

Electromagnétisme  
pour la licence de Sciences pour l'Ingénieur  
– notes de cours –

Gabriel SORIANO

24 novembre 2012

# Introduction générale

## Interactions à distance

Un des aspects les plus impressionnants de l'électromagnétisme est l'action à distance à *notre échelle*. Certes, la gravité nous est très familière, puisqu'elle nous maintient les pieds sur Terre. Toutefois, des masses à notre échelle n'interagissent qu'imperceptiblement, et il faut considérer l'influence de corps célestes aux masses énormes : planètes, lunes, étoiles, pour voir apparaître une action mécanique appréciable.

Au contraire,

**Expérience 1 (triboélectricité)** *il suffit de frotter une règle en plastique avec un pull en laine pour attirer des petits morceaux de papier à quelques centimètres.*

Lorsqu'on frotte la règle, celle-ci quitte la neutralité électrique pour acquérir une charge électrique. Les corps chargés constitue le premier **acteur** de notre pièce de théâtre électromagnétique, et l'interaction entre corps chargés est la première à avoir été formalisée quantitativement avec la **loi de Coulomb** (1785). On peut

**Expérience 2 (triboélectricité)** *mettre en évidence en frottant des batons de natures différentes (série triboélectrique) les deux types de charges, parfois appelées polarités*

Les charges de même polarité se repoussent tandis que des polarités différentes s'attirent

Plus proche de nous est l'interaction entre aimants. Tout aimant comporte un pôle nord et un pôle sud.

**Expérience 3 (aimants droits et boussole)** *Les aimants se repoussent ou s'attirent, suivant que des pôles équivalents ou différents sont approchés.*

Un aimant fait tourner l'aiguille aimantée d'une boussole. Ici un couple est exercé.

En enroulant du fil électrique branché sur une pile en un certain nombre de spires, on forme une bobine en courant continu. On remarque

**Expérience 4 (aimants droits et bobines de courant)** *une bobine de courant se comporte exactement comme un aimant droit*

C'est l'équivalence aimant-bobine. Les interactions entre fils électriques sont décrits très précisément par la **loi de Biot et Savart** (1820).

---

Par contre, une bobine ou un aimant n'interagit pas avec un corps chargé au repos. C'est pourquoi on a longtemps considéré l'électricité - interactions entre corps chargés - et le magnétisme - interactions entre aimants ou bobines de courant - comme deux phénomènes distincts.

La question reste : **comment**, par quel truchement, ces acteurs interagissent-ils à distance ? Pour répondre à cette question, on a inventé les **champs** physiques. Un corps chargé produit un **champ électrique** et est le siège d'une action mécanique (force, ...) dès qu'il est soumis au champ électrique créé par d'autres corps chargés. Un aimant ou fil de courant produit un **champ magnétique** et est le siège d'une action mécanique dans le champ magnétique d'autres aimants ou fils de courant. Les champs remplissent tout l'espace, même s'ils sont plus intenses au voisinage des sources, et s'atténuent avec la distance, plus ou moins rapidement.

Remarquons qu'électricité et magnétisme sont des théories de champs. En physique quantique, le **photon** est la particule médiatrice de l'interaction électromagnétique : les interactions se font en échangeant des photons.

Électricité, magnétisme et Optique sont finalement unifiés dans une seule théorie, l'électromagnétisme (EM), par les **équations de Maxwell** (1865). Un corps chargé **en mouvement** est sensible au champ électrique **et** au champ magnétique. Ainsi

**Expérience 5 (aimant droit et tube cathodique)** *un aimant dévie les électrons dans un tube cathodique et brouille l'image sur l'écran.*

C'est la marque de la **force de Lorentz** (1892).

La lumière est donc une onde EM. Vous savez sans doute que la lumière émise par le Soleil met 8 minutes à atteindre la Terre, car elle se propage dans le vide à la vitesse de  $c \simeq 300000 \text{ km/s}$ . Ceci indique que la matière en fusion au cœur du Soleil n'interagit pas instantanément avec les cellules photosensibles de la rétine de notre œil. Les interactions à distance ne sont pas infiniment rapides, elles mettent un certain temps pour se propager d'un endroit à un autre. Lorsque ce **temps de propagation** peut être négligé, on dit que le problème est **quasi-stationnaire**, et dans le cas contraire, on parle d'électrodynamique.

## L'EM pour l'ingénieur

L'EM est la théorie physique de l'**électricité** et de l'électrotechnique, dont le sujet est la production, la distribution, le stockage et l'utilisation industrielle de l'énergie électrique. Les circuits électriques produisent des champs électromagnétiques qui peuvent perturber d'autres circuits ; c'est le sujet d'étude de la **compatibilité électromagnétique**.

L'EM est à la base de la théorie des **circuits électroniques**. Les circuits imprimés des ordinateurs travaillent aujourd'hui à des fréquences supérieures au gigahertz. Pour des raisons de miniaturisation (intégration des transistors), on cherche à graver des pistes toujours plus étroites. La chaleur dissipée par effet JOULE est alors un problème critique.

À l'heure actuelle, tous les moyens de **télécommunication** – à l'exception de la voix et du courrier – utilisent comme vecteur physique les ondes électromagnétiques,

- que ces ondes soient guidées
  - dans des fils de cuivre (télégraphe, téléphone fixe, fax, internet et e-mail par DSL),
  - des câbles coaxiaux (réseaux cablés, peu développés en France)
  - ou dans des fibres optiques (lignes trans-océaniques, réseaux internet)

- 
- ou se propagent *en espace libre* dans les radiofréquences
    - sur ondes longues, courtes et moyennes (radio AM, CB)
    - sur les bandes VHF et UHF (radio FM, télévision hertzienne, télévision numérique terrestre, radiotéléphonie, téléphone sans fil)
    - ou microondes (téléphone mobile GSM, téléphone et télévision satellite, bluetooth)

Les ondes EM trouvent une autre application dans la **téledétection** atmosphérique et spatiale (radars, lidars, radiomètres, altimètres, radiotélescopes). Des techniques de traitement du signal permettent d'améliorer la résolution de ces instruments, c'est la synthèse d'ouverture.

