .	5
A.4.b	Méthode perturbative . . . . .	6
A.4.c	Optique géométrique . . . . .	7
A.5	Diagramme de diffraction . . . . .	7
A.6	Applications . . . . .	7
<b>B</b>	<b>Théorie ondulatoire</b>	<b>10</b>
B.1	Théorie de Kirchhoff-Helmholtz . . . . .	10
B.1.a	Fonction de GREEN pour l'équation de HELMHOLTZ homogène . . . . .	11
B.1.b	Théorèmes de GREEN . . . . .	12
B.1.c	Cas de la surface séparant deux demi-espaces . . . . .	12
B.2	Champ diffracté . . . . .	13
B.2.a	Formule de KIRCHHOFF-HELMHOLTZ . . . . .	13
B.2.b	Développement de Rayleigh . . . . .	14
B.2.c	Onde plane incidente - opérateur de diffraction . . . . .	14
B.2.d	Faisceau incident collimaté - champ lointain . . . . .	15
B.3	Puissance et intensité . . . . .	15
B.4	Réseau de diffraction . . . . .	16
<b>C</b>	<b>Surface rugueuse aléatoire</b>	<b>18</b>
C.1	Distribution des hauteurs . . . . .	18
C.2	Fonction d'autocorrélation . . . . .	19
C.3	Spectre de rugosité . . . . .	19
C.3.a	Pentes . . . . .	20
C.4	Représentation harmonique de la hauteur . . . . .	21
C.5	Statistique du champ diffracté . . . . .	22
C.5.a	Champ cohérent . . . . .	22
C.5.b	Coefficient bistatique . . . . .	23
C.5.c	Densité de puissance moyenne . . . . .	24
<b>D</b>	<b>Approche haute fréquence</b>	<b>26</b>
D.1	Approximation du plan tangent . . . . .	26
D.2	Effets de bord . . . . .	27
D.3	Surface impénétrable . . . . .	27
D.4	Approximation de STOGRYN . . . . .	28
D.5	Résultats statistiques . . . . .	28

D.6	Optique géométrique . . . . .	28
D.7	Résultats statistiques . . . . .	29
<b>E</b>	<b>Approche basse fréquence</b>	<b>31</b>
E.1	Principe du développement perturbatif . . . . .	31
E.2	Résultats statistiques . . . . .	32
E.2.a	Champ cohérent . . . . .	32
E.2.b	Coefficient bistatique incohérent . . . . .	32
E.3	Méthode de RAYLEIGH . . . . .	33
E.3.a	Condition aux limites de DIRICHLET . . . . .	33
<b>F</b>	<b>Approche volumique</b>	<b>35</b>
F.1	Diffraction volumique . . . . .	35
F.2	Application à la diffraction par une surface rugueuse . . . . .	36
F.2.a	Équation de HELMHOLTZ . . . . .	36
F.2.b	Fonction de GREEN du dioptre plan . . . . .	37
F.2.c	Équation intégrale . . . . .	37
F.3	Développement perturbatif . . . . .	38
F.3.a	Ordre 0 . . . . .	38
F.3.b	Ordre 1 . . . . .	39
F.3.c	Ordre 2 – hypothèse de RAYLEIGH . . . . .	39
F.3.d	Retour à la condition de DIRICHLET . . . . .	41

# Chapitre A

## Introduction-panorama

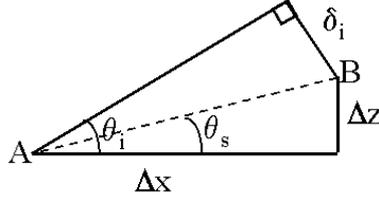
### A.1 Principe d'Huygens-Fresnel



Considérons une surface rugueuse éclairée par un faisceau de lumière parallèle monochromatique à la longueur d'onde ( $\lambda$ ) sous une incidence  $\theta_i$ . Deux points  $(x_1, z_1)$  et  $(x_2, z_2)$  de la surface se comportent comme des sources secondaires. Suivant le principe d'HUYGENS-FRESNEL, chacune de ces sources émet une onde sphérique, le champ diffracté résultant de l'interférence de ces ondes. Dans la direction  $\theta_d$ , les deux rayons sont déphasés  $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$  suivant leur différence de marche optique  $\delta$ . Cette différence de marche dépend des angles  $\theta_i$  et  $\theta_d$ , ainsi que de la distance horizontale  $\Delta x$  et de la différence de hauteur  $\Delta z$ .

**Exercice - calcul géométrique** Prouver que cette différence de marche vaut  $\delta = \delta_d - \delta_i$  où

$$\begin{cases} \delta_i = \Delta x \sin \theta_i - \Delta z \cos \theta_i \\ \delta_d = \Delta x \sin \theta_d + \Delta z \cos \theta_d \end{cases}$$

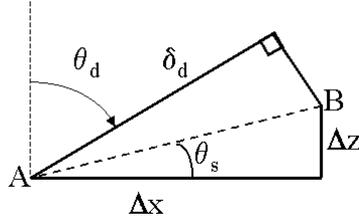


– Rayons incidents

$$\delta_i = AB \sin(\theta_i - \theta_s) = AB(\sin \theta_i \cos \theta_s - \cos \theta_i \sin \theta_s)$$

avec  $AB = \frac{\Delta x}{\cos \theta_s}$  et  $\tan \theta_s = \frac{\Delta z}{\Delta x}$  soit

$$\delta_i = \Delta x \sin \theta_i - \Delta z \cos \theta_i \quad (\text{A.1})$$



– Rayons diffractés

$$\delta_d = AB \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_d - \theta_s\right) = AB \sin(\theta_d + \theta_s) = \Delta x \sin \theta_d + \Delta z \cos \theta_d \quad (\text{A.2})$$

**Exercice - cas général** Le calcul précédant suppose que les rayons et les points appartiennent à un même plan, appelé plan d'incidence. Prouver que la différence de marche dans le cas général peut s'écrire

$$\delta = \delta_d - \delta_i = (\hat{\mathbf{K}} - \hat{\mathbf{K}}_0) \cdot \mathbf{R}$$

où  $\hat{\mathbf{K}}$  et  $\hat{\mathbf{K}}_0$  sont les vecteurs unitaires dans la direction des rayons diffracté et incident, respectivement, et dans le sens de la lumière, et  $\mathbf{R}$  le vecteur reliant les deux points sur la surface.

Ainsi pour ce couple de points et les directions  $\theta_i$  et  $\theta_d$ , les deux rayons sont déphasés de

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \Delta x \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta_d - \sin \theta_i) + \Delta z \frac{2\pi}{\lambda} (\cos \theta_d + \cos \theta_i) = \phi_x + \phi_z \quad (\text{A.3})$$

qui apparait comme la somme d'un déphasage

$$\phi_x = \Delta x \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta_d - \sin \theta_i) \quad (\text{A.4})$$

issu de  $\Delta x$  la distance horizontale entre les deux points et d'un déphasage

$$\phi_z = \Delta z \frac{2\pi}{\lambda} (\cos \theta_d + \cos \theta_i) \quad (\text{A.5})$$

créé par la rugosité  $\Delta z$  de la surface.

Dans le cas du plan ( $\Delta z = \phi_z = 0$ ), les rayons issus de tous les points de la surface sont en phase dans la direction donnée par la loi de SNELL-DESCARTES sur la réflexion

$$\theta_d = \theta_i \quad (\text{A.6})$$

Tous les rayons interfèrent constructivement dans cette direction, c'est la marque de la réflexion spéculaire. Le déphasage  $\phi_z$  dû à la rugosité ne s'annule pas, lui.

## A.2 Critère de Rayleigh

RAYLEIGH a défini un premier paramètre pour indiquer le degré de rugosité d'une surface. Si  $\phi_z \ll \pi$ , alors la rugosité n'a pas d'influence sur la phase, et les deux ondes interfèrent comme dans le cas du plan. En particulier, elles interfèrent constructivement dans la direction spéculaire  $\theta_d = \theta_i$ , puisque  $\phi \ll \pi$ . Au contraire, cette dernière interférence sera destructive si  $\phi_z \sim \pi$  : toute l'énergie est diffractée en dehors du spéculaire.

Suivant le **critère de Rayleigh**, une surface est **douce** si pour tout couple de points,

$$R_a = \Delta z \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta < \frac{\pi}{4} \simeq 1$$

et **rugueuse** dans le cas contraire.  $R_a$  est le **paramètre de Rayleigh**.

Ce qu'il faut souligner ici, c'est que **la rugosité n'est pas une grandeur intrinsèque** du point de vue de la diffraction, puisque la même surface peut être jugée très douce ( $R_a \ll 1$ ) à une fréquence et un angle donnés, et très rugueuse ( $R_a \gg 1$ ) à une fréquence et un angle différents.

## A.3 Surfaces rugueuses aléatoires

On s'intéresse souvent à la diffraction par un certain type de surface, plutôt qu'à une surface déterminée.

On cherche à caractériser l'interaction onde surface sur des sols : pas le sol de mon jardin, mais les sols arides ou mouillés, rocaillieux ou sableux, à la réponse de la glace ou des icebergs, à l'impact de tel ou tel type de végétation... On s'intéresse à la diffraction par la surface de la mer dans telles ou telles conditions climatiques, mais on se moque bien du champ diffracté par la mer à un instant donné : elle a déjà bougé!

On cherche donc à étudier la diffraction par des surfaces et des milieux décrits **statistiquement**. La surface, et par suite le champ diffracté, seront modélisés par des **processus stochastique**. Et nous allons dans ce cours nous évertuer à relier la statistique du champ diffracté à la statistique de la surface rugueuse.

## A.4 Approximations de la diffraction

### A.4.a Intégrale de Kirchhoff

Admettons que pour une surface de longueur  $L$  éclairée à la longueur d'onde  $\lambda$  sous l'incidence  $\theta_i$ , l'intensité diffractée dans la direction  $\theta_d$  s'obtient en sommant en amplitude les contributions élémentaires, puis en prenant le carré du module :

$$s = \int_{-L/2}^{+L/2} e^{-i\varphi} dx \quad I = |s|^2 \quad (\text{A.7})$$

avec toujours  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$ . Si  $z = h(x)$  est l'équation de la surface rugueuse, alors

$$\delta = x(\sin \theta_d - \sin \theta_i) + h(x)(\cos \theta_d + \cos \theta_i)$$

en prenant l'origine du repère comme référence de phase. Cette formulation où tous les points de la surface rayonnent avec la même amplitude est appelée **intégrale de Kirchhoff** et revient dans de nombreuses théories approchées de la diffraction.

L'intégrale de KIRCHHOFF et le critère de RAYLEIGH ne prennent pas en compte différents phénomènes de diffraction plus complexes, à savoir :

- la nature du matériau qui constitue la surface. Suivant que le saut d'indice au passage de l'interface est faible (cas des diélectriques optiques : eau, verre...), ou au contraire la surface est impénétrable et parfaitement réfléchissante (cas des métaux pour les ondes radio et les microondes), on peut s'attendre à des diagrammes différents,
- la polarisation. Les ondes électromagnétiques sont vectorielles et transverses, on cherche donc à modéliser l'impact de la polarisation, en étudiant les deux cas fondamentaux de polarisation :  $E \parallel$  &  $H \parallel$ ,
- les interactions multiples, et pour les angles rasants, l'ombrage : finalement l'état d'interférence d'un point de la surface ne dépend pas seulement de sa position et des angles incidents et diffractés, mais aussi des autres points de la surface et de leur état.

### A.4.b Méthode perturbative

Pour les surfaces à très petit paramètre de RAYLEIGH, le déphasage en  $z$  est très inférieur à l'unité

$$h(x) \ll \frac{\lambda}{4\pi} \Rightarrow \varphi_z = \frac{2\pi}{\lambda} h(x) (\cos \theta_d + \cos \theta_i) \ll 1$$

on développe l'exponentielle en série

$$e^{-i\varphi_z} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-i)^n}{n!} \varphi_z^n = \sum_{n \geq 0} \frac{\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} (\cos \theta_d + \cos \theta_i)\right)^n}{n!} h^n(x) = \sum_{n \geq 0} B_n h^n(x)$$

dans l'intégrale de KIRCHHOFF. On obtient ainsi  $s = \sum_{n \geq 0} s_n$  avec

$$s_n = B_n \int h^n(x) e^{-2i\pi \frac{\sin \theta_d - \sin \theta_i}{\lambda} x} dx = B_n \mathcal{F}[h^n] \left( \frac{\sin \theta_d - \sin \theta_i}{\lambda} \right) = B_n \mathcal{F}[h]^{*n} \left( \frac{\sin \theta_d - \sin \theta_i}{\lambda} \right) \quad (\text{A.8})$$

où le nième ordre du développement de l'intégrale est proportionnel à la transformée de FOURIER de la nième puissance de la fonction hauteur  $h(x)$  évaluée à la fréquence  $\frac{\sin \theta_d - \sin \theta_i}{\lambda}$ . Ce genre de développement est appelé **méthode de la petite perturbation** car il est valable lorsque  $h \ll \lambda$ , ou **approximation basse fréquence** car il correspond à la limite  $\omega \rightarrow 0$  c'est-à-dire  $\lambda \rightarrow \infty$ .

- L'ordre 0 est en forme de sinus-cardinal centrée sur la direction de réflexion spéculaire. A la limite  $L \rightarrow \infty$ , on retrouve l'onde plane, avec pour amplitude le coefficient de réflexion du dioptre plan.
- L'ordre 1 est directement proportionnel l'amplitude de la composante spectrale de la surface de fréquence  $\frac{\sin \theta_d - \sin \theta_i}{\lambda}$ , appelée fréquence de BRAGG. Cet ordre est interprété comme une interaction à trois ondes, le rayon incident à la fréquence  $\frac{\sin \theta_i}{\lambda}$ , le rayon diffracté à la fréquence  $\frac{\sin \theta_d}{\lambda}$ , et la composante spectrale de la surface à la fréquence de BRAGG.
- Pour l'ordre 2, le produit de convolution fait apparaître une quatrième fréquence, pour une interaction à quatre ondes, dont deux fréquences spatiales de la rugosité.
- etc...

### A.4.c Optique géométrique

Lorsqu'à l'autre bout du spectre, le paramètre de RAYLEIGH est très grand, l'intégrande de l'intégrale de Kirchhoff oscille très vite.

$$s = \int_{-L/2}^{+L/2} e^{-i\varphi} dx = \int_{-L/2}^{+L/2} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\delta} dx \quad (\text{A.9})$$

Une telle intégrale peut être évaluée par la méthode de la phase stationnaire. A la limite haute fréquence  $\omega \rightarrow \infty$  soit  $\lambda \rightarrow 0$ , les principaux contributeurs à l'intégrale sont les points de phase stationnaire

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \delta'(x) \Leftrightarrow (\sin \theta_d - \sin \theta_i) + h'(x)(\cos \theta_d + \cos \theta_i)$$

dont la pente vaut

$$h' = -\frac{\sin \theta_d - \sin \theta_i}{\cos \theta_d + \cos \theta_i} = -\frac{2 \cos \frac{\theta_d + \theta_i}{2} \sin \frac{\theta_d - \theta_i}{2}}{2 \cos \frac{\theta_d + \theta_i}{2} \cos \frac{\theta_d - \theta_i}{2}} = \tan \frac{\theta_i - \theta_d}{2} \quad (\text{A.10})$$

Cette pente est qualifiée de spéculaire car elle correspond à la pente pour laquelle les rayons incident et diffracté sont en configuration de réflexion spéculaire. Nous verrons que l'intensité diffractée est proportionnelle au nombre de ces points spéculaires, c'est-à-dire au produit de la longueur de la surface par la probabilité d'apparition de cette pente spéculaire.

## A.5 Diagramme de diffraction

La surface est dite rugueuse, désordonnée, voire aléatoire, par opposition à des surfaces régulières, manufacturées, voire périodique, comme les réseaux de diffraction par exemple. La grandeur d'intérêt en optique est l'**intensité**  $I$ , en Watt par stéradian. La courbe  $I(\theta_d)$  pour une incidence  $\theta_i$  donnée est appelée diagramme ou indicatrice de diffusion ou de diffraction.

Nous allons maintenant donner un aperçu de l'indicatrice d'une surface rugueuse.

- Nous partons naturellement du plan. Ici, le faisceau incident est réfléchi spéculairement. Dans le cas d'une empreinte de taille  $L$  sur la surface, le faisceau diffracté est centré sur la direction spéculaire et de largeur angulaire inversement proportionnelle à  $L$ . Ce champ est appelé **champ cohérent** car sa phase est directement reliée à la phase du champ incident. Sur le diagramme, on parle de **pic cohérent**.
- Lorsque la surface est douce, une partie de l'énergie incidente est diffusée. Issu de la rugosité aléatoire de la surface, ce champ diffusé est appelé **champ incohérent** et est plus étendu angulairement que le champ cohérent. La structure du champ cohérent n'est pas altérée. Seule son amplitude et sa phase sont modifiées. Par conservation de l'énergie, l'énergie diffusée est prise au pic spéculaire.
- Lorsque la surface est rugueuse, toute l'énergie finit par être diffusée. Le champ incohérent s'étend angulairement et le pic spéculaire est éteint. Pour les surfaces très rugueuses, la différence de phase entre deux voisins est telle que chaque point émet de manière incohérente. On retombe alors sur les lois de l'Optique géométrique.
- A la limite, la surface est Lambertienne et on ne peut plus remonter à partir du champ diffracté à la direction incidente de la lumière.

## A.6 Applications

Qui est intéressé par la diffraction électromagnétique, ou plus généralement la diffraction des ondes, par des surfaces rugueuses et pourquoi ?

1. Ondes radio – micro-ondes
  - Radar -> reconnaissance de cible
  - Double aspect clutter/signal
  - Téléphonie mobile -> Propagation indoor
2. Télédétection

Mesure de grandeurs géophysiques à travers le vecteur d'ondes

  - Satellite-> forêt, sols cultivés, océans
  - océans-> état de mer (météorologie), salinité (courants marins)
  - Radar Doppler-> vitesse des vagues
3. Optique
  - étalons de diffusion pour le calibrage des appareils
  - réflectivité/absorption
  - peintures furtives
  - performance des composants (optronique)
  - rendement de conversion des cellules photovoltaïques

# Bibliographie

- [1] A. G. Voronovich. *Wave scattering from rough surfaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [2] M. Born and E. Wolf. *Principle of Optics*. Pergamon Press, New York, 1980.
- [3] P. Beckmann and A. Spizzichino. *The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*. Artech House, Norwood, 1987.
- [4] A. Blanc-Lapierre and B. Picinbono. *Fonctions aléatoires*. Masson, Paris, 1981.

# Chapitre B

## Théorie ondulatoire

On considère le problème bidimensionnel d'une surface rugueuse unidimensionnelle de longueur  $L$  et de profil  $\Gamma : z = h(x)$  éclairée par une onde harmonique incidente à la pulsation  $\omega$  à travers un milieu homogène transparent, appelé milieu incident.

Si à la pulsation de travail, la célérité de l'onde dans le milieu incident est  $c$ , on définit le nombre d'onde  $K = \omega/c$  et la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/K$ . En tout point au dessus de la surface et en dehors des surfaces de l'onde incidente, toute fonction d'onde  $u(x,z,t)$  vérifie l'équation des ondes

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(x,z,t) = 0$$

avec le Laplacien ici réduit à  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . En régime harmonique, on définit l'amplitude complexe d'une onde suivant

$$u(x,z,t) = \Re \left\{ u(x,z) e^{-i\omega t} \right\}$$

cette amplitude complexe vérifie donc l'équation de HELMHOLTZ

$$(\Delta + K^2) u(x,z) = 0$$

Le champ  $u$  correspond en acoustique linéaire au champ de surpression  $p$ , et en électromagnétisme, suivant la polarisation, à l'amplitude du champ électrique  $\mathbf{E} = u \hat{\mathbf{y}}$ , c'est le cas  $u_{\parallel}$ , ou du champ magnétique  $\mathbf{H} = u \hat{\mathbf{y}}$  pour le cas  $H_{\parallel}$ . La célérité acoustique vaut  $c = 1/\sqrt{\rho\chi}$  où  $\rho$  est la masse volumique moyenne du fluide et  $\chi$  son coefficient de compressibilité isentropique, à la pulsation  $\omega$ . La célérité électromagnétique vaut  $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$  où  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont les valeurs de permittivité et perméabilité à la pulsation de travail.

### B.1 Théorie de Kirchhoff-Helmholtz

D'après le principe d'HUYGHENS-FRESNEL, les points de la surface se comporte comme des sources secondaires qui émettent des ondes cylindriques, le champ diffracté résultant de l'interférence de ces ondes. La théorie de KIRCHHOFF-HELMHOLTZ permet de préciser et de quantifier ce principe dans le cas des ondes scalaires. Il utilise la **fonction de Green**  $G$  de l'équation de HELMHOLTZ pour un milieu homogène transparent, vérifiant

$$(\Delta + K^2) G = \delta$$

et le deuxième théorème de GREEN.

## B.1.a Fonction de Green pour l'équation de Helmholtz homogène

$G(x,z)$  est la fonction de GREEN de l'équation de HELMHOLTZ bidimensionnelle homogène, soit une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + K^2 \right) g(x,z) = \delta(x)\delta(z)$$

---

Tout au long de ce cours, nous utiliseront la convention suivante pour la transformation de FOURIER.

$$\mathcal{F}[f](k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx = \tilde{f}(k) \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{+ikx} dk = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}](x) \quad (\text{B.1})$$

avec pour les fonctions de DIRAC dans les deux espaces,

$$\mathcal{F}[1](k) = \delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} dx \quad \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi}\right] = \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{+ikx} dk \quad (\text{B.2})$$

---

Pour la transformée de FOURIER de  $G(x,z)$  sur la variable  $x$ ,

$$\tilde{G}(k,z) = \frac{1}{2\pi} \int dx e^{-ikx} g(x,z)$$

l'équation de HELMHOLTZ devient

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 + K^2 \right) \tilde{G}(k,z) = \frac{\delta(z)}{2\pi} = \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q^2 \right) \tilde{G}(k,z) \quad (\text{B.3})$$

une simple équation différentielle avec  $q^2(k) = K^2 - k^2$ . Dans le plan complexe, il y a toujours deux solutions  $\pm q(k)$  à cette équation, suivant le signe de  $q^2$ . On choisit

$$q(k) = \begin{cases} \sqrt{K^2 - k^2} & |k| \leq K \\ i\sqrt{k^2 - K^2} & |k| > K \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

En dérivant deux fois  $e^{\pm iq|z|}$

$$\frac{d}{dz} e^{\pm iq|z|} = \pm iq \frac{z}{|z|} e^{\pm iq|z|} \quad \frac{d^2}{dz^2} e^{\pm iq|z|} = -q^2 e^{\pm iq|z|} \pm iq 2\delta(z) e^{\pm iq|z|}$$

d'où  $\tilde{G}^{\pm}(k,z) = \mp i e^{\pm iq|z|} / (4\pi q)$  et de retour dans l'espace direct,

$$G^{\pm}(x,z) = \frac{\mp i}{4\pi} \int \frac{1}{q} e^{i(kx \pm q|z|)} dk$$

$G^{\pm}(x,z)$  est une somme d'onde. Pour  $G^+(x,z)$  les vecteurs d'onde sont orientés depuis le point source vers le point d'observation ; pour  $G^-(x,z)$  ils ont le sens inverse.  $G^+(x,z)$  est l'amplitude complexe de l'onde cylindrique divergente et correspond à la solution élémentaire causale de l'équation de HELMHOLTZ bidimensionnelle homogène ;  $G^-(x,z)$  est une onde cylindrique convergente, la solution anti-causale.

La dernière intégrale en  $k$  n'est pas analytique pour le problème bidimensionnel. La fonction de GREEN s'écrit  $G^{\pm}(x,z) = \frac{\mp i}{4} H_0^{\pm}(K\sqrt{x^2 + z^2})$  où  $H_0^{\pm}$  la fonction de HANKEL d'ordre 0.

Vérifier que  $G_{3D}^{\pm}(x,y,z) = \mp \frac{e^{\pm iK\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$  sont les solutions élémentaires de l'équation de HELMHOLTZ tridimensionnelle homogène. Établir leur décomposition en ondes planes. Quelle est la solution causale ?

## B.1.b Théorèmes de Green

Soit  $\Omega$  sur une région bornée de frontière  $\partial\Omega$  suffisamment régulière pour qu'on puisse appliquer le théorème de la divergence

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{a} \, dV = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad (\text{B.5})$$

où  $\mathbf{a}$  est un champ vectoriel et  $\hat{\mathbf{n}}$  la normale à  $\partial\Omega$  dirigée vers l'extérieur. Pour  $\mathbf{a} = A \mathbf{grad} B$ ,  $A$ , et  $B$  deux champs scalaires on obtient en notant la dérivée normale  $\frac{\partial B}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{grad} B$  le premier théorème de GREEN

$$\oint_{\partial\Omega} A \frac{\partial B}{\partial n} \, dS = \int_{\Omega} (A \Delta B + \mathbf{grad} A \cdot \mathbf{grad} B) \, dV \quad (\text{B.6})$$

En recommençant avec  $\mathbf{a} = B \mathbf{grad} A$ , et en combinant avec le résultat précédent, on obtient le deuxième théorème de GREEN

$$\oint_{\partial\Omega} \left( A \frac{\partial B}{\partial n} - B \frac{\partial A}{\partial n} \right) \, dS = \int_{\Omega} (A \Delta B - B \Delta A) \, dV \quad (\text{B.7})$$

En utilisant ce deuxième théorème sur

– un champ  $A$  vérifiant l'équation de HELMHOLTZ homogène  $(\Delta + K^2)A = 0$  sur  $\Omega$ ,

– la fonction de GREEN de cette équation  $B(\mathbf{R}) = G(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)$

où  $\mathbf{R}_0$  est un point en dehors de  $\partial\Omega$ , de telle sorte que  $A \frac{\partial B}{\partial n} - B \frac{\partial A}{\partial n} = A \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)$  et on trouve

$$\oint_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0) A(\mathbf{r}) - G(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0) \frac{\partial A}{\partial n}(\mathbf{r}) \right) \, dS = \int_{\Omega} A(\mathbf{R}) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \, dV = \begin{cases} A(\mathbf{R}_0) & \mathbf{R}_0 \in \Omega \\ 0 & \mathbf{R}_0 \notin \Omega \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Cette formule prouve que le champ en tout point à l'intérieur d'un domaine homogène n'est fonction que de la valeur du champ et de sa dérivée normale sur le bord du domaine. C'est une version rigoureuse du principe d'HUYGHENS-FRESNEL.

## B.1.c Cas de la surface séparant deux demi-espaces

Pour étendre ce résultat au cas d'une surface rugueuse  $\Gamma : z = h(x)$  éclairée depuis un demi-espace homogène, il faut remarquer que l'intégrale de gauche dans la formule (B.8) définit un champ  $f(\mathbf{R}_0)$  possédant les propriétés suivantes :

- $f$  vérifie l'équation de HELMHOLTZ  $(\Delta + K^2) f = 0$  en tout point de chaque demi-espace, sauf sur la surface,
- $f$  est discontinu au passage de la surface, de saut égal à la valeur du champ physique  $u$  sur la surface.
- De plus, si on choisit la fonction de GREEN causale  $G = G^+$ , le champ  $f$  se propage de la surface vers l'infini, et ce pour chacun des deux demi-espaces.

On note  $u^i(\mathbf{R})$  l'amplitude complexe de l'onde incidente, onde non perturbée par la surface, et  $u^d(\mathbf{R}) = u(\mathbf{R}) - u^i(\mathbf{R})$  le champ diffracté, défini comme le complémentaire du champ incident au champ total. Dans notre situation, le champ

$$f(\mathbf{R}_0) = \begin{cases} +u^d(\mathbf{R}_0) & z_0 > h(x_0) \\ -u^i(\mathbf{R}_0) & z_0 < h(x_0) \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

possède les trois propriétés sus-mentionnées. Et au sens des distributions, le Laplacien de ce champ discontinu vaut

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \frac{\partial u}{\partial n} \delta_{\Gamma} + \operatorname{div}(u \hat{\mathbf{n}} \delta_{\Gamma})$$

où  $u$  et  $\frac{\partial u}{\partial n}$  sont les valeurs depuis le milieu incident à la limite sur la surface, et  $\{\Delta f\} = -K^2 f$  est le Laplacien au sens des fonctions,  $\hat{\mathbf{n}}$  est la normale, dirigée vers les  $z$  croissants et  $\delta_\Gamma$  la distribution de DIRAC associée à la surface. En utilisant la propriété du produit de convolution  $(\Delta + K^2)(G * f) = f * (\Delta + K^2)G = G * (\Delta + K^2)f$  on trouve d'un côté

$$G * (\Delta + K^2)f = G * \left( \frac{\partial u}{\partial n} \delta_\Gamma + \text{div}(u \hat{\mathbf{n}} \delta_\Gamma) \right) = G * \left( \frac{\partial u}{\partial n} \delta_\Gamma \right) + \mathbf{grad} G * (u \hat{\mathbf{n}} \delta_\Gamma) \quad (\text{B.10})$$

soit

$$(G * (\Delta + K^2)f)(\mathbf{R}_0) = \int_\Gamma \left( G(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}) + \mathbf{grad} G(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) \right) d\ell \quad (\text{B.11})$$

$$= \int_\Gamma \left( G(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}) - \mathbf{grad} G(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) \right) d\ell \quad (\text{B.12})$$

$$= \int_\Gamma \left( G(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}) - \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0) u(\mathbf{r}) \right) d\ell \quad (\text{B.13})$$

et de l'autre côté,  $f * (\Delta + K^2)G = \delta * f$ , soit bien

$$\delta * f(\mathbf{R}_0) = \begin{cases} +u^d(\mathbf{R}_0) & z_0 > h(x_0) \\ -u^i(\mathbf{R}_0) & z_0 < h(x_0) \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

en dehors de la surface.