## Bibliographie

Cette bibliographie est purement indicative, et ne se veut en aucun cas exhaustive ou exclusive. Tous les livres cités sont en français et disponibles en prêt à la Bibliothèque Universitaire de Saint-Jérôme.

Les livres français, en particulier ceux de classes préparatoires, se concentrent sur le formalisme mathématique, le calcul intégral-différentiel et la résolution de problèmes de concours. Ils n'abordent que tardivement les matériaux diélectriques et magnétiques, et ne font pas assez le lien entre l'EM et ses branches appliquées, l'électrotechnique et l'électronique. Mais au moins, ils sont précis, rigoureux et d'un très bon niveau.

Les livres anglo-saxons sont abondamment illustrés et ouverts sur la Physique quotidienne, la Physique appliquée et même la Physique moderne. D'un niveau mathématique élémentaire, ils proposent des exercices courts, en directe application du cours, et qui correspondent souvent à ce que l'étudiant doit savoir faire et retenir à long terme. Ils sont parfois vagues et équivoques, et peuvent par là induire l'étudiant en erreur.

- Remise à niveau
  - livres de lycée, filières scientifiques et techniques
  - Physique générale et appliquée, Bueche et Hecht, série Schaum's
- Très accessibles
  - Electricité et magnétisme, Halliday, Resnick et Walker, Dunod
  - Electromagnétisme, Edminister, série Schaum's
- Université
  - Les base de l'électromagnétisme, Hulin et Maury, Dunod
- Classes préparatoires aux grandes écoles
  - Bertin, Faroux et Renaud, tomes 1 et 3, Dunod
  - Gié et Sarmant
  - Lumbroso pour les problèmes
- Universités américaines
  - Electricité et magnétisme, cours de Berkeley, Dunod
  - Electromagnétisme 1 et 2, Feynman, InterEditions
- Deuxième et troisième cycles
  - Electromagnétisme, Pérez, Dunod
  - Electrodynamique classique, Jackson, Dunod
  - Electrodynamique des milieux continus, Landau et Lifchitz, Physique théorique tome 8, éditions MIR

# Table des matières

<b>A</b>	<b>Electromagnétisme stationnaire</b>	<b>6</b>
<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
I.1	Charge électrique . . . . .	7
I.2	Courant électrique . . . . .	7
I.3	Un peu de topologie . . . . .	8
I.4	Régime stationnaire . . . . .	9
<b>II</b>	<b>Force électromagnétique</b>	<b>10</b>
II.1	Lignes de champ . . . . .	10
II.2	Forces électromagnétiques . . . . .	13
II.3	Moment dipolaire . . . . .	14
<b>III</b>	<b>Champ électromagnétique</b>	<b>17</b>
III.1	Flux et circulation . . . . .	17
III.2	Loi des mailles . . . . .	18
III.3	Flux magnétique . . . . .	20
III.4	Théorème de Gauss . . . . .	20
III.5	Théorème d'AMPÈRE . . . . .	22
<b>IV</b>	<b>Champ magnétique et inductance</b>	<b>24</b>
IV.1	Champ créé par un câble rectiligne infini . . . . .	24
IV.2	Inductance . . . . .	24
IV.3	Calcul avec le théorème d'AMPÈRE . . . . .	25
a)	Solénoïde long . . . . .	25
b)	Bobine torique . . . . .	26
IV.4	Calcul avec la loi de BIOT et SAVART . . . . .	26
a)	Loi de BIOT et SAVART . . . . .	26
b)	Champ créé par une bobine plate circulaire sur son axe . . . . .	27
c)	Solénoïde court . . . . .	27
IV.5	Aimants et magnétisme terrestre . . . . .	28
<b>V</b>	<b>Conducteur</b>	<b>30</b>
V.1	Electrisation . . . . .	30
V.2	Conducteur en équilibre électrostatique . . . . .	30
V.3	Condensateur . . . . .	32
V.4	Courant volumique . . . . .	33
V.5	Conducteur ohmique . . . . .	33
V.6	Force électromotrice . . . . .	34
V.7	Effet HALL . . . . .	35
V.8	Force de LAPLACE . . . . .	36

<b>B Régime quasi-stationnaire et effets électrodynamiques</b>	<b>37</b>
<b>VI Induction</b>	<b>38</b>
VI.1 Approche expérimentale . . . . .	38
VI.2 Loi de Faraday . . . . .	38
VI.3 Exemples d'induction . . . . .	39
VI.4 Courants de FOUCAULT . . . . .	40
VI.5 Courant de déplacement . . . . .	40
VI.6 Temps de propagation . . . . .	40
VI.7 ARQS . . . . .	41
<b>VII Onde électromagnétique</b>	<b>42</b>
VII.1 Onde propagative . . . . .	42
VII.2 Onde plane . . . . .	42
VII.3 Structure de l'onde électromagnétique . . . . .	42
VII.4 Effet KELVIN . . . . .	43
VII.5 Résistance des câbles électriques à haute-fréquence . . . . .	43
VII.6 Milieu matériel . . . . .	44
VII.7 Relations de passage . . . . .	44
VII.8 Dioptre plan . . . . .	45

# Première partie

## Electromagnétisme stationnaire

# Chapitre I

## Introduction

### I.1 Charge électrique

Au niveau atomique, la matière est uniquement constituée de protons, de neutrons et d'électrons. Tous les protons ont la même charge électrique  $q_p = +e \simeq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , et tous les électrons portent la charge opposée  $q_e = -e$ , les neutrons n'étant pas chargés. Toutefois, à notre échelle, le nombre de particules rencontré est généralement très grand : de l'ordre du nombre d'AVOGADRO  $\mathcal{N} \simeq 6 \cdot 10^{23}$ , et il est bien évident qu'on ne peut traiter chaque particule individuellement. Nous allons étudier comment prendre en compte globalement, **à l'échelle macroscopique**, les phénomènes électriques dans la matière, et la charge des corps sera manipulée comme un nombre réel.