Pour un point  $\mathbf{R}_0$  sur la surface, on peut considérer le produit de convolution comme la limite

$$\delta * f(\mathbf{R}_0) = \iint \delta(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}) f(\mathbf{R}) d\mathbf{R} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}| < r} f(\mathbf{R}) d\mathbf{R} \quad (\text{B.15})$$

$$= -u^i(\mathbf{R}_0) + u(\mathbf{R}_0) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}| < r, z > h(x)} d\mathbf{R} \quad (\text{B.16})$$

$$= -u^i(\mathbf{R}_0) + u(\mathbf{R}_0) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \frac{r^2 \alpha}{2} \quad (\text{B.17})$$

$$= \frac{\alpha(\mathbf{R}_0)}{2\pi} u(\mathbf{R}_0) - u^i(\mathbf{R}_0) \quad (\text{B.18})$$

où l'angle  $\alpha$  vaut  $\pi$  en tout point où la surface est continûment dérivable, et  $\alpha > \pi$  au sommet d'une pointe et  $\alpha < \pi$  au creux d'un coin.

## B.2 Champ diffracté

Le champ diffracté est défini comme  $u^d = u - u^i$  le complémentaire au champ total  $u$  du champ incident  $u^i$ , champ non perturbé par la surface.

### B.2.a Formule de Kirchhoff-Helmholtz

Pour une surface rugueuse  $\Gamma : z = h(x)$  éclairée depuis un demi-espace homogène, la formule de KIRCHHOFF-HELMHOLTZ permet de calculer le champ diffracté en tout point  $\mathbf{R}_0 = (x_0, z_0 > h(x_0))$  au dessus de la surface

$$u^d(\mathbf{R}_0) = \int_\Gamma \left( G(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}) - \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0) u(\mathbf{r}) \right) d\ell \quad (\text{B.19})$$

à partir de la valeur du champ total et de sa dérivée normale sur la surface. Cette formule ne dépend pas explicitement du milieu inférieur, ni des conditions aux limites sur la surface. En conséquence, elle n'est pas suffisante pour résoudre le problème de diffraction et déterminer la valeur du champ total et de sa dérivée normale sur la surface.

## B.2.b Développement de Rayleigh

On a vu que la fonction de GREEN est décomposable en ondes planes

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0) = G(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}) = \frac{-i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{q} e^{i[k(x_0-x)+q|z_0-h(x)]} dk$$

et **au dessus de la région de la surface**, c'est à dire pour les points  $\mathbf{R}_0 = (x_0, z_0)$  vérifiant  $z_0 \geq \max h$ ,

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{-i}{q} e^{i[k(x_0-x)+q(z_0-h(x))]} dk \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{-\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{q} e^{i[k(x_0-x)+q(z_0-h(x))]} dk \quad (\text{B.21})$$

avec le vecteur d'onde  $\mathbf{K} = (k, q) = K(\sin \theta_d, \cos \theta_d)$  d'où la décomposition en ondes planes du champ diffracté, appelé développement de RAYLEIGH

$$u^d(x_0, z_0 \geq \max h) = \int_{\mathbb{R}} \frac{s(k)}{q} e^{i(kx_0+qz_0)} dk \quad (\text{B.22})$$

avec l'amplitude diffractée dans la direction  $\theta_d$

$$s(k) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left( \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} u(\mathbf{r}) - i \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}) \right) e^{-i(kx+qh(x))} d\ell \quad (\text{B.23})$$

## B.2.c Onde plane incidente - opérateur de diffraction

Si l'onde incidente est de la forme

$$u^i(x, z) = e^{i(k_0x - q_0z)}, \quad k_0 \in \mathbb{R}, \quad k_0^2 + q_0^2 = K^2, \quad \Re q_0 \geq 0, \quad \Im q_0 \geq 0$$

ce qui englobe les ondes planes propagatives  $u^i(x, z) = e^{iK(\sin \theta_i x - \cos \theta_i z)}$ , l'amplitude de diffraction est notée  $s(k, k_0)$  et parfois appelé opérateur de diffraction. Déterminer  $s(k, k_0)$  pour tous les  $k \in \mathbb{R}$  et  $k_0 \in \mathbb{R}$  permet de caractériser entièrement le processus de diffraction à la pulsation  $\omega$  puisqu'on peut alors calculer le champ diffracté en tout point (au dessus de la région de la surface), et ce pour toute onde incidente.

On utilise souvent l'écriture suivante pour  $s(k, k_0)$ , qui reprend la forme de l'intégrale de KIRCHHOFF.

$$s(k, k_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} N(x, k, k_0) e^{-i[(k-k_0)x + (q+q_0)h(x)]} dx \quad (\text{B.24})$$

$$N(x, k, k_0) = \frac{1}{2u^i} \left( \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} u - i \frac{\partial u}{\partial n} \right) \frac{d\ell}{dx} \quad (\text{B.25})$$

avec  $N(x, k, k_0)$  le **noyau** de l'amplitude diffractée.

## B.2.d Faisceau incident collimaté - champ lointain

Lorsque  $D = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| \rightarrow \infty$ , la fonction de GREEN suit le comportement asymptotique suivant :

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0) = \frac{-i}{4} H_0^+(KD) \sim -\frac{1+i}{4\sqrt{\pi KD}} e^{iKD}$$

Donc si au contraire de l'onde plane, la surface est éclairée par un **faisceau collimaté** d'empreinte de largeur  $L$  sur la surface, alors en champ lointain, c'est-à-dire si

$$R_0 = \sqrt{x_0^2 + z_0^2} \gg \frac{L}{2} \geq r = \sqrt{x^2 + h(x)^2}$$

dans la direction  $\mathbf{K} = (k, q) = \frac{K}{R_0}(x_0, z_0) = K\hat{\mathbf{R}}_0$ , on a

$$\begin{aligned} KD &= K|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| = K\sqrt{(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{R}_0 - \mathbf{r})} = K\sqrt{R_0^2 - 2\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{r} + r^2} \\ &= KR_0\sqrt{1 - 2\hat{\mathbf{R}}_0 \cdot \frac{\mathbf{r}}{R_0} + \left(\frac{r}{R_0}\right)^2} = KR_0\left(1 - \mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{r} + O\left(\left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right)\right) \\ &= KR_0 - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r} + O\left(\frac{r}{R_0}\right) \end{aligned}$$

d'où les asymptotes

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0) &\sim -\frac{1+i}{4\sqrt{\pi K}} \frac{e^{iKR_0}}{\sqrt{R_0}} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} \\ \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0) &\sim -i\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} G(\mathbf{r} - \mathbf{R}_0) \end{aligned}$$

qui, injectées dans la formule de KIRCHHOFF-HELMHOLTZ (B.19), montrent que le champ diffractés lointain

$$u^d(x_0, z_0) \sim \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{K}} \frac{e^{iKR_0}}{\sqrt{R_0}} s\left(K \frac{x_0}{R_0}\right) \quad (\text{B.26})$$

est une onde cylindrique dont l'amplitude complexe est proportionnelle à l'amplitude diffractée (B.23) définie plus avant.

Ce résultat peut aussi être obtenu par analyse asymptotique (méthode de la phase stationnaire) à partir du développement de RAYLEIGH (B.22).

## B.3 Puissance et intensité

Pour les problèmes ondulatoires bidimensionnels en régime harmonique, le flux de puissance à travers un élément de surface, valeur moyenne sur une période, est proportionnel à

$$d\Phi = \Im m(u^* \partial u / \partial n) dl$$

et aux paramètres de propagation du milieu vis-à-vis de l'onde considérée (le nombre d'onde et l'impédance caractéristique du milieu, par exemple).

Pour une onde plane propagative ( $|k| < K$ ) dans un milieu homogène transparent comme le milieu incident,

$$d\Phi = |u|^2 \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl$$

et cette formule s'applique aussi sur le champ lointain, avec  $\mathbf{K} = K\hat{\mathbf{R}}_0$ . On peut aussi montrer que les ondes évanescentes ( $|k| > K$ ) ne participent pas au flux.

Évaluons pour une onde plane incidente la puissance à travers une longueur  $L$  de la surface. Avec  $\mathbf{K}_0 = (k_0, -q_0)$  et  $\hat{\mathbf{n}} = \frac{(-h'(x), 1)}{\sqrt{1+h'(x)^2}}$  et comme  $d\ell = \sqrt{1+h'(x)^2}dx$ ,

$$-\Phi_i = Lq_0 + k_0 \int_{-L/2}^{+L/2} h'(x)dx = q_0L + k_0 (h(+L/2) - h(-L/2))$$

soit une puissance incidente  $-\Phi_i = q_0L$  si  $h(+L/2) = h(-L/2)$ , ou  $k_0 = 0$ . Le signe vient de l'orientation de la normale.

Pour calculer la puissance diffractée par une surface rugueuse de longueur finie  $L$  dans le milieu incident, on calcule le flux du vecteur de Poynting à travers un demi-cercle de rayon  $R_0 \gg L$  et centré sur l'origine du repère  $O$ . Ici  $d\Phi^d = K|u^d|^2 d\ell$  et  $d\ell = R_0 d\theta_d$  et en champ lointain,

$$\frac{d\Phi^d}{d\theta_d} = KR_0|u^d|^2 = 2\pi|s|^2$$

et on définit usuellement l'intensité normalisée comme

$$I_0 = \frac{d\Phi^d}{|\Phi_i|d\theta_d} = \frac{2\pi|s|^2}{|\Phi_i|} \quad (\text{B.27})$$

de sorte que la réflectivité de la surface  $|\Phi^d/\Phi^i|$  puisse être estimée par

$$R_s(\theta_i) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} I_0(\theta_d, \theta_i) d\theta_d \quad (\text{B.28})$$

## B.4 Réseau de diffraction

Rapidement, on considère une surface  $z = h(x)$  périodique de période  $L$ , éclairée par une onde plane d'incidence  $\theta_i$  à la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/K$ . Le profil s'écrit comme une série de FOURIER

$$h(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{2i\pi n x/L} \quad h_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} h(x) e^{-2i\pi n x/L} dx$$

Le champ incident  $u^i(x, z) = e^{ik_0 x - q_0 z}$  vérifie

$$u^i(x + L, z) = e^{ik_0(x+L) - q_0 z} = e^{ik_0 L} u^i(x, z)$$

de sorte que le rapport  $u^i(x, z)/e^{ik_0 x}$  est une fonction  $L$ -périodique. Cette propriété de l'onde plane est appelée pseudo-périodicité. Si  $L$  correspond à la période du réseau et donc à la période des conditions aux limites sur la surface, le champ total  $u(x, z)$  et donc le champ diffracté  $u^d(x, z) = u(x, z) - u^i(x, z)$  sont pseudo-périodiques. Par suite  $u(x, z)/e^{ik_0 x}$  et  $u^d(x, z)/e^{ik_0 x}$  sont  $L$ -périodiques et admettent une série de FOURIER. Pour le champ diffracté,

$$u^d(x, z) = e^{ik_0 x} \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(z) e^{2i\pi n x/L} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(z) e^{ik_n x} \quad k_n = k_0 + n \frac{2\pi}{L}$$

où on retrouve en  $k_n = k_0 + n \frac{2\pi}{L}$  la formule des réseaux.

Maintenant, si le champ diffracté est solution de l'équation de HELMHOLTZ homogène  $(\Delta + K^2)u^d(x, z) = 0$  en tout point au dessus de la région de la surface  $z \geq \max h$  et vérifie une **Condition d'Onde Sortante**,

$$u^d(x, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{s_n}{q_n} e^{i(k_n x + q_n z)} \quad k_n = k_0 + n \frac{2\pi}{L} \quad k_n^2 + q_n^2 = K^2 \quad 0 \leq \arg q_n \leq \pi/2$$

Les  $a_n = s_n/q_n$  sont les amplitudes complexes des ordres diffractés par le réseau.

Sans démonstration, les efficacités de ces ordres sont données par

$$u_n = \frac{|s_n|^2}{q_0 q_n} \quad \sum_{q_n \in \mathbb{R}} u_n = R$$

et la somme des efficacités des ordres propagatifs, c'est-à-dire dont le  $q_n$  est réel, vaut la réflectivité du réseau, soit 1 dans le cas du miroir parfait.

Pour faire la transition entre le cas périodique et le cas désordonné, il faut remarquer la limite suivant, lorsque  $L \rightarrow \infty$  en maintenant le facteur  $n \frac{2\pi}{L} = k$  constant

$$\frac{L}{2\pi} h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{+L/2} h(x) e^{-ikx} dx \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-ikx} dx = \tilde{h}(k)$$

alors on identifie à la limite l'intégrale

$$h(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{2i\pi n x / L} = \frac{2\pi}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L}{2\pi} h_n e^{ikx} \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \tilde{h}(k) e^{ikx} dk$$

Pour l'amplitude diffractée, avec cette fois  $k = k_0 + n \frac{2\pi}{L}$  constant,

$$\begin{aligned} \frac{L}{2\pi} s_n &\rightarrow s(k) \\ L s_n &\rightarrow 2\pi s(k) \\ s_n &\rightarrow s(k) dk \end{aligned}$$

de sorte que

$$u_n = \frac{|s_n|^2}{q_n q_0} = \frac{L |s_n|^2}{q_n L q_0} = \frac{L s_n s_n^*}{q_n \Phi^i} \rightarrow \frac{2\pi s(k) s^*(k) dk}{q \Phi^i} = \frac{2\pi |s(k)|^2 d\theta_d}{\Phi^i} = I_0 d\theta_d$$

# Chapitre C

## Surface rugueuse aléatoire

On s'intéresse souvent à la diffraction par un certain type de surface, plutôt qu'à une surface déterminée. On cherche à caractériser l'interaction onde surface sur des sols : pas le sol de mon jardin, mais les sols arides ou mouillés, rocaillieux ou sableux. On s'intéresse à la diffraction par la surface de la mer dans telles ou telles conditions climatiques, à la réponse de la glace ou des icebergs... On cherche donc à étudier la diffraction par des surfaces et des milieux décrits **statistiquement**. Nous allons relier la statistique du champ diffracté à la statistique de la surface rugueuse.