Tout d'abord, si les quantités de charges positives et négatives rencontrées sont énormes, la matière les contient en nombres **quasi-égaux**. En cas d'égalité stricte, un corps est dit **globalement neutre**. Sinon, il est porteur d'une charge **résultante** ou **nette**.

Ensuite, on distinguera dans ce cours deux types de matériaux. Dans les matériaux isolants ou **diélectriques**, à l'état neutre, toutes les charges sont liées, alors que certains porteurs de charges d'un matériau **conducteur se déplacent librement** dans les limites de son volume. Nous verrons qu'en conséquence, **la charge nette se répartie en volume pour les diélectriques et en surface pour les conducteurs**. Les semi-conducteurs, dont la théorie relève de la physique quantique et statistique, ne seront pas abordés dans ce cours.

Sont isolants le vide, l'air, les verres et plastiques, l'eau distillée, les huiles et céramiques. Les électrons de covalence des métaux en font de très bons conducteurs. Viennent ensuite les solutions électrolytiques, eau du robinet, corps humain, terre, dont les charges mobiles sont des ions.

### I.2 Courant électrique

Le courant électrique est un **mouvement d'ensemble de charges**, dans un référentiel donné. Au contraire, le mouvement désordonné dû à l'agitation thermique ne constitue pas un courant.

L'**intensité** en ampères ( $A=C/s$ ) du courant à travers une **surface orientée** est la quantité algébrique de charge (C) par unité de temps (s) qui traverse la surface suivant son orientation.



Le cas du **courant continu** où l'intensité ne dépend pas du temps est le plus simple. Considérons une surface  $\Sigma$  **ouverte** et orientée ; si sur la durée  $\Delta t$ , une charge algébrique  $\Delta q$  a traversé la surface suivant son orientation, alors l'intensité vaut

$$I_{\Sigma} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

En **régime variable**, la limite

$$i_{\Sigma}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q(t)}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}(t)$$

donne l'intensité instantanée à l'instant  $t$ .

Sur un schéma, le **sens du courant** dans un fil électrique est indiqué par un chevron, qui donne l'orientation de la section à travers laquelle  $i$  est donnée. Dans les métaux, les charges mobiles étant des électrons, un courant positif dans un sens indique un mouvement des électrons dans le sens opposé.

Considérons maintenant une surface **fermée** et orientée vers l'extérieur. On note  $\partial\Omega$  cette surface pour la distinguer de  $\Sigma$  ouverte, et  $q_{\Omega}(t)$  la charge contenue dans le volume intérieur à  $\partial\Omega$ , ou tout simplement charge intérieure, et enfin  $i_{\partial\Omega}(t)$  l'intensité du courant **sortant** à travers  $\partial\Omega$ . Comme **la charge électrique est conservative**, c'est-à-dire qu'il n'y a jamais ni création ni disparition de charge électrique, toute charge  $dq$  qui sort de  $\Sigma$  correspond à une diminution de  $q_{\Omega}$ , de sorte que  $dq + dq_{\Omega} = 0$  d'où la **loi de conservation de la charge électrique**

$$i_{\partial\Omega} + \frac{dq_{\Omega}}{dt} = 0$$

### I.3 Un peu de topologie

On note  $\Omega$  un volume fini dont la frontière ou bord  $\partial\Omega$  est une surface fermée. On convient d'orienter cette surface depuis l'intérieur  $\Omega$  vers l'extérieur.

On note  $\Sigma$  une surface ouverte, orientée c'est-à-dire de faces nord et sud déterminées, et dont le bord  $\partial\Sigma$  est un contour fermé (ou boucle), orienté suivant la règle.

On note  $\Gamma$  un contour ouvert de points extrémités  $A_{\Gamma}$  et  $B_{\Gamma}$ , et orienté de  $A_{\Gamma}$  vers  $B_{\Gamma}$ .

#### Règles d'orientation

- Le bonhomme d'AMPÈRE, dont le corps est aligné sur une portion de la boucle et orienté suivant le sens du contour – le *courant* lui rentre par les pieds et lui sort par la tête – et dont le bras droit est tangent à la surface et dirigé vers son *centre*, a son dos face sud et son ventre nord, ou encore il regarde dans le sens de la normale, vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  perpendiculaire à la surface et porteur de son orientation.
- Suivant la **règle de la main droite**, le pouce est aligné sur une portion de la boucle et orienté suivant le sens du contour, l'index est tangent à la surface et dirigé vers son *centre*, le majeur indique le sens de la normale.
- Suivant la **règle du tirebouchon**, quand on visse suivant l'orientation du contour, la tige indique le sens de la normale.

## I.4 Régime stationnaire

Un problème physique est dit stationnaire lorsque les grandeurs qui le caractérisent sont indépendantes du temps.

En régime stationnaire dans un référentiel donné, les champs électriques sont produits par des corps chargés au repos - ces charges nettes sont dites à l'**équilibre électrostatique** - et les champs magnétiques sont créés par des aimants au repos et des courants continus dans des circuits électriques fixes, avec une préférence pour les **circuits filiformes** ou fils électriques.

Si le courant est continu, alors il n'y a pas d'accumulation de charges, en aucun point du circuit :  $\frac{dq_\Omega}{dt} = 0$ . A tout instant, l'arrivée d'un électron s'accompagne du départ d'un électron. La loi de conservation de la charge électrique devient

$$I_{\partial\Omega} = 0$$

Appliquée à un circuit électrique composé de plusieurs branches, cette loi s'écrit sur une surface  $\partial\Omega$  entourant un noeud

$$I_{\partial\Omega} = \sum_n I_n = 0$$

où les  $I_n$  sont les intensités algébriques dans les branches. C'est la **loi des noeuds** de KIRCHHOFF.

Les conducteurs sont **localement neutres**, tout en étant le siège d'un courant. Dans les métaux par exemple, on aura ainsi en permanence et sur tout domaine élémentaire macroscopique autant de protons fixes que d'électrons fixes et mobiles :  $q_p + q_e = 0$ , et dans le même temps une quantité  $\Delta q \neq 0$  d'électrons mobiles qui traversent une surface  $\Sigma$ .

Dans cette partie du cours, on considère par défaut que le problème est stationnaire, et implicitement, les champs électriques sont électrostatiques, et les champs magnétiques sont magnétostatiques.

# Chapitre II

## Force électromagnétique

En Physique, on compte seulement quatre interactions fondamentales :

- la force nucléaire faible,
- la force nucléaire forte,
- la force électromagnétique,
- la force gravitationnelle.

et tout phénomène physique s'explique par une ou plusieurs de ces quatre forces. Les deux forces nucléaires interviennent à l'échelle microscopique. Elles assurent la cohésion du noyau atomique, et tiennent les électrons à l'écart. Elles sont aussi responsables de la radioactivité (...), mais leur action est confinée au voisinage du noyau des atomes. La gravité pour sa part organise les amas galactiques, la galaxie, le système solaire, le mouvement lunaire et les marées, garde l'atmosphère autour de la planète, et nous maintient les pieds sur terre. Ainsi, tous les autres phénomènes relèvent de l'électromagnétisme. Cette discipline revêt donc une grande importance en physique fondamentale, mais aussi appliquée.

C'est la force électromagnétique qui structure et ordonne la matière, et lie :

- les électrons au noyau atomique,
- les atomes dans les molécules
- et les ions dans les métaux.

Les liaisons chimiques sont en fait des liaisons électriques, comme les réactions chimiques sont des actions entre charges électriques. L'électromagnétisme est ainsi au fondement théorique de la **chimie** et de la **science des matériaux**.

### II.1 Lignes de champ

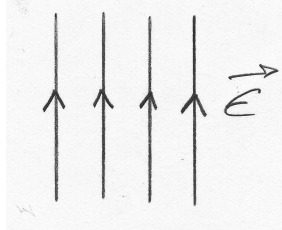
**Expérience 6 (spectre magnétique)** *En saupoudrant de la limaille de fer autour d'un aimant, on voit les grains s'organiser pour former des lignes.*

Ces lignes sont appelées lignes de champ magnétiques, et elles forment la carte de champ magnétique ou spectre magnétique de l'aimant. L'orientation conventionnelle de ces lignes est du pôle nord vers le pôle sud de l'aimant à l'extérieur de celui-ci.

**Expérience 7 (spectre électrique)** *On peut observer le spectre électrique entre deux électrodes en les plongeant dans de l'huile et en saupoudrant de grains de semoule.*

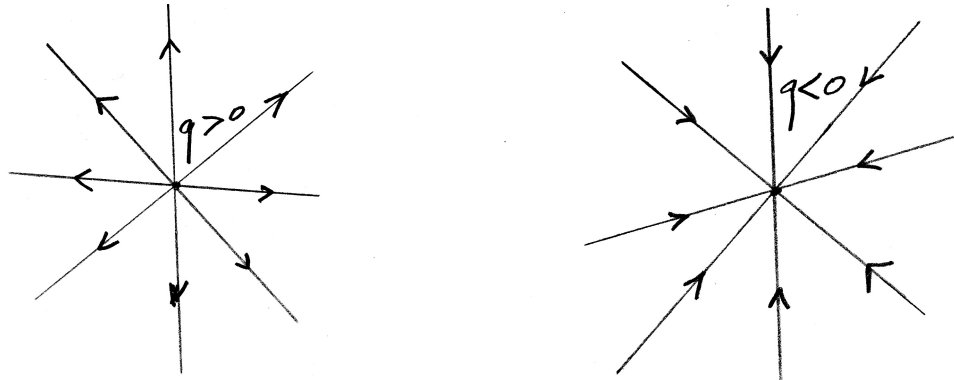
Les lignes sont orientées des charges **positives** vers les charges **néglatives**.

En un point, le champ électrique (resp. magnétique) prend pour valeur un **vecteur  $\mathbf{E}$**  (resp.  **$\mathbf{B}$** ) tangent à la ligne de champ, orienté dans le sens de la ligne, et d'amplitude d'autant plus grande que les lignes de champ sont rapprochées. Des lignes parallèles et régulièrement espacées sur une région de l'espace sont la marque d'un champ **uniforme**. C'est le **champ vectoriel** le



plus simple.

Une **charge ponctuelle** au repos donne la carte de champ électrique suivante, selon le signe de sa charge. Les lignes sont des rayons de centre la charge. Un doublet électrique est composé



de deux particules de **charges égales et opposées**. La carte de son champ est plus complexe (figure II.1). On peut aussi considérer des particules de même polarité, de charges égales (figure II.2) ou non (figure II.3). C'est une règle générale du champ électrique : les lignes de champ partent des charges positives ou de l'infini et arrivent aux charges négatives ou à l'infini. On remarque aussi que les lignes ne forment pas de boucles.

Par équivalence aimant-bobine, il est naturel de trouver des cartes de champ magnétiques semblables pour l'aimant droit et la bobine de courant. Ici et à la différence des lignes de champ électriques, les lignes de champ magnétiques forment des boucles, éventuellement ouvertes à l'infini. Ces lignes ne semblent partir d'aucun point en particulier.

A grande distance, on remarque que les cartes de champ du doublet électrique, de l'aimant droit et de la bobine de courant se confondent : c'est le **régime dipolaire**. Lorsque la distance du point test au centre de l'acteur (doublet, aimant droit, bobine de courant) est très grande devant les dimensions de celui-ci, cet acteur se comporte comme un **dipôle** (dipôle électrique pour le doublet, dipôle magnétique pour l'aimant ou la bobine), dont la carte de champ est représentée figure.