La hauteur  $h$  de la surface rugueuse est en tout point une variable aléatoire, caractérisée par une densité de probabilité  $p(h)$  (PDF en anglais). De plus, la hauteur en un point n'est généralement pas indépendante de la hauteur des points voisins. Ces variables aléatoires sont corrélés. La hauteur en tant que fonction de la position horizontale  $x$  est un processus stochastique.

Nous nous restreindrons aux **rugosités statistiquement homogène** (stationnarité spatiale) au second ordre : les propriétés statistiques de la surface aux deux premiers ordres sont invariantes par translation horizontale. Il s'en suit que la surface rugueuse est infiniment étendue...

### C.1 Distribution des hauteurs

A partir de la *pdf* des hauteurs  $p_h$ , on définit la hauteur moyenne, espérance mathématique de  $h$  :

$$m_h = \langle h \rangle = \int_{\mathbb{R}} z p_h(z) dz = 0 \quad [\text{m}] \quad (\text{C.1})$$

que nous supposons nulle sans perte de généralité et la variance des hauteurs

$$V(h) = \langle (h - \langle h \rangle)^2 \rangle = \langle h^2 \rangle - m_h^2 = \int_{\mathbb{R}} z^2 p_h(z) dz - m_h^2 = \sigma_h^2 \quad [\text{m}^2] \quad (\text{C.2})$$

carré de la hauteur quadratique moyenne (RMS en anglais), qui caractérise la **variation verticale** de la rugosité.

Cette caractérisation verticale est complète pour le cas de la loi normale

$$p_{\mathcal{N}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_h} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sigma_h}\right)^2} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (\text{C.3})$$

ou distribution des hauteurs gaussienne. On adopte souvent cette loi, pour diverses raisons :

1. cette hypothèse permet de pousser au plus loin les calculs analytiques,

2. la loi véritable est rarement connue avec précision,
3. à cause du théorème de la limite centrale aussi.

On sait en particulier que les hauteurs des vagues ne sont pas distribuées normalement, puisque la mer présente des creux plats et des crêtes pointues, signes d'une distribution asymétrique.

## C.2 Fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation ou corrélation à deux points de la hauteur de la surface

$$\rho(x_1, x_2) = \langle (h - \langle h \rangle)(x_1)(h - \langle h \rangle)(x_2) \rangle = \rho(x_1 - x_2) \quad [\text{m}^2] \quad (\text{C.4})$$

ne dépend par stationnarité que de la distance entre les deux points. Cette corrélation caractérise quand à elle les **variations horizontales** de la rugosité. Cette fonction réelle est toujours symétrique  $\rho(x) = \rho(-x)$  et maximum en zéro. Par définition, cette valeur maximum s'identifie à la variance de la surface. On définit la longueur de corrélation  $\ell$  comme la distance  $r$  pour laquelle la corrélation a décréu d'un facteur  $e$  à partir de zéro.

$$\frac{\rho(\ell)}{\rho(0)} = \frac{1}{e} \quad (\text{C.5})$$

Une corrélation très classique, surtout en Optique, est gaussienne.

$$\rho_g(x) = \sigma_h^2 e^{-\left(\frac{x}{\ell}\right)^2} \quad [\text{m}^2] \quad (\text{C.6})$$

Cette corrélation correspond à une surface rugueuse mono-échelle, très lisse.

Au contraire, une surface à corrélation exponentielle

$$\rho_u(x) = \sigma_h^2 e^{-\left(\frac{x}{\ell}\right)} \quad [\text{m}^2] \quad (\text{C.7})$$

présente beaucoup de petits détails.

On remarque donc que la longueur de corrélation est insuffisante pour caractériser ces variations horizontales.

## C.3 Spectre de rugosité

Le théorème de WIENER-KINCHINE [4] nous assure que pour une surface homogène, si la corrélation est continue en zéro, elle admet une transformée de FOURIER

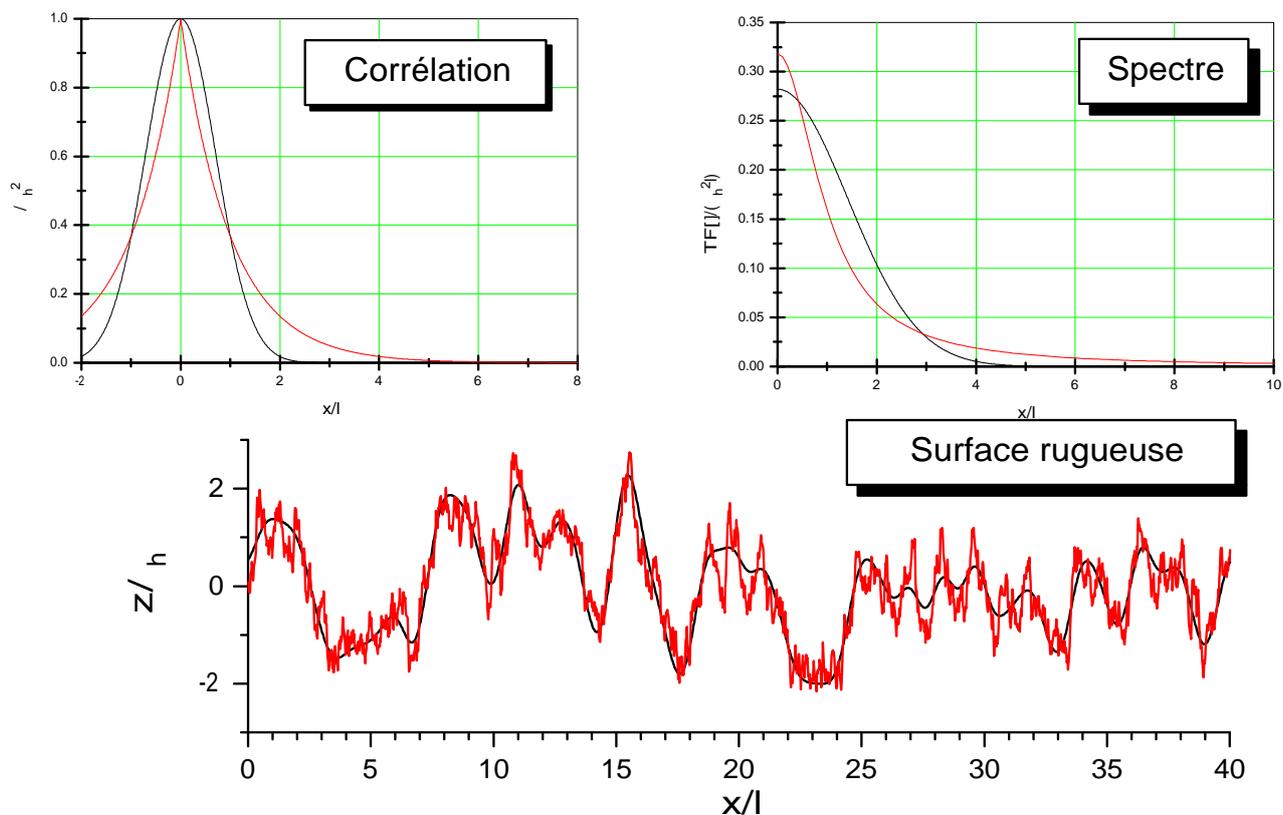
$$\tilde{\rho}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \rho(x) e^{-ikx} dx \quad [\text{m}^3] \quad (\text{C.8})$$

$$\rho(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\rho}(k) e^{+ikx} dk \quad [\text{m}^2] \quad (\text{C.9})$$

et que cette dernière est non négative. La corrélation étant réelle symétrique, sa transformée de FOURIER est elle-même réelle et symétrique. Appelée spectre de puissance en traitement du signal, on la nomme spectre de rugosité ou spectre de hauteur pour les surfaces rugueuses. Le spectre est la répartition de la rugosité sur les fréquences spatiales : son intégrale vaut la variance de la surface

$$\rho(0) = \sigma_h^2 = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\rho}(k) dk \quad [\text{m}^2] \quad (\text{C.10})$$

Comparaison des corrélations ——— gaussienne  
 ——— exponentielle



Le spectre associé à une corrélation gaussienne est bien entendu gaussien.

$$\rho_g(x) = \sigma_h^2 e^{-\left(\frac{x}{\ell}\right)^2} \rightarrow \tilde{\rho}_g(k) = \frac{\sigma_h^2 \ell}{2\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{k\ell}{4}\right)^2} \quad (\text{C.11})$$

$$\rho_u(x) = \sigma_h^2 e^{-\left(\frac{x}{\ell}\right)} \rightarrow \tilde{\rho}_u(k) = \frac{\sigma_h^2 \ell}{\pi} \frac{1}{1 + k^2 \ell^2} \quad (\text{C.12})$$

Le spectre d'une surface exponentielle décroît à l'infini comme  $k^{-2}$  alors que le spectre gaussien décroît plus vite que toute puissance de  $k$ . Ceci explique que la surface exponentielle comprenne plus de détails (hautes fréquences) que la surface gaussienne.

La partie isotrope du **spectre océanique** peut être modélisée en première approximation par un spectre en loi de puissance sur une certaine bande de nombres d'onde spatiaux.

$$\tilde{\rho}_m(k) = \frac{\alpha}{2\pi k^3} \quad k_p \leq |k| \leq k_m \quad [\text{m}^3] \quad (\text{C.13})$$

Le nombre de pic  $k_p = 0.84 \left(\frac{g=9.81}{V_{vent}}\right)^2$  décroît très vite avec la vitesse du vent. Le nombre d'onde  $k_m \simeq 370 \text{ rad/m}$  dépend de la viscosité de l'eau, et varie peu.

### C.3.a Pentas

Avec  $f(x_1, x_2) = h(x_1)h(x_2)$ , on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \langle h(x_1)h(x_2) \rangle = \langle h'(x_1)h'(x_2) \rangle \quad (\text{C.14})$$

d'où la corrélation à deux points des pentes de la surface

$$\langle h'(x_1)h'(x_2) \rangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \rho(x_1, x_2) = -\rho''(x_1 - x_2) \quad (\text{C.15})$$

égale et opposée à la dérivée seconde de la corrélation de hauteur.

Ici, le théorème de WIENER-KINCHINE devient plus sévère : pour pouvoir définir le spectre de pente, il faut avoir continuité en zéro de la dérivée seconde de  $\rho$ . Le niveau de dérivabilité en zéro de la corrélation indique la *douceur* de la surface. On fait ici la différence entre la corrélation gaussienne, infiniment dérivable en zéro, et la corrélation exponentielle, seulement continue en zéro. Les sols sont souvent modélisés par une corrélation mixte : gaussienne au voisinage de zéro, et exponentielle aux grands arguments.

$$\rho_s(x) = \sigma_h^2 \exp \left\{ - \left( \frac{x}{\ell_1} \right)^2 \left( 1 - e^{-\left( \frac{x}{\ell_2} \right)^2} \right) \right\} \quad (\text{C.16})$$

Sous réserve d'existence, le spectre de pente  $k^2 \tilde{\rho}(k)$  se déduit facilement du spectre de hauteur. En particulier la pente quadratique moyenne de la surface  $\sigma_s$  vaut

$$-\rho''(0) = \sigma_s^2 = \int_{\mathbb{R}} k^2 \tilde{\rho}(k) dk \quad [1] \quad (\text{C.17})$$

On utilise aussi parfois le spectre de courbure  $k^4 \tilde{\rho}(k)$ .

## C.4 Représentation harmonique de la hauteur

On peut définir en un sens élargi la transformée de FOURIER  $\tilde{h}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-ikx} dx$  de la hauteur  $h(x)$  de la surface. Si  $h$  est homogène, on peut étudier les propriétés de  $\tilde{h}$  en translatant la surface :  $h(x) \rightarrow h_d(x) = h(x - d)$ . On retrouve alors la propriété connue de la transformée de FOURIER d'une fonction tradatée

$$\tilde{h}_d(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h_d(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h(x - d) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h(y) e^{-ik(y+d)} dy = e^{-ikd} \tilde{h}(k)$$

Si maintenant la stationnarité impose

$$\langle \tilde{h}_d(k) \rangle = \langle \tilde{h}(k) \rangle, \forall d$$

et cela indique que l'espérance de  $\tilde{h}(k)$  est de la forme  $\langle \tilde{h}(k) \rangle = c_0 \delta(k)$ , où  $\delta(k) = TF[1](k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} dx$  est la distribution de DIRAC dans l'espace de FOURIER, homogène à une longueur et vérifiant  $\int_{\mathbb{R}} f(k) \delta(k) dk = f(0)$ .  $\langle \tilde{h}(k) \rangle$  s'annule donc pour toutes les fréquences non nulles.

De même,  $\tilde{h}(k_1) \tilde{h}^*(k_2) = e^{-i(k_1 - k_2)d} \tilde{h}(k_1) \tilde{h}^*(k_2)$  d'où si

$$\langle \tilde{h}_d(k_1) \tilde{h}_d^*(k_2) \rangle = \langle \tilde{h}(k_1) \tilde{h}^*(k_2) \rangle, \forall d$$

alors la corrélation entre deux composantes spectrales de la surface est de la forme  $\langle \tilde{h}(k_1) \tilde{h}^*(k_2) \rangle = c_1(k_1) \delta(k_1 - k_2)$ . Cette propriété est connue comme l'orthogonalité des composantes spectrales d'un processus stationnaire.

On peut calculer directement l'espérance de  $\tilde{h}(k)$

$$\langle \tilde{h}(k) \rangle = \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-ikx} dx \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \langle h(x) \rangle e^{-ikx} dx = m_h \delta(k) = 0 \quad (\text{C.18})$$

et sa corrélation à deux fréquences

$$\langle \tilde{h}(k_1) \tilde{h}^*(k_2) \rangle = \left\langle \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h(x_1) e^{-ik_1 x_1} dx_1 \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h(x_2) e^{-ik_2 x_2} dx_2 \right)^* \right\rangle \quad (\text{C.19})$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \langle h(x_1) h(x_2) \rangle e^{-ik_1 x_1 + ik_2 x_2} dx_1 dx_2 \quad (\text{C.20})$$

par stationnarité,  $\langle h(x_1) h(x_2) \rangle = \rho(x_2 - x_1)$ . Avec le changement de variable  $(x_1, x_2) \rightarrow (u = x_1 - x_2, v = x_2)$

$$\langle \tilde{h}(k_1) \tilde{h}^*(k_2) \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \rho(u) e^{-ik_1(u+v) + ik_2 v} du dv \quad (\text{C.21})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \rho(u) e^{-ik_1 u} du \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(k_1 - k_2)v} dv \quad (\text{C.22})$$

$$= \tilde{\rho}(k_1) \delta(k_1 - k_2) \quad (\text{C.23})$$

## C.5 Statistique du champ diffracté

Si la surface rugueuse est aléatoire, alors le champ diffracté devient lui-même une variable aléatoire. Plaçons-nous dans le cas d'un éclairage cohérent et uniforme, soit une onde plane  $u^i(x, z) = e^{i(k_0 x + q_0 z)}$  pour champ incident. Alors, au dessus de la région de la surface,

$$u^d(x_0, z_0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{s(k)}{q} e^{i(kx_0 + qz_0)} dk \quad (\text{C.24})$$

$$s(k, k_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} N(x, k, k_0) e^{-i[(k-k_0)x + (q+q_0)h(x)]} dx \quad (\text{C.25})$$

$$N(x, k, k_0) = \frac{1}{2u^i} \left( \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} u - i \frac{\partial u}{\partial n} \right) \frac{d\ell}{dx} \quad (\text{C.26})$$

Nous allons définir dans ce cas, et pour une rugosité stationnaire, l'espérance et la corrélation de l'amplitude diffractée, qui correspondent respectivement aux parties cohérentes et incohérentes du champ diffracté lointain.