On ne peut pas trouver de source magnétique qui produise un champ magnétique aussi simple que le champ électrique produit par une charge ponctuelle. On dit qu'il n'existe pas de monopôle magnétique : chaque fois qu'il y a un pôle nord, on trouve un pôle sud associé...

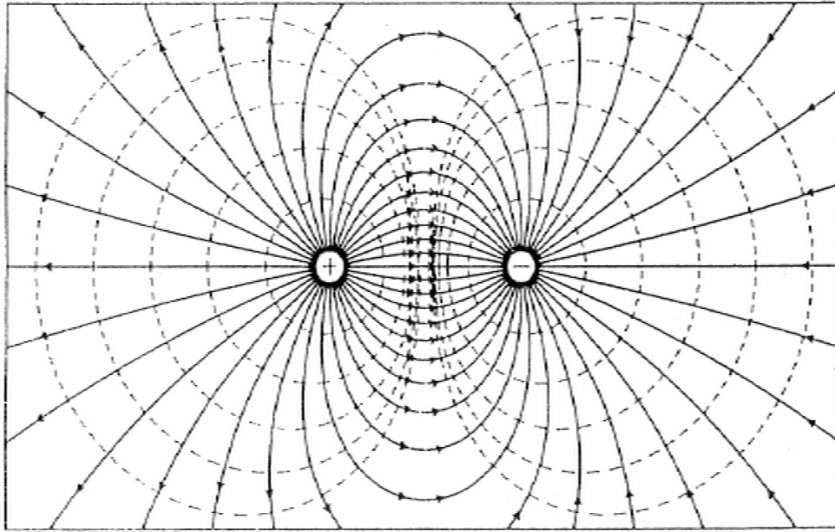


FIGURE II.1 – Carte de champ du doublet électrique

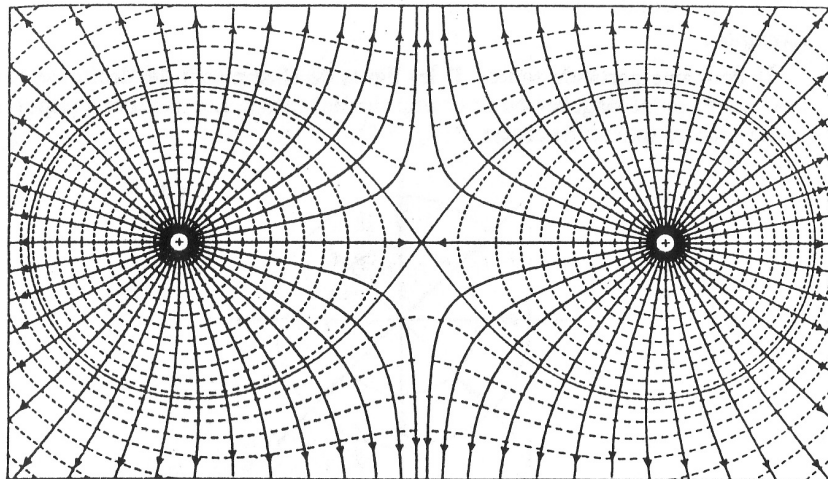


FIGURE II.2 – Carte de champ pour deux charges identiques

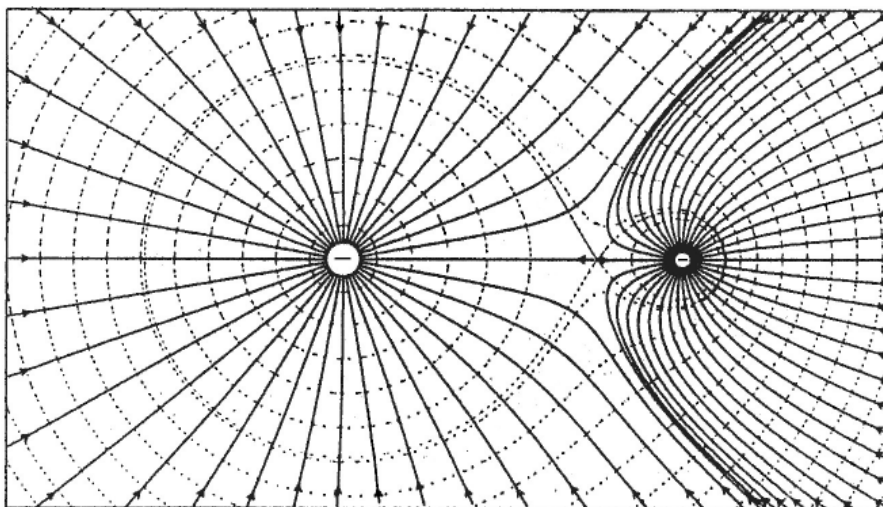


FIGURE II.3 – Carte de champ pour deux charges différentes, mais de même polarité

## II.2 Forces électromagnétiques

En présence d'un champ électrique  $\mathbf{E}$  et d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$ , une **charge ponctuelle** de charge  $q$  positionnée au point  $M$  et de vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  est soumise à la force électromagnétique ou force de LORENTZ  $\mathbf{F}^{em}$

$$\mathbf{F}^{em} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

Pour être tout à fait rigoureux, il faudrait noter  $\mathbf{F}^{em} = q\mathbf{E}(M) + q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(M)$  pour ne pas confondre les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  et leurs valeurs  $\mathbf{E}(M)$  et  $\mathbf{B}(M)$  au point  $M$ ...

Qu'est-ce qu'une charge ponctuelle ? C'est un corps chargé dont les dimensions sont très petites devant la distance qui le sépare des autres corps. Ainsi un électro dans un tube cathodique est une charge ponctuelle, mais pas un électron dans un atome.

La partie électrique de la force électromagnétique est appelée force électrique ou force de COULOMB

$$\mathbf{F}^e = q\mathbf{E}$$

et c'est la force entre corps chargés. La partie magnétique de la force électromagnétique est appelée force magnétique.

$$\mathbf{F}^m = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

C'est cette force magnétique qui donne une influence aux aimant et aux fils de courant sur les charges en mouvement, mais pas sur les charges au repos, puisqu'elle s'annule avec la vitesse.

Dans le système international (SI), l'unité de force est le newton (N), l'unité de charge est le coulomb (C) et l'unité de vitesse est le mètre par seconde (m/s). Une unité du champ électrique est donc le newton par coulomb (N/C), mais on lui préfère généralement le volt par mètre (V/m). Le champ magnétique a une unité propre, le tesla ( $T = \frac{Ns}{Cm}$ ).

En coordonnées cartésiennes, on détaille :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}^{em} = \begin{pmatrix} F_x^{em} \\ F_y^{em} \\ F_z^{em} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(E_x + v_y B_z - v_z B_y) \\ q(E_y + v_z B_x - v_x B_z) \\ q(E_z + v_x B_y - v_y B_x) \end{pmatrix}$$

En mécanique, les forces s'additionnent **vectoriellement**. En considérant  $N_e$  sources de champs électriques et  $N_m$  sources de champs magnétiques, une charge mobile est plongée dans  $N_e$  champ électriques  $\mathbf{E}_i$  et  $N_m$  champ magnétiques  $\mathbf{B}_j$ , et donc soumise à  $N_e$  forces électriques  $F_i^e = q\mathbf{E}_i$  et  $N_m$  forces magnétiques  $F_j^m = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_j$ . La force totale s'écrit comme la somme vectorielle

$$\mathbf{F}^{em} = \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{F}_i^e + \sum_{j=1}^{N_m} \mathbf{F}_j^m = q \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{E}_i + q\mathbf{v} \wedge \sum_{j=1}^{N_m} \mathbf{B}_j = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

Ainsi les champs s'additionnent eux aussi vectoriellement, et en cas de sources multiples, le champ électrique total est la somme vectorielle de tous les champ électriques et le champ magnétique total est la somme vectorielle de tous les champ magnétiques.

$$\mathbf{E}(M,t) = \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{E}_i \quad \mathbf{B}(M,t) = \sum_{j=1}^{N_m} \mathbf{B}_j$$

C'est le **principe de superposition**. Attention toutefois, une particule n'est pas influencée par son propre champ.

On peut transcrire la force de LORENTZ sur une **distribution continue de charge** en différentiant l'expression vue précédemment. Pour un élément  $dq$  de charge, en mouvement à la vitesse  $\mathbf{v}$ , l'élément de force s'écrit

$$d\mathbf{F}^{em} = dq\mathbf{E} + dq\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

La force magnétique s'applique sur les fils de courants, car un courant électrique n'est rien d'autre qu'un **mouvement d'ensemble** de certaines charges, dites **charges mobiles**. Considérons un élément fil de longueur  $d\ell$  portant une quantité de charges mobiles  $dq$ , et supposons tout d'abord que ces charges mobiles soient positives ; elle se déplacent donc dans le sens du courant. A la vitesse  $v$ , toutes les charges mobiles auront quitté l'élément au bout d'un temps  $dt$  vérifiant  $d\ell = vdt$ . Par définition de l'intensité  $I$  du courant, on a une quantité de charge  $dq = Idt$  qui a traversé l'extrémité de l'élément. Ainsi,  $vdq = Ivdt = Id\ell$ . Maintenant, en construisant l'élément vectoriel de fil  $d\boldsymbol{\ell}$  tel que  $v d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{v} d\ell$ , on obtient l'égalité vectorielle

$$v dq = I d\boldsymbol{\ell}$$

Cette égalité reste vraie pour des charges mobiles négatives : la quantité de charges  $dq_m$  devient elle aussi négative, et le vecteur vitesse change de sens, ainsi le vecteur  $\mathbf{t}$  reste dans la direction du courant. Ceci nous permet d'exprimer l'action du champ magnétique sur un fil de courant élémentaire centré sur le point  $M$  à l'instant  $t$ , qui est appelée élément de force de LAPLACE :

$$d\mathbf{F}^L = I d\boldsymbol{\ell} \wedge \mathbf{B}$$

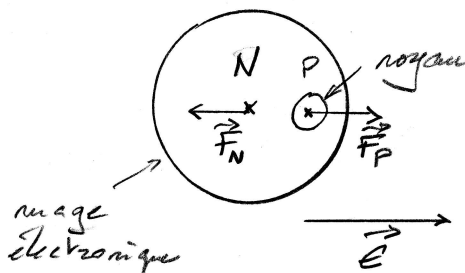
Par intégration sur le contour du circuit, on peut calculer la résultante  $\mathbf{F}_L$  et le moment  $\mathbf{M}_L(O)$  au point  $O$  de la force de LAPLACE

$$\mathbf{F}_L = I \oint \mathbf{t} \wedge \mathbf{B} d\ell \quad \mathbf{M}_L(O) = I \oint \mathbf{r} \wedge (\mathbf{t} \wedge \mathbf{B}) d\ell$$

où  $\mathbf{r}$  est le vecteur reliant le point  $O$  au point d'intégration.

## II.3 Moment dipolaire

Un champ électrique agit sur les charges liées des atomes et des molécules. La force de COULOMB agit en sens inverse sur le noyau, chargé positivement, et sur les électrons. Sous l'action du champ, les **barycentres  $P$  des charges positives et  $N$  des charges négatives** ne coïncident plus. L'atome ou la molécule est dit **polarisé** et se comporte comme un **doublet électrique**.



Ce doublet est caractérisé par son **vecteur moment dipolaire électrique**, défini comme

$$\mathbf{p} = q\mathbf{NP} \quad (\text{Cm})$$

ou  $q > 0$  est la somme des charges positives.