Pour cela, nous allons encore traduire la surface :  $h(x) \rightarrow h_d(x) = h(x - d)$  et invoquer la stationnarité. A condition de voir que le noyau  $N$  suit nécessairement la même transformation  $N(x, k, k_0) \rightarrow N_d(x, k, k_0) = N(x - d, k, k_0)$ , l'amplitude diffractée traduite  $s_d$  vaut

$$s_d(k, k_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} N(x - d, k, k_0) e^{-i[(k-k_0)(x-d) + (q+q_0)h(x-d)]} dx \quad (\text{C.27})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} N(y, k, k_0) e^{-i[(k-k_0)(y+d) + (q+q_0)h(y)]} dy \quad (\text{C.28})$$

$$= e^{-i(k-k_0)d} s(k, k_0) \quad (\text{C.29})$$

### C.5.a Champ cohérent

L'espérance de l'amplitude diffractée est de la forme  $\langle s \rangle = c_0 \delta(k - k_0)$ , d'où un champ  $\langle u^d(x, z) \rangle = \frac{c_0}{q_0} e^{i(k_0 x + q_0 z)} = r(k_0) e^{i(k_0 x + q_0 z)}$  qui fait apparaître  $r(k_0)$  le **coefficient de réflexion cohérente** de la surface rugueuse aléatoire pour l'incidence  $k_0 = K \sin \theta_i$ . Pour ce champ moyen ou **champ cohérent**,

$$\langle u^d(x, z) \rangle = r(k_0) e^{i(k_0 x + q_0 z)} \quad \langle s(k, k_0) \rangle = q_0 r(k_0) \delta(k - k_0) \quad q_0 r(k_0) = \langle N e^{-2iq_0 h} \rangle \quad (\text{C.30})$$

Le champ cohérent est confiné à la direction spéculaire, ce qui est caractéristique d'une surface homogène en éclairage cohérent et uniforme (onde plane).

Pour l'intégrale de KIRCHHOFF ( $N = 1$ ), ce coefficient s'identifie à la **fonction caractéristique** de la rugosité

$$\langle e^{-2iq_0h} \rangle = \int_{\mathbb{R}} p_h(z) e^{-2iq_0z} dz = 2\pi \tilde{p}_h(2q_0) \quad (\text{C.31})$$

où  $p_h$  est la distribution des hauteurs de la surface rugueuse.

Dans le cas d'un processus gaussien, la distribution des hauteurs est une gaussienne d'écart-type  $\sigma_h$ , et

$$\langle e^{-2iq_0h} \rangle = e^{-\frac{(2q_0)^2 \sigma_h^2}{2}} = e^{-2q_0^2 \sigma_h^2} \quad (\text{C.32})$$

ce qui indique que le pic spéculaire disparaît très rapidement quand la rugosité croît ou quand la longueur d'onde diminue.

### C.5.b Coefficient bistatique

On définit la partie incohérente de l'amplitude diffractée comme

$$\Delta s(k, k_0) = s(k, k_0) - r(k_0) \delta(k - k_0) \quad (\text{C.33})$$

de telle sorte que l'espérance de cette grandeur soit nulle. On définit alors le coefficient incohérent  $\sigma(k, k_0)$  indirectement par

$$\langle \Delta s(k_1, k_0) \Delta s^*(k_2, k_0) \rangle = \sigma(k_1, k_0) \delta(k_1 - k_2) \quad (\text{C.34})$$

Ce coefficient incohérent qui caractérise le champ diffusé est plus fréquemment appelé **coefficient bistatique** car il dépend des deux directions  $k$  et  $k_0$ .

Pour la **direction de rétrodiffusion**  $k = -k_0, q = q_0$ , on définit le coefficient de rétrodiffusion  $\sigma_r(k_0) = \sigma(-k_0, k_0)$  ou coefficient monostatique.

Pour l'intégrale de KIRCHHOFF ( $N = 1$ ), le coefficient bistatique prend une expression explicite. Avec

$$F_h(x, q) = e^{-iqh(x)} - \langle e^{-iqh} \rangle \quad (\text{C.35})$$

de telle sorte que la partie incohérente de l'amplitude diffractée soit

$$\Delta s(k, k_0) = \tilde{F}_h(k - k_0, q + q_0) \quad (\text{C.36})$$

où la transformation de FOURIER porte sur la variable  $x$ . Comme  $h$ ,  $F_h$  est de moyenne nulle et harmonisable. On définit sa corrélation

$$C(x_2 - x_1, q) = \langle e^{-iq(h(x_1) - h(x_2))} \rangle - |\langle e^{-iqh} \rangle|^2 \quad (\text{C.37})$$

et on peut montrer que son spectre  $\tilde{C}(k, q)$  vérifie

$$\langle \Delta s(k_1, k_0) \Delta s^*(k_2, k_0) \rangle = \delta(k_1 - k_2) \tilde{C}(k_1 - k_0, q_1 + q_0) \quad (\text{C.38})$$

d'où on tire le coefficient bistatique

$$\sigma(k, k_0) = \tilde{C}(k - k_0, q + q_0) \quad (\text{C.39})$$

Si la surface est un processus gaussien d'autocorrélation  $\rho$ , la fonction caractéristique

$$\langle e^{-iq(h_1 - h_2)} \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} p(h_1, h_2) e^{-iq(h_1 - h_2)} dh_1 dh_2 = e^{-q^2(\sigma_h^2 - \rho(x))} \quad (\text{C.40})$$

a une expression analytique, d'où

$$C(x,q) = e^{-q^2\sigma_h^2} \left( e^{q^2\rho(x)} - 1 \right) \quad (\text{C.41})$$

Par contre, la transformation de FOURIER de  $C(x,q)$  est rarement analytique, et doit être évaluée numériquement.

On a

$$C(x,q) = e^{-q^2\sigma_h^2} \sum_{n \geq 1} \frac{q^{2n}}{n!} \rho^{(n)}(x) \quad (\text{C.42})$$

en développant l'exponentielle. A partir des **moments du spectre de rugosité**

$$\tilde{\rho}_n(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \rho^{(n)}(x) e^{-ikx} dx = \mathcal{F}[\rho^{(n)}](k) \quad (\text{C.43})$$

on obtient le développement formel

$$\tilde{C}(k,q) = e^{-q^2\sigma_h^2} \sum_{n \geq 1} \frac{q^{2n}}{n!} \tilde{\rho}_n(k) \quad (\text{C.44})$$

### C.5.c Densité de puissance moyenne

Pour une surface rugueuse éclairée par une onde plane, la puissance qui traverse un plan horizontal est infinie. On peut toutefois définir, pour une surface aléatoire homogène, la valeur moyenne de la densité de puissance moyenne sur un plan horizontal.

$$w = \frac{d\Phi}{dx} = \Im m(u^* \partial u / \partial z) \quad (\text{C.45})$$

Pour une onde plane incidente d'amplitude complexe unité  $u^i = e^{i(k_0x - q_0z)}$ , cette densité vaut directement  $w^i = -q_0$ . Pour le champ diffracté dans la région au dessus de la surface,

$$\begin{aligned} u^d &= r(k_0) e^{i(k_0x + q_0z)} + \int_{\mathbb{R}} \frac{\Delta s}{q} e^{i(kx + qz)} dk \\ u^{d*} &= r^*(k_0) e^{-i(k_0x + q_0z)} + \int_{\mathbb{R}} \frac{\Delta s^*}{q^*} e^{-i(kx + qz)} dk \\ \frac{\partial u^d}{\partial z} &= iq_0 r(k_0) e^{i(k_0x + q_0z)} + \int_{\mathbb{R}} i\Delta s e^{i(kx + qz)} dk \end{aligned}$$

$\langle w^d \rangle$  est le produit de deux sommes de deux termes. Avec  $\langle r^* \Delta s \rangle = \langle r \Delta s^* \rangle = 0$ , et

$$\langle \Delta s(k, k_0) \Delta s^*(k', k_0) \rangle = \sigma(k, k_0) \delta(k - k')$$

il ne reste que

$$\langle w^d \rangle = q_0 |r(k_0)|^2 + \Re e \int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma(k, k_0)}{q} dk \quad (\text{C.46})$$

Cette densité de puissance est constante. Les ondes inhomogènes  $|k| > K$  disparaissent à la prise de la partie réelle car elles sont de  $q$  imaginaires : seules les ondes planes propagatives  $|k| \leq K$  contribuent à la densité de puissance. Pour ces ondes, les deux composantes du vecteur d'onde étant réelles, il peut s'écrire à l'aide de l'angle polaire  $\theta$  mesuré à partir de l'axe  $(Oz)$  :  $(k, q) = K(\sin \theta, \cos \theta)$ . L'élément différentiel vaut alors  $dk = K \cos \theta d\theta = q d\theta$ . Finalement, la densité de puissance vaut :

$$\langle w^d \rangle = q_0 |r|^2 + \int_{\pi} \sigma(k, k_0) d\theta \quad (\text{C.47})$$

et le coefficient bistatique incohérent s'interprète comme la contribution à la densité de puissance pour une onde plane incidente d'amplitude unité de l'élément d'angle diffracté  $d\theta$ .

On définit la réflectivité (moyenne) de la surface

$$R_s(k_0) = \frac{\langle w^d \rangle}{|w^i|} = |r(k_0)|^2 + \int_{\pi} \frac{\sigma(k, k_0)}{q_0} d\theta \quad (\text{C.48})$$

avec pour un miroir parfaitement réfléchissant  $R_s = 1$ .

# Chapitre D

## Approche haute fréquence

Suivant l'approche de KIRCHHOFF (AK), les densités surfaciques  $u$  et  $\frac{\partial u}{\partial n}$  sont déterminées dans le cadre de l'**approximation du plan tangent**. En tout point  $\mathbf{r} = (x, h(x))$  de la surface, on prend les densités surfaciques solutions du problème pour le plan tangent au point considéré. Cette approche va donc reposer sur le coefficient de réflexion du plan  $r_p$  pour l'incidence locale  $\theta_i^\ell(x)$  qui va dépendre de l'angle d'incidence  $\theta_i$  – on suppose que le champ incident est une onde plane – et de la pente  $h'(x)$ .

### D.1 Approximation du plan tangent

Au point de la surface  $M = (x, h(x))$  de pente  $h'(x)$ , le vecteur tangent du plan ( $xOz$ ) est  $\hat{\mathbf{t}} = \frac{(1, h')}{\sqrt{1+h'^2}}$  et la normale vaut  $\hat{\mathbf{n}} = \frac{(-h', 1)}{\sqrt{1+h'^2}}$ . Le vecteur d'onde s'écrit aussi bien dans le repère fixe  $\mathcal{R}_O = (O, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$  que dans le repère local  $\mathcal{R}_\ell = (M, \hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}})$

$$\mathbf{K}_0 = k_0 \hat{\mathbf{x}} - q_0 \hat{\mathbf{z}} = k_0^\ell \hat{\mathbf{t}} - q_0^\ell \hat{\mathbf{n}}$$

et l'incidence locale  $\theta_0^\ell$  s'obtient à partir de

$$k_0^\ell = K \sin \theta_0^\ell = \mathbf{K}_0 \cdot \hat{\mathbf{t}} = \frac{k_0 - q_0 h'}{\sqrt{1+h'^2}} \quad q_0^\ell = K \cos \theta_0^\ell = -\mathbf{K}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{q_0 + k_0 h'}{\sqrt{1+h'^2}}$$

Calculons le noyau de l'amplitude diffractée

$$N(x, k, k_0) = \frac{1}{2u^i} \left( \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} u - i \frac{\partial u}{\partial n} \right) \frac{d\ell}{dx}$$

avec  $u = u^i + u^r$  et  $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u^i}{\partial n} + \frac{\partial u^r}{\partial n}$  dans le cadre de l'approximation du plan tangent. A partir de l'expression locale du vecteur d'onde incident  $\mathbf{K}_0$ , on en déduit celle du vecteur d'onde réfléchi  $\mathbf{K}_r$ .

$$\mathbf{K}_0 = k_0^\ell \hat{\mathbf{t}} - q_0^\ell \hat{\mathbf{n}} \quad \mathbf{K}_r = k_0^\ell \hat{\mathbf{t}} + q_0^\ell \hat{\mathbf{n}}$$

Pour les dérivées normales, il faut passer par les gradients

$$\mathbf{grad} u^i = i \mathbf{K}_0 u_i \Rightarrow \frac{\partial u^i}{\partial n} = -i q_0^\ell u^i \quad \mathbf{grad} u^r = i \mathbf{K}_r u_r \Rightarrow \frac{\partial u^r}{\partial n} = +i q_0^\ell u^r$$

Ainsi, dans l'approximation du plan tangent,

$$u = (1 + r_p(\theta_i^\ell)) u^i \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -i q_0^\ell (1 - r_p(\theta_i^\ell)) u^i = i \mathbf{K}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} (1 - r_p(\theta_i^\ell)) u^i \quad (\text{D.1})$$

et en notant  $\mathbf{n} = (-h', 1) = \hat{\mathbf{n}} d\ell/dx$ , le noyau de KIRCHHOFF

$$N_K(x, k, k_0) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} (1 + r_p(\theta_i^\ell)) + \mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{n} (1 - r_p(\theta_i^\ell)) \right) \quad (\text{D.2})$$

$$= \frac{\mathbf{K} + \mathbf{K}_0}{2} \cdot \mathbf{n} + r_p(\theta_i^\ell) \frac{\mathbf{K} - \mathbf{K}_0}{2} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{D.3})$$

$$= \frac{-h'(k + k_0) + (q - q_0)}{2} + r_p(\theta_i^\ell) \frac{-h'(k - k_0) + (q + q_0)}{2} \quad (\text{D.4})$$

est la somme de deux termes, le premier issu du champ incident et le second issu du champ réfléchi.