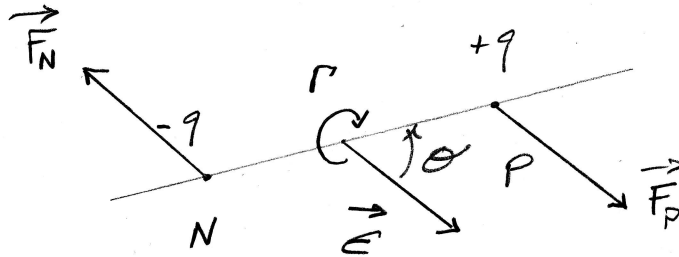
Les molécules polaires (comme  $H_2O$ ) possèdent du fait de leur structure un **moment dipolaire permanent**. La résultante des force de COULOMB sur un tel doublet **rigide** est nulle

$$\mathbf{F}_P + \mathbf{F}_N = \mathbf{0}$$

L'action du champ est un couple d'amplitude

$$\Gamma = 2qE \frac{NP}{2} \sin \theta = pE \sin \theta$$

où  $\theta$  est l'angle entre le champ  $\mathbf{E}$  et le moment dipolaire  $\mathbf{p}$ , et de direction perpendiculaire au plan formé par les vecteurs  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{E}$ .



On peut exprimer ce couple à l'aide du produit vectoriel

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E} \quad (\text{Nm})$$

ou, dans une base cartésienne,

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} p_y E_z - p_z E_y \\ p_z E_x - p_x E_z \\ p_x E_y - p_y E_x \end{pmatrix}$$

Sans démonstration, l'énergie potentielle du doublet rigide dans le champ électrique vaut

$$\mathcal{E}_p^e = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} + \text{constante} = -pE \cos \theta + \text{constante} \quad (\text{J})$$

d'où le couple obtenu ci-dessous peut être retrouvé. Pour minimiser son énergie potentielle, le doublet va **s'aligner dans la direction et le sens** du champ électrique. L'énergie potentielle permet aussi de traiter le cas des champs non-uniformes.

Considérons maintenant l'action du champ magnétique sur une boucle de courant. Si le champ est uniforme, ou si la boucle de courant est très petite devant les variations spatiales du champ magnétique, la résultante de la force de LAPLACE est nulle.

$$\mathbf{F}_L = I \left( \oint \mathbf{t} dl \right) \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

On peut calculer le couple appliqué sur une boucle de courant rectangulaire  $ABCD$  rigide plongée dans un champ magnétique uniforme. Le couple vaut  $\Gamma = abIB \sin \theta$  où  $ab = S$  est l'aire du rectangle. Par analogie avec le cas électrique, on voit qu'une petite boucle de courant, et par extension un petit aimant, constitue un **dipôle magnétique**, caractérisé par un **vecteur**



**moment dipolaire magnétique  $\mathbf{m}$ .** Dans un champ magnétique extérieur  $\mathbf{B}$ , un dipôle est soumis à un couple  $\mathbf{\Gamma}$ , et on lui associe une énergie potentielle magnétique  $\mathcal{E}_p^m$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B} \quad (\text{Nm}) \quad \mathcal{E}_p^m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} + \text{constante} \quad (\text{J})$$

Dans le cas de la boucle de courant, la direction et le sens de ce vecteur moment dipolaire suit la **règle du bonhomme d'Ampère** qui sert à orienter les surfaces qui s'appuient sur un **contour fermé orienté**. En effet, la boucle de courant est un contour fermé, et orienté par le sens du courant. Les surfaces qui s'appuient sur ce contour, c'est-à-dire les **surfaces ouvertes** dont le bord coïncide avec le la boucle, peuvent et doivent être orientée par le sens du courant dans la boucle.

### Règles d'orientation

- Le bonhomme d'AMPÈRE, dont le corps est aligné sur une portion de la boucle et orienté suivant le sens du contour – le *courant* lui rentre par les pieds et lui sort par la tête – et dont le bras droit est tangent à la surface et dirigé vers son *centre*, a son dos face sud et son ventre nord, ou encore il regarde dans le sens de la normale, vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  perpendiculaire à la surface et porteur de son orientation.
- Suivant la **règle de la main droite**, le pouce est aligné sur une portion de la boucle et orienté suivant le sens du contour, l'index est tangent à la surface et dirigé vers son *centre*, le majeur indique le sens de la normale.
- Suivant la **règle du tirebouchon**, quand on visse suivant l'orientation du contour, la tige indique le sens de la normale.

Une petite boucle de courant constitue ainsi un **dipôle magnétique**, caractérisé par le **vecteur moment dipolaire magnétique**

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{n} \quad (\text{Am}^2)$$

A noter que pour une bobine plate composée de  $N$  boucles, ce moment devient  $\mathbf{m} = NIS\mathbf{n}$ . La description la plus simple d'un petit aimant droit est aussi un dipôle magnétique de vecteur moment dipolaire magnétique  $\mathbf{m}$ , dirigé du pôle sud de l'aimant vers son pôle nord, et dont le module caractérise la *puissance* de l'aimant. C'est par analogie avec l'aimant qu'on a défini la face nord et la face sud d'une boucle de courant, d'une bobine. Les gros aimants, ou les aimants en U, seront constitués par une assemblées de dipôles magnétiques...

Le couple  $\mathbf{\Gamma}$  a tendance à aligner le moment sur la direction et le sens du champ. Cette énergie est minimum lorsque les deux vecteurs sont colinéaires et de même sens. Si le dipôle est libre (mais reste rigide), il va évoluer de sorte que son énergie potentielle soit minimum. Il va donc tourner pour aligner son vecteur moment dipolaire sur la direction et le sens du champ, et se déplacer vers l'endroit où le champ est le plus intense. Si le dipôle est seulement libre de tourner, comme l'aiguille d'une boussole, il est soumis au couple  $\mathbf{\Gamma}$ .