## D.2 Effets de bord

Pour calculer la contribution du premier terme du noyau à l'amplitude diffracté

$$s(k, k_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} N_K(x, k, k_0) e^{-i[(k-k_0)x + (q+q_0)h(x)]} dx$$

il est commode de négliger l'intégrale suivante.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -i\{(k - k_0) + (q + q_0)h'(x')\} e^{-i[(k-k_0)x + (q+q_0)h(x)]} dx = \left[ e^{-i[(k-k_0)x + (q+q_0)h(x)]} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

On dit qu'on néglige les effets de bords. On a alors

$$\int_{\mathbb{R}} h'(x') e^{-i[(k-k_0)x + (q+q_0)h(x)]} dx' = -\frac{k - k_0}{q + q_0} \int_{\mathbb{R}} e^{-i[(k-k_0)x + (q+q_0)h(x)]} dx' \quad (\text{D.5})$$

ce qui revient à substituer  $-h' \rightarrow (k - k_0)/(q + q_0)$  dans le premier terme.

$$-h'(k + k_0) + (q - q_0) \rightarrow \frac{(k - k_0)(k + k_0) + (q - q_0)(q + q_0)}{q + q_0} = \frac{k^2 - k_0^2 + q^2 - q_0^2}{q + q_0} = 0$$

Ainsi, le terme issu du champ incident ne contribue pas au champ diffracté, ce qui est plutôt rassurant.

$$N_K(x, k, k_0) = r_p(\theta_i^\ell) \frac{\mathbf{K} - \mathbf{K}_0}{2} \cdot \mathbf{n} = r_p(\theta_i^\ell) \frac{-h'(k - k_0) + (q + q_0)}{2} \quad (\text{D.6})$$

## D.3 Surface impénétrable

Tant que  $r(\theta_i^\ell)$  varie avec la pente, et donc d'un point à un autre, on ne peut opérer la même substitution que pour le champ incident. Il existe tout de même des cas où le coefficient de réflexion est constant. Il s'agit des deux cas de miroirs parfaits :

- le cas  $r_p = -1 \Leftrightarrow u = 0$  est appelé condition de DIRICHLET
- et la condition de NEUMANN où  $r_p = +1 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ .

On a alors

$$\begin{aligned} -h'(k - k_0) + (q + q_0) &\rightarrow \frac{(k - k_0)(k - k_0) + (q + q_0)(q + q_0)}{q + q_0} \\ &= \frac{k^2 - 2kk_0 + k_0^2 + q^2 + 2qq_0 + q_0^2}{q + q_0} \\ &= 2 \frac{K^2 - kk_0 + qq_0}{q + q_0} \end{aligned}$$

et

$$N_K(k, k_0) = r_p \frac{K^2 - k k_0 + q q_0}{q + q_0} = r_p K \frac{1 + \cos \theta_d \cos \theta_i - \sin \theta_d \sin \theta_i}{\cos \theta_d + \cos \theta_i} \quad (\text{D.7})$$

Dans la direction spéculaire  $k = k_0$  et en rétrodiffusion  $k = -k_0$

$$N_K(k_0, k_0) = r_p q_0 = r_p K \cos \theta_i \quad N_K(-k_0, k_0) = r_p K^2 / q_0 = r_p K / \cos \theta_i \quad (\text{D.8})$$

## D.4 Approximation de Stogryn

Si on s'inspire des résultats de l'optique géométrique, on peut supposer que la contribution principale à la diffraction est donnée les points dont la pente correspond à la configuration de la réflexion spéculaire, et fixer le coefficient de réflexion sa valeur pour l'incidence  $\theta_i^\ell = \frac{\theta_i + \theta_d}{2}$  et

$$N_K(k, k_0) = r_p \left( \frac{\theta_i + \theta_d}{2} \right) \frac{K^2 - k k_0 + q q_0}{q + q_0} \quad (\text{D.9})$$

$$= r_p \left( \frac{\theta_i + \theta_d}{2} \right) K \frac{1 + \cos \theta_d \cos \theta_i - \sin \theta_d \sin \theta_i}{\cos \theta_d + \cos \theta_i} \quad (\text{D.10})$$

$\theta_i^\ell = \theta_i$  en spéculaire et en rétrodiffusion, on retrouve l'incidence normale  $\theta_i^\ell = 0$ .

## D.5 Résultats statistiques

Dans les cas de surfaces impénétrables ou dans l'approximation de STOGRYN, le noyau  $N_K(k, k_0)$  ne dépend pas de  $x$  et l'amplitude diffractée fait intervenir l'intégrale de KIRCHOFF

$$s(k, k_0) = N_K(k, k_0) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i[(k-k_0)x + (q+q_0)h(x)]} dx$$

si bien qu'on récupère tous les résultats statiques associés.

Pour une surface rugueuse aléatoire homogène,

$$r(k_0) = r_p(\theta_i) \langle e^{-i2q_0 h} \rangle \quad (\text{D.11})$$

$$\sigma(k, k_0) = \left| r_p \left( \frac{\theta_i + \theta_d}{2} \right) \right|^2 \left( \frac{K^2 + q_0 q - k_0 k}{q + q_0} \right)^2 \tilde{C}(k - k_0, q + q_0) \quad (\text{D.12})$$

$$\sigma_r(k_0) = |r_p(0)|^2 \frac{K^4}{q_0^2} \tilde{C}(-2k_0, 2q_0) \quad (\text{D.13})$$

## D.6 Optique géométrique

La théorie de l'Optique géométrique, ou théorie des rayons, correspond à la limite haute fréquence ( $K \rightarrow \infty$ ) de la théorie ondulatoire. Nous allons l'établir à partir de l'intégrale de KIRCHHOFF. Pour un profil de longueur  $L$ ,

$$s(k, k_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{+L/2} e^{-i\varphi(x)} dx \quad \varphi(x) = (k - k_0)x + (q + q_0)h(x) \quad (\text{D.14})$$

En Optique géométrique, la notion d'amplitude complexe perd son sens, et on s'intéresse directement à l'intensité. Celle-ci fait apparaître le déphasage

$$\varphi(x) - \varphi(x') = (k - k_0)(x - x') + (q + q_0)(h(x) - h(x')) \quad (\text{D.15})$$

$$= 2\pi \frac{k - k_0}{q + q_0} \nu + (q + q_0) \left( h(x) - h \left( x - \frac{2\pi\nu}{q + q_0} \right) \right) \quad (\text{D.16})$$

$$= \Phi(x, \nu) \quad (\text{D.17})$$

avec  $2\pi\nu = (q + q_0)(x - x')$ , d'où

$$I(k, k_0) = s(k, k_0) s^*(k, k_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-L/2}^{+L/2} dx \int_{-L/2}^{+L/2} dx' e^{-i(\varphi(x) - \varphi(x'))} \quad (\text{D.18})$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-L/2}^{+L/2} dx \frac{2\pi}{q + q_0} \int_{\frac{q+q_0}{2\pi}(x-L/2)}^{\frac{q+q_0}{2\pi}(x+L/2)} d\nu e^{-i\Phi(x, \nu)} \quad (\text{D.19})$$

A la limite haute fréquence les bornes d'intégration  $\frac{q+q_0}{2\pi}(x \pm L/2) \rightarrow \pm\infty$  et

$$h \left( x - \frac{2\pi\nu}{q + q_0} \right) = h(x) - \frac{2\pi\nu}{q + q_0} h'(x) + O \left( \frac{1}{K^2} \right) \quad (\text{D.20})$$

$$\Rightarrow \Phi(x, \nu) = 2\pi\nu \left( h'(x) + \frac{k - k_0}{q + q_0} \right) \quad (\text{D.21})$$

soit asymptotiquement,

$$KI \sim \frac{1}{2\pi} \frac{K}{q + q_0} \int_{-L/2}^{+L/2} dx \int_{\mathbb{R}} d\nu e^{-2i\pi\nu \left( h'(x) + \frac{k - k_0}{q + q_0} \right)} \quad (\text{D.22})$$

$$\sim \frac{1}{2\pi} \frac{K}{q + q_0} \int_{-L/2}^{+L/2} dx \delta \left( h'(x) + \frac{k - k_0}{q + q_0} \right) \quad (\text{D.23})$$

Cette grandeur est indépendante du nombre d'onde  $K$ . On peut ainsi redéfinir  $K = 1, k_0 = \sin \theta_0, q_0 = \cos \theta_0, k = \sin \theta, q = \cos \theta$ .

$h'(x) = -\frac{k - k_0}{q + q_0} = \tan \frac{\theta_i - \theta_d}{2}$  est la pente qui correspond à la configuration de la réflexion spéculaire. Ainsi suivant la théorie de l'Optique géométrique, seuls contribuent à l'intensité diffractée les points de la surface dont la pente est spéculaire.

## D.7 Résultats statistiques

Ici, on peut traiter le cas général, c'est à dire sans hypothèse d'homogénéité.

$$K \langle I \rangle(k, k_0) \sim \frac{1}{2\pi} \frac{K}{q + q_0} \int_{-L/2}^{+L/2} dx \left\langle \delta \left( h'(x) - \tan \frac{\theta_i - \theta_d}{2} \right) \right\rangle \quad (\text{D.24})$$

en reconnaissant dans le terme entre crochets la densité de probabilité  $p_{h'(x)}$  de la variable aléatoire  $h'(x)$  évaluée en  $\tan \frac{\theta_i - \theta_d}{2}$  soit la pente spéculaire. On peut en effet prouver à l'aide de la fonction caractéristique

$$\langle e^{-i2\pi\nu h'(x)} \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu z} p_{h'(x)}(z) dz = \hat{p}_{h'(x)}(\nu) \quad (\text{D.25})$$

l'identité suivante

$$p_{h'(x)}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} \hat{p}_{h'(x)}(\nu) e^{+2i\pi\nu\gamma} d\nu = \left\langle \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu(h'(x) - \gamma)} d\nu \right\rangle = \langle \delta(h'(x) - \gamma) \rangle \quad (\text{D.26})$$

d'où finalement

$$\frac{K}{L} \langle I \rangle(k, k_0) \sim \frac{1}{2\pi} \frac{K}{q + q_0} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} p_{h'}(x) \left( \tan \frac{\theta_i - \theta_d}{2} \right) dx \quad (\text{D.27})$$

et dans le cas homogène

$$\frac{K}{L} \langle I \rangle(k, k_0) \sim \frac{1}{2\pi} \frac{K}{q + q_0} p_{h'} \left( \tan \frac{\theta_i - \theta_d}{2} \right) \quad (\text{D.28})$$

Ainsi il apparaît que l'intensité diffractée moyenne est proportionnelle à la densité des points spéculaires.

Finalement, pour un processus gaussien,

$$\frac{\sigma(k, k_0)}{q_0} = \left| r_p \left( \frac{\theta_i + \theta_d}{2} \right) \right|^2 \frac{(K^2 + q_0 q - k_0 k)^2}{q_0 (q + q_0)^2 q} p_{\mathcal{N}} \left( \tan \frac{\theta_i - \theta_d}{2} \right) \quad (\text{D.29})$$

soit en rétrodiffusion,

$$\frac{\sigma_r(k_0)}{q_0} = |r_p(0)|^2 \left( \frac{K}{q_0} \right)^4 p_{\mathcal{N}}(\tan \theta_i) = \left| \frac{1 - n}{1 + n} \right|^2 \cos^{-4} \theta_i \frac{e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\tan \theta_i}{\sigma_s} \right)^2}}{2\pi \sigma_s} \quad (\text{D.30})$$

# Chapitre E

## Approche basse fréquence

### E.1 Principe du développement perturbatif

On considère un profil d'équation  $z = hf(x)$  où  $\max_{\mathbb{R}} |f(x)| = 1$  et  $0 \leq Kh \ll 1$ . Cette surface est donc douce puisque son paramètre de RAYLEIGH est petit. On peut directement développer l'exponentielle

$$e^{-i(q+q_0)h(x)} - 1 = \sum_{n \geq 1} \frac{(-i(q+q_0)h)^n f^n(x)}{n!}$$

dans l'intégrale de KIRCHHOFF. On obtient ainsi

$$s(k, k_0) = \sum_{n \geq 0} h^n s_n(k, k_0) \quad (\text{E.1})$$

un développement de l'intégrale de KIRCHHOFF sur les puissances du petit paramètre  $h$ , avec le terme d'ordre  $n$  :

$$s_0(k, k_0) = \delta_L(k - k_0) \quad (\text{E.2})$$

$$s_{n \geq 1}(k, k_0) = \frac{(-i(q+q_0))^n}{n!} \mathcal{F}[f^n](k) = \frac{(-i(q+q_0))^n}{n!} \tilde{f}^{*n}(k) \quad (\text{E.3})$$

On se contente généralement du développement au second ordre. Avec

$$F[f^2](k - k_0) = \tilde{f}^{*2}(k) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k - k_0 - k') \tilde{f}(k') dk' = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k - k') \tilde{f}(k' - k_0) dk' \quad (\text{E.4})$$

on obtient

$$s(k, k_0) = \delta_L(k - k_0) - i(q+q_0)h \tilde{f}(k - k_0) + \frac{(q+q_0)^2}{2} h^2 \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k - k') \tilde{f}(k' - k_0) dk' + O(h^3) \quad (\text{E.5})$$

Dans un calcul fondé sur une théorie rigoureuse de la diffraction, le développement reste de la forme

$$s(k, k_0) = B_0(k_0) \delta_L(k - k_0) + B_1(k, k_0) \tilde{h}(k - k_0) + \int_{\mathbb{R}} B_2(k, k_0, k') \tilde{h}(k - k') \tilde{h}(k' - k_0) dk' + O(h^3) \quad (\text{E.6})$$

où les coefficients  $B_n$  du développement, dont l'expression est fonction des conditions aux limites considérées, sont **indépendants de la rugosité**.

## E.2 Résultats statistiques

On considère ici que  $hf(x)$  est un processus stochastique homogène centré de variance  $h^2$ .