# Chapitre III

## Champ électromagnétique

### III.1 Flux et circulation

On a vu que la **valeur en un point**  $M$  d'un champ vectoriel comme le champ électrique ou le champ magnétique est un vecteur, qu'on a noté  $\mathbf{E}(M)$  ou  $\mathbf{E}$  pour le champ électrique et  $\mathbf{B}(M)$  ou  $\mathbf{B}$  pour le champ magnétique.

Nous allons maintenant définir pour un champ vectoriel la **circulation le long d'une courbe**  $\Gamma$  ou  $\partial\Sigma$  et le **flux à travers une surface**  $\Sigma$  ou  $\partial\Omega$ .

**Un peu de topologie** On note  $\Omega$  un volume fini dont la frontière ou bord  $\partial\Omega$  est une surface fermée. On convient d'orienter cette surface depuis l'intérieur  $\Omega$  vers l'extérieur.

On note  $\Sigma$  une surface ouverte, orientée c'est-à-dire de faces nord et sud déterminées, et dont le bord  $\partial\Sigma$  est un contour fermé (ou boucle), orienté suivant la règle.

On note  $\Gamma$  un contour ouvert de points extrémités  $A_\Gamma$  et  $B_\Gamma$ , et orienté de  $A_\Gamma$  vers  $B_\Gamma$ .

**Flux à travers une surface orientée** Le flux  $\Phi$  d'un champ vectoriel à travers une surface orientée, fermée ou ouverte, est proportionnel au nombre algébrique de lignes de champ qui traversent la surface. Les lignes de même orientation que la surface sont comptées positivement, les autres négativement. Le flux est d'autant plus important que les lignes sont serrées, et donc que le champ est intense. Le flux est d'autant plus faible que les lignes arrivent sur la surface avec un angle important, angle compté par rapport à la normale à la surface.

Dans le cas d'un champ uniforme  $\mathbf{F}$  à travers une surface plane, le flux vaut

$$\Phi = FS \cos \theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}$$

où  $F$  est l'amplitude du champ,  $S$  l'aire de la surface, et  $\theta$  l'angle entre la ligne de champ et la normale à la surface.

Plus généralement, si  $F$  et  $\theta$  sont constants sur la surface, on retrouve

$$\Phi = FS \cos \theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$$

Sinon, il faut décomposer la surface en éléments suffisamment petits et pour chaque élément,

$$d\Phi = F \cos \theta dS = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

L'unité du flux est l'unité du champ multiplié par des mètres carrés. Ainsi, le champ magnétique étant en teslas (T), son flux est en  $\text{Tm}^2$ .

**Circulation le long d'un contour orienté** On considère maintenant une ligne courbe continue et orientée, ouverte ou fermée. En notant  $d\boldsymbol{\ell}$  l'élément de contour tangent à la courbe et orienté, l'élément de circulation d'un champ vectoriel est défini comme

$$d\mathcal{C} = \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = F dl \cos \alpha$$

où  $\alpha$  est l'angle entre la ligne de champ et la courbe, de sorte que la circulation  $\mathcal{C}$  est l'intégrale de contour

$$\mathcal{C} = \int F \cos \alpha dl = \int \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

Si le champ est uniforme, alors tout simplement sur le contour ouvert  $\Gamma$

$$\mathcal{C}_\Gamma = \mathbf{F} \cdot \int_\Gamma d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}_\Gamma \mathbf{B}_\Gamma$$

où  $A_\Gamma$  et  $B_\Gamma$  sont les extrémités de  $\Gamma$ . La circulation d'un champ uniforme sur contour fermé  $\partial\Sigma$  est donc toujours nul.

$$\oint_{\partial\Sigma} d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathcal{C}_{\partial\Sigma} = 0$$

L'unité de la circulation est l'unité du champ multiplié par des mètres. Ainsi, Le champ électrique étant en  $\text{N/C}$  ou en  $\text{V/m}$ , sa circulation est en  $\text{Nm/C}$  ou tout simplement en volts (V).

## III.2 Loi des mailles

La circulation du champ électrique est appelée circulation électrique et notée  $\mathcal{C}^e$ .

La circulation du champ électrique  $\mathcal{C}^e$  sur n'importe quel contour fermé  $\partial\Sigma$  est nul.

$$\mathcal{C}_{\partial\Sigma}^e = 0$$

Cette propriété fondamentale du champ électrique est appelée **loi des mailles**.

La circulation électrique entre deux points distincts  $A$  et  $B$  ne dépend donc pas du chemin suivi, puisqu'en considérant deux chemins différents, un passant par  $M$  et l'autre par  $N$ ,

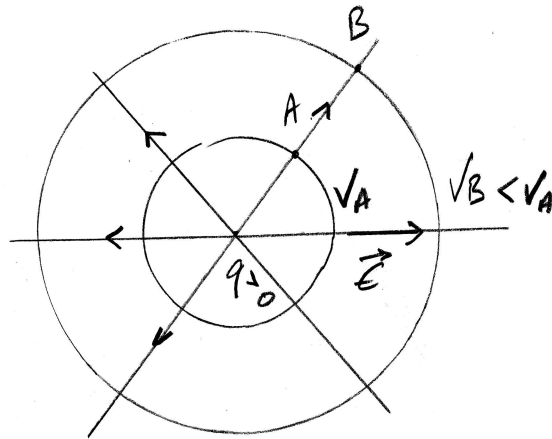
$$\mathcal{C}_{AMBNA}^e = 0 = \mathcal{C}_{AMB}^e + \mathcal{C}_{BNA}^e = \mathcal{C}_{AMB}^e - \mathcal{C}_{ANB}^e$$

La circulation électrique ne dépend que des extrémités  $A_\Gamma$  et  $B_\Gamma$  du contour  $\Gamma$  considéré. On définit un nouveau champ, non pas vectoriel mais scalaire celui-ci, appelé **potentiel