### E.2.a Champ cohérent

En prenant l'espérance de l'intégrale au deuxième ordre

$$\langle s(k, k_0) \rangle = B_0(k_0)\delta(k - k_0) + B_1(k, k_0)\langle \tilde{h}(k - k_0) \rangle + \int_{\mathbb{R}} B_2(k, k_0, k')\langle \tilde{h}(k - k')\tilde{h}(k' - k_0) \rangle dk' + O(h^3) \quad (\text{E.7})$$

Si  $hf$  est centrée, alors sa transformée de FOURIER l'est aussi :  $\langle \tilde{h} \rangle = 0$ . On a aussi vu que  $\langle \tilde{h}(k_1)\tilde{h}^*(k_2) \rangle = \tilde{\rho}(k_1)\delta(k_1 - k_2)$ . Comme  $hf$  est réelle, sa transformée de FOURIER est hermitienne, et

$$\langle \tilde{h}(k - k')\tilde{h}(k' - k_0) \rangle = \langle \tilde{h}(k - k')\tilde{h}^*(k_0 - k') \rangle = \tilde{\rho}(k - k')\delta(k - k_0)$$

d'où, en identifiant avec  $\langle s(k, k_0) \rangle = r(k_0)\delta(k - k_0)$ ,

$$r(k_0) = B_0(k_0) + \int_{\mathbb{R}} B_2(k_0, k_0, k')\tilde{\rho}(k_0 - k')dk' + O(h^3) \quad (\text{E.8})$$

L'ordre 0 est entièrement cohérent, l'ordre 1 complètement incohérent, et l'ordre 2 *a priori* est mixte. Les ordres impairs ne contribuant pas (pour les processus gaussiens?) au champ cohérent, la formule est valable jusqu'à  $O(h^4)$ . En dessous de cet ordre, la rugosité n'a d'effet sur champ cohérent par rapport au plan que par le terme d'ordre 2.

### E.2.b Coefficient bistatique incohérent

La partie incohérente de l'intégrale de diffraction vaut au deuxième ordre

$$\begin{aligned} \Delta s(k, k_0) &= (s - \langle s \rangle)(k, k_0) = B_1(k, k_0)\tilde{h}(k - k_0) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} B_2(k, k_0, k') \left( \tilde{h}(k - k')\tilde{h}(k' - k_0) - \tilde{\rho}(k_0 - k')\delta(k - k_0) \right) dk' + O(h^3) \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Avec un développement de l'intégrale au deuxième ordre, on peut obtenir les termes complets du développement du coefficient bistatique jusqu'au troisième ordre. En notant  $a_n = \Delta s_n(k, k_0)$  et  $a'_n = \Delta s_n^*(k', k_0)$ , on a formellement

$$(ha_1 + h^2a_2)(ha'_1 + h^2a'_2) = h^2a_1a'_1 + h^3(a_1a'_2 + a'_1a_2) + O(h^4) \quad (\text{E.11})$$

qu'on identifie avec

$$\langle s(k, k_0)s^*(k', k_0) \rangle = \sigma(k, k_0)\delta(k - k') = \sum_{n \leq 0} \sigma_n(k, k_0)\delta(k - k') \quad (\text{E.12})$$

Les termes d'ordre 0 et 1 étant nuls, on passe à l'ordre 2.

$$h^2\langle \Delta s_1(k, k_0)\Delta s_1^*(k', k_0) \rangle = B_1(k, k_0)B_1^*(k', k_0)\langle \tilde{h}(k - k_0)\tilde{h}^*(k' - k_0) \rangle = |B_1(k, k_0)|^2\tilde{\rho}(k - k_0)\delta(k - k')$$

d'où

$$\sigma_2(k, k_0) = |B_1(k, k_0)|^2\tilde{\rho}(k - k_0) \quad (\text{E.13})$$

## E.3 Méthode de Rayleigh

Le plus difficile reste de déterminer les coefficients  $Bn$  pour des conditions aux limites données. Nous allons maintenant utiliser la **méthode de Rayleigh**, qui permet notamment de traiter les cas des conditions de DIRICHLET et NEUMANN. Suivant cette méthode, on prolonge le développement de RAYLEIGH du champ jusque dans la région de la surface *pour le calcul du développement perturbatif du champ*. Cette méthode a longtemps été appelée *hypothèse* de RAYLEIGH, jusqu'à ce qu'elle soit justifiée mathématiquement.

$$\forall z, u^d(x, z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{s(k, k_0)}{q} e^{i(kx + qz)} dk \quad (\text{E.14})$$

pour une onde plane incidente  $(k_0, -q_0)$ , le champ total sur la surface s'écrit :

$$u(x, hf(x)) = e^{i(k_0x - q_0hf(x))} + \int_{\mathbb{R}} \frac{s(k, k_0)}{q} e^{i(kx + qhf(x))} dk \quad (\text{E.15})$$

$$\sqrt{1 + h'(x)^2} \frac{\partial u}{\partial n}(x, hf(x)) = -i(q_0 + k_0h'(x)) e^{i(k_0x - q_0hf(x))} \quad (\text{E.16})$$

$$+ i \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{k}{q} h'(x)\right) s(k, k_0) e^{i(kx + qhf(x))} dk \quad (\text{E.17})$$

### E.3.a Condition aux limites de Dirichlet

Pour une surface avec condition de DIRICHLET, on a  $u(x, hf(x)) = 0$  quelque soit  $x$ , d'où

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{s(k, k_0)}{q} e^{ikx} e^{i(q+q_0)hf(x)} dk = -e^{ik_0x} \quad (\text{E.18})$$

On peut alors développer  $s(k, k_0)$  et  $e^{i(q+q_0)hf(x)}$  en puissance de  $h$ .

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{n \leq 0} h^n s_n(k, k_0) \right\} \left\{ \sum_{m \leq 0} \frac{(i(q+q_0)hf(x))^m}{m!} \right\} \frac{e^{ik_0x}}{q} dk = -e^{ik_0x} \quad (\text{E.19})$$

On rassemble les termes qui dépendent de  $x$ , et, par soucis d'esthétisme, on change la variable muette  $k \rightarrow k'$ .

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{n \leq 0} h^n s_n(k', k_0) \right\} \left\{ \sum_{m \leq 0} \frac{(i(q'+q_0)h)^m}{m!} f^m(x) e^{ik'x} \right\} \frac{dk'}{q'} = -e^{ik_0x} \quad (\text{E.20})$$

Cette égalité étant valable quelque soit  $x$ , on peut passer dans l'espace de FOURIER.

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{n \leq 0} h^n s_n(k', k_0) \right\} \left\{ \sum_{m \leq 0} \frac{(i(q'+q_0)h)^m}{m!} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f^m(x) e^{-i(k-k')x} dx \right\} \frac{dk'}{q'} \quad (\text{E.21})$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(k-k_0)x} dx = -\delta(k - k_0) \quad (\text{E.22})$$

### Ordre 0

Le terme d'ordre 0 est très facile

$$\int_{\mathbb{R}} s_0(k', k_0) \delta(k - k') \frac{dk'}{q'} = \frac{s_0(k, k_0)}{q} = -\delta(k - k_0) \Rightarrow s_0(k, k_0) = -q_0 \delta(k - k_0) \quad (\text{E.23})$$

puisqu'il s'identifie à la solution du plan : une réflexion dans la direction spéculaire  $k = k_0$  avec le coefficient de réflexion du plan pour la condition de DIRICHLET,  $r_p = -1$ .

## Ordre 1

Pour l'ordre suivant, on considère les deux termes qui vérifient  $n + m = 1$  :

$$h \int_{\mathbb{R}} \left\{ s_0(k', k_0) i(q' + q_0) \tilde{f}(k - k') + s_1(k', k_0) \delta(k - k') \right\} \frac{dk'}{q'} = 0 \quad (\text{E.24})$$

soit connaissant  $s_0$ ,

$$s_1(k, k_0) = 2iq_0q\tilde{f}(k - k_0) \quad (\text{E.25})$$

## Ordre 2

Il y a ici trois termes  $n + m = 2$

$$h^2 \int_{\mathbb{R}} \left\{ s_0(k', k_0) \frac{-(q' + q_0)^2}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f^2(x) e^{-i(k-k')x} dx + \right. \quad (\text{E.26})$$

$$\left. + s_1(k', k_0) i(q' + q_0) \tilde{f}(k - k') + s_2(k', k_0) \delta(k - k') \right\} \frac{dk'}{q'} = 0 \quad (\text{E.27})$$

soit avec  $s_0$  et  $s_1$ ,

$$2q_0^2 \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f^2(x) e^{-i(k-k_0)x} dx - 2q_0 \int_{\mathbb{R}} (q' + q_0) \tilde{f}(k - k') \tilde{f}(k' - k_0) dk' + \frac{s_2(k, k_0)}{q} = 0 \quad (\text{E.28})$$

et comme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f^2(x) e^{-i(k-k_0)x} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k' - k_0) e^{+i(k'-k_0)x} dk' e^{-i(k-k_0)x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k' - k_0) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i(k-k')x} dx dk' = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k' - k_0) \tilde{f}(k - k') dk' \end{aligned}$$

le deuxième ordre vaut finalement

$$s_2(k, k_0) = 2q_0q \int_{\mathbb{R}} q' \tilde{f}(k - k') \tilde{f}(k' - k_0) dk' \quad (\text{E.29})$$

Le problème de NEUMANN peut être étudié de semblable manière. Pour le problème de transmission, nous présentons une autre approche.

# Chapitre F

## Approche volumique

On considère ici un champ  $u(x,z)$  produit par des sources  $s_i(x,z)$  et diffracté par un milieu inhomogène de nombre d'onde  $K\sqrt{1+\chi(x,z)}$  à la pulsation  $\omega$ , et on se place dans le cas particulier simple où ce champ est suffisamment régulier pour vérifier *au sens des distributions* l'équation de HELMHOLTZ

$$(\Delta + K^2(1 + \chi))u = s_i \quad (\text{F.1})$$

En électromagnétisme bidimensionnel, ce champ correspond par exemple au cas d'un milieu non magnétique en polarisation  $u_{\parallel}$ .

### F.1 Diffraction volumique

On considère ici un ou plusieurs diffuseurs inhomogènes confinés à une région  $\Omega$  de l'espace, et plongés dans le milieu de fond homogène  $K$ . Les sources  $s_i$  sont localisées en dehors de  $\Omega$  et le champ incident  $u^i$  est défini comme le champ produit par  $s_i$  et non perturbé par les diffuseurs, soit vérifiant l'équation de HELMHOLTZ

$$(\Delta + K^2)u = s_i \quad (\text{F.2})$$

Le champ diffracté  $u^d = u - u^i$  est défini comme le complémentaire du champ incident au champ total ; ce champ est émit par les diffuseurs, il va donc vérifier une **condition de rayonnement** en dehors de  $\Omega$ . Ainsi,

$$(\Delta + K^2)u^d = -K^2\chi u \Rightarrow u^d = -K^2G * (\chi u) = u - u^i \quad (\text{F.3})$$

où  $G$  est la fonction de GREEN du fond, la solution élémentaire de  $(\Delta + K^2)G = \delta$  vérifiant la condition de rayonnement. On rappelle

$$G(\mathbf{r}) = \frac{-i}{4} H_0^+(Kr) = \frac{-i}{4\pi} \int \frac{1}{q} u^{i[kx+q|x|]} dk$$

Ainsi le calcul du champ diffracté (appelé pour des diffuseurs connus problème direct) se fait en deux étapes :

1. détermination du champ intérieur par résolution sur  $\Omega$  de l'**équation intégrale volumique**

$$\forall \mathbf{r}_i \in \Omega, u(\mathbf{r}_i) + K^2 \int_{\Omega} G(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \chi(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = u^i(\mathbf{r}_i) \quad (\text{F.4})$$

2. calcul du champ diffracté en un point  $\mathbf{r}_o$  par intégration du champ intérieur sur  $\Omega$

$$u^d(\mathbf{r}_o) = -K^2 \int_{\Omega} G(\mathbf{r}_o - \mathbf{r}) \chi(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (\text{F.5})$$

L'équation intégrale volumique est une formalisation rigoureuse du problème de diffraction. Toutefois, cette intégrale ne peut être résolue pour des diffuseurs arbitraires que numériquement. Lorsque la susceptibilité est très faible, alors le champ diffracté est négligeable devant le champ incident dans la région  $\Omega$ . Sous cette **approximation de Born**,

$$\chi \ll 1 \Rightarrow u(\mathbf{r}_i) \simeq u^i(\mathbf{r}_i) \Rightarrow u^d(\mathbf{r}_o) \simeq -K^2 \int_{\Omega} G(\mathbf{r}_o - \mathbf{r}) \chi(\mathbf{r}) u^i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (\text{F.6})$$

## F.2 Application à la diffraction par une surface rugueuse

On considère une surface rugueuse de profil  $\Gamma : z = h(x)$  autour du plan  $z = 0$ , éclairée en polarisation  $u_{\parallel}$  à la pulsation  $\omega$ , et séparant deux milieux semi-infinis non magnétiques, le milieu incident de permittivité  $\varepsilon_0$  et un milieu **homogène** de permittivité  $\varepsilon_0(1 + \chi)$ . Comme on l'a vu précédemment, on peut traiter les matériaux magnétiques non diélectriques de la même manière en  $H_{\parallel}$ .

### F.2.a Équation de Helmholtz

Pour les nombres d'onde :

1. Le nombre d'onde du milieu incident est

$$K$$

2. Le dioptre plan  $z = 0$  séparant les deux milieux homogènes constitue donc notre **problème de référence**. Le carré du nombre d'onde  $K_p(z)$  associé au plan s'écrit

$$K_p^2(z) = \begin{cases} K^2 & z > 0 \\ K^2(1 + \chi) & z < 0 \end{cases}$$

3. Dans le cas de la surface rugueuse, le nombre d'onde est de carré

$$K^2(x, z) = \begin{cases} K^2 & z > h(x) \\ K^2(1 + \chi) & z < h(x) \end{cases}$$

d'où

$$K^2(x, z) = K_p^2(z) + K^2 \chi \Pi_h(x, z) \quad \text{avec} \quad \Pi_h(x, z) = \begin{cases} 0 & z > h(x) > 0 \\ +1 & 0 < z < h(x) \\ -1 & h(x) < z < 0 \\ 0 & z < h(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{F.7})$$

A la pulsation  $\omega$ , le champ électrique incident  $u^i$ , le champ pour le problème du dioptre  $u^p$  et le champ pour la surface rugueuse  $E$  vérifient les équations de HELMHOLTZ

1.  $(\Delta + K^2)u^i(x, z) = s_i(x, z)$
2.  $(\Delta + K_p^2(z))u^p(x, z) = s_i(x, z)$
3.  $(\Delta + K^2(x, z))u(x, z) = s_i(x, z)$

soit en soustrayant les deux dernières,

$$(\Delta + K_p^2(z))(E - u^p)(x, z) = -K^2 \chi \Pi_h(x, z) u(x, z) \quad (\text{F.8})$$

On est donc ramené à la résolution de l'équation de HELMHOLTZ pour le dioptre plan.

## F.2.b Fonction de Green du dioptre plan

Le problème du dioptre plan est suffisamment simple pour qu'on puisse calculer sa fonction de GREEN  $\Phi$ , elle-même construite sur la fonction de GREEN du milieu incident  $G$ . Cette dernière s'écrit pour un point source  $(x_s, z_s)$  et un point d'observation  $(x_o, z_o)$

$$G(x_o - x_s, z_o - z_s) = \frac{-i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{q} u^{i(k(x_o - x_s) + q|z_o - z_s|)}$$

avec  $q$  vérifiant  $k^2 + q^2 = K^2$ ; on peut étendre cette fonction de GREEN aux milieux homogènes éventuellement absorbants avec simplement la condition  $0 \leq \arg q \leq \pi/2$ .

On peut risquer

$$\Phi(x_o - x_s, z_o, z_s) = -\frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} dk u^{+ik(x_o - x_s)} \begin{cases} \frac{1}{q_1} \left( u^{iq_1|z_o - z_s|} + r_{12}(k) u^{iq_1(z_o + z_s)} \right) & z_s > 0, z_o > 0 \\ \frac{1}{q_1} t_{12}(k) u^{i(q_1 z_s - q_2 z_o)} & z_s > 0, z_o < 0 \\ \frac{1}{q_2} t_{21}(k) u^{i(q_1 z_o - q_2 z_s)} & z_s < 0, z_o > 0 \\ \frac{1}{q_2} \left( u^{iq_2|z_o - z_s|} + r_{21}(k) u^{-iq_2(z_o + z_s)} \right) & z_s < 0, z_o < 0 \end{cases} \quad (\text{F.9})$$

avec  $k^2 + q_1^2 = K^2, 0 \leq \arg q_1 \leq \pi/2$  et  $k^2 + q_2^2 = K^2(1 + \chi), 0 \leq \arg q_2 \leq \pi/2$  et en remarquant que  $\Phi$  n'est plus fonction de  $z_o - z_s$ , mais de  $z_o$  et  $z_s$ . Les coefficients de réflexion et de transmission sont obtenus pour satisfaire

$$(\Delta + K_p^2(z_o))\Phi(x_o - x_s, z_o, z_s) = \delta(x_o - x_s, z_o - z_s) \quad (\text{F.10})$$

et on trouve comme attendu,

$$r_{12} = \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2} = -r_{21} \quad t = 1 + r \quad (\text{F.11})$$

Cette fonction de GREEN vérifie une **condition d'ondes sortantes** : quand  $z \rightarrow +\infty$ , le développement de RAYLEIGH de  $\Phi$  est uniquement composée d'ondes montantes  $u^{i(kx + qz)}$ , quand  $z \rightarrow -\infty$ , le développement de RAYLEIGH de  $\Phi$  est uniquement composée d'ondes descendantes  $u^{i(kx - qz)}$ .

Le champ de référence pour des sources  $s_i$  s'écrit

$$(\Delta + K_p^2(z))u^p(x, z) = s_i(x, z) \Rightarrow u^p(x_o, z_o) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x_o - x_s, z_o, z_s) s_i(x_s, z_s) dx_s dz_s \quad (\text{F.12})$$

ce qui ne correspond à une convolution que sur la variable  $x$ .

## F.2.c Équation intégrale

A partir de

$$(\Delta + K_p^2(z))(E - u^p)(x, z) = -K^2 \chi \Pi_h(x, z) u(x, z) \quad (\text{F.13})$$

et si  $E - u^p$  vérifie une condition d'ondes sortantes,

$$u(x, z) = u^p(x, z) - K^2 \chi \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x - x_s, z, z_s) \Pi_h(x_s, z_s) u(x_s, z_s) dx_s dz_s \quad (\text{F.14})$$

soit avec la définition de  $\Pi_h$ ,

$$u(x, z) = u^p(x, z) - K^2 \chi \int_{\mathbb{R}} dx_s \int_0^{h(x_s)} dz_s \Phi(x - x_s, z, z_s) u(x_s, z_s) \quad (\text{F.15})$$

Le problème de diffraction est rigoureusement formalisé par cette **équation intégrale volumique**.

1. L'inconnue du problème est suivant cette formulation le champ intérieur, soit en tout point  $(x_i, z_i)$  du support de  $\Pi_h$ , solution de l'équation

$$u(x_i, z_i) + K^2 \chi \int_{\mathbb{R}} dx_s \int_0^{h(x_s)} dz_s \Phi(x_i - x_s, z_i, z_s) u(x_s, z_s) = u^p(x_i, z_i) \quad (\text{F.16})$$

2. Une fois l'équation résolue et ce champ intérieur déterminé, le champ en tout point  $(x_o, z_o)$  de l'espace peut être calculer par la formule

$$u(x_o, z_o) = u^p(x_o, z_o) - K^2 \chi \int_{\mathbb{R}} dx_s \int_0^{h(x_s)} dz_s \Phi(x_o - x_s, z_o, z_s) u(x_s, z_s) \quad (\text{F.17})$$

Notons pour finir que ce résultat est directement généralisable au problème d'un multi-couche dont le premier dioptre est rugueux. La fonction de GREEN du dioptre plan est alors remplacée par celle du multi-couche.

### F.3 Développement perturbatif

On considère une surface rugueuse d'équation  $z = hf(x)$  où  $Kh \ll 1$  est un petit paramètre réel et où la fonction réelle  $f(x)$  est bornée, et même dans le cas statistique,  $f(x)$  est un processus homogène centré de variance unité :  $\sigma_f = 1 \Rightarrow \sigma_z = h$ .

Pour le cas d'une surface séparant deux milieux diélectriques, on utilise le formalisme intégral volumique. Avec un petit changement de variable ,

$$u(x, z) = u^p(x, z) - K^2 \chi h \int_{\mathbb{R}} dx' \int_0^{f(x')} dt' \Phi(x - x', z, ht') u(x, ht') \quad (\text{F.18})$$

On va chercher un développement en fonction du petit paramètre  $h$  du champ diffracté

$$u(x, z) = u_0(x, z) + hu_1(x, z) + h^2 u_2(x, z) \dots \quad (\text{F.19})$$

et on en déduira, pour une onde plane incidente  $u^i(x, z) = u^{i(Kx - q_0 z)}$ , le développement de l'opérateur de diffraction  $s(k, K)$ .

$$s(k, K) = s_0(k, K) + hs_1(k, K) + h^2 s_2(k, K) + \dots \quad (\text{F.20})$$

#### F.3.a Ordre 0

Le champ d'ordre 0 s'identifiant clairement au champ de référence,

$$u_0 = u^p \Rightarrow u_0^d = u^p - u^i = r_{12}(K) u^{i(Kx + q_0 z)} \quad (\text{F.21})$$

le champ diffracté se réduit à cet ordre à l'onde plane réfléchie. Immédiatement,

$$s_0(k, K) = q_0 r_{12}(K) \delta(k - K) \quad (\text{F.22})$$

Les termes d'ordre supérieur à zéro sont donc tous contenus dans l'intégrale

$$-K^2 \chi h \int_{\mathbb{R}} dx' \int_0^{f(x')} dt' \Phi(x - x', z, ht') u(x', ht')$$

### F.3.b Ordre 1

Pour distinguer le premier ordre, on itère l'expression du champ :

$$u(x, z) = u^p(x, z) - K^2 \chi h \int_{\mathbb{R}} dx' \int_0^{f(x')} dt' \Phi(x - x', z, ht') u^p(x', ht') \quad (\text{F.23})$$

$$+ (K^2 \chi h)^2 \int_{\mathbb{R}^2} dx' dx'' \int_0^{f(x')} dt' \int_0^{f(x'')} dt'' \Phi(x - x', z, ht') \Phi(x' - x'', z', ht'') u(x'', z'') \quad (\text{F.24})$$

Ainsi il apparaît que le premier ordre est entièrement contenu dans l'intégrale de la première ligne. Cette intégrale inclut aussi des termes d'ordres supérieurs, puisque son intégrande est une fonction non triviale de  $h$ .

Pour un point au dessus de la région de la surface :  $z > h \max f > z' = ht'$ , la fonction de GREEN  $\Phi$  est continûment dérivable par rapport à la variable  $z'$  sur le support de  $\Pi_h$ . Les développements limités

$$\Phi(x - x', z, ht') = \Phi(x - x', z, 0) + O(h) \sim -\frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{q_1} u^{+ik(x-x')} t_{12}(k) u^{iq_1 z} \quad (\text{F.25})$$

$$u^p(x', ht') = u^p(x', 0) + O(h) \sim u^{+iKx'} t_{12}(K) \quad (\text{F.26})$$

suffisent pour obtenir le terme d'ordre 1 complet :

$$u_1(x, z > H) = -K^2 \chi h \int_{\mathbb{R}} dx' f(x') \frac{-i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{q_1} u^{+ik(x-x')} t_{12}(k) u^{iq_1 z} u^{+iKx'} t_{12}(K) \quad (\text{F.27})$$

$$= \frac{+iK^2 \chi h}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{q_1} t_{12}(k) t_{12}(K) u^{i(kx+q_1 z)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dx' f(x') u^{-i(k-K)x'} \quad (\text{F.28})$$

$$= \frac{+iK^2 \chi h}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{q_1} t_{12}(k) t_{12}(K) u^{i(kx+q_1 z)} \tilde{f}(k - K) \quad (\text{F.29})$$

d'où pour l'opérateur de diffraction

$$s_1(k, K) = \frac{i}{2} K^2 \chi t_{12}(k) t_{12}(K) h \tilde{f}(k - K) \quad (\text{F.30})$$

Ainsi pour un couple  $(k, K)$ , l'amplitude diffractée est proportionnelle à  $h \tilde{f}(k - K)$ , et  $k - K$  est la seule fréquence spatiale de la rugosité à intervenir.

### F.3.c Ordre 2 – hypothèse de Rayleigh

Si on repart de l'expression

$$u(x, z) = u^p(x, z) - K^2 \chi h \int_{\mathbb{R}} dx' \int_0^{f(x')} dt' \Phi(x - x', z, ht') x', ht') \quad (\text{F.31})$$

les termes d'ordre 2 proviennent de l'intégration des termes d'ordre 1 de  $\Phi(x - x', z, ht') E(x', ht')$ , soit

$$ht' \frac{\partial \Phi}{\partial z'}(x - x', z, 0) u_0(x', 0) + ht' \Phi(x - x', z, 0) \frac{u_0}{\partial z}(x', 0) + h \Phi(x - x', z, 0) u_1(x', 0) \quad (\text{F.32})$$

On peut en effet légitimement supposer que  $u_1$  est continu en  $z = 0$  : cette condition aux limites doit être vérifiée pour tous les ordres du développement de  $E$ . Par contre, on ne connaît pas sa

valeur, puisque l'étude de l'ordre 1 s'est faite au dessus de la région de la surface, c'est-à-dire pour  $z > h \max f$ .

On utilise à nouveau la **méthode de Rayleigh**, en prolongeant le développement de RAYLEIGH du champ jusque dans la région de la surface :

$$\forall z, u_1(x, z) = \frac{i}{2} K^2 \chi h \int_{\mathbb{R}} \frac{dk'}{q_1'} t_{12}(k') t_{12}(K) u^{i(k'x + q_1'z)} \tilde{f}(k' - K) \quad (\text{F.33})$$

Avec

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z'}(x - x', z, 0) = -\frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{q_1} u^{+ik(x-x')} i q_1(-t_{21}(k)) u^{i q_1 z} \quad (\text{F.34})$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial z}(x', 0) = -u^{+iKx'} i q_0 t_{21}(K) \quad (\text{F.35})$$

on obtient d'une part

$$\int_{\mathbb{R}} dx' \int_0^{f(x')} dt' \left\{ ht' \frac{\partial \Phi}{\partial z'}(x - x', z, 0) u_0(x', 0) + ht' \Phi(x - x', z, 0) \frac{u_0}{\partial z}(x', 0) \right\} = \quad (\text{F.36})$$

$$= h \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{q_1} u^{+i(kx + q_1 z)} \{ i q_1 t_{21}(k) t_{12}(K) + i q_0 t_{21}(K) t_{12}(k) \} \times \quad (\text{F.37})$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dx' u^{-i(k-K)x'} f^2(x') \quad (\text{F.38})$$

qu'on peut transformer à l'aide de

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f^2(x) u^{-i(k-K)x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k' - K) u^{+i(k'-K)x} dk' u^{-i(k-K)x} dx \quad (\text{F.39})$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k' - K) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) u^{-i(k-k')x} dx dk' = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k' - K) \tilde{f}(k - k') dk' \quad (\text{F.40})$$

et d'autre part

$$\int_{\mathbb{R}} dx' \int_0^{f(x')} dt' h \Phi(x - x', z, 0) u_1(x', 0) = \quad (\text{F.41})$$

$$= -h \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{q_1} u^{+i(kx + q_1 z)} t_{12}(k) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dx' u^{-ikx'} f(x') \frac{iK^2 \chi}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk'}{q_1'} t_{12}(k') t_{12}(K) u^{ik'x'} \tilde{f}(k' - K) \quad (\text{F.42})$$

$$= -h \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{q_1} u^{+i(kx + q_1 z)} t_{12}(k) t_{12}(K) \frac{iK^2 \chi}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk'}{q_1'} t_{12}(k') u^{ik'x'} \tilde{f}(k' - K) \tilde{f}(k - k') \quad (\text{F.43})$$

Le second ordre peut donc se mettre sous la forme

$$s_2(k, K) = \int_{\mathbb{R}} B_2(k, K, k') \tilde{f}(k - k') \tilde{f}(k' - K) dk' \quad (\text{F.44})$$

avec

$$B_2(k, K, k') = -\frac{K^2 \chi}{2} \{ q_1 t_{21}(k) t_{12}(K) + q_0 t_{21}(K) t_{12}(k) \} - \frac{(K^2 \chi)^2}{4q_1'} t_{12}(k) t_{12}(K) t_{12}(k') \quad (\text{F.45})$$

### F.3.d Retour à la condition de Dirichlet

Il est intéressant de considérer la limite  $\chi \rightarrow \infty$ . Avec  $r_{12} \rightarrow -1$ , on a directement

$$B_0(K) = q_0 r_{12}(K) \rightarrow -q_0 \quad (\text{F.46})$$

Le premier ordre est plus subtile, puisqu'il faut voir qu'avec  $q_2 \sim K\sqrt{\chi} \Rightarrow t_{12} \sim \frac{2q_1}{K\sqrt{\chi}}$ , on obtient

$$B_1(k, K) = \frac{i}{2} K^2 \chi t_{12}(k) t_{12}(K) \rightarrow 2iq_0 q_1 \quad (\text{F.47})$$

Ainsi pour la condition de DIRICHLET,

$$s_h(k, K) = -q_0 \delta(k - K) + 2iq_0 q_1 h \tilde{f}(k - K) + O(h^2) \quad (\text{F.48})$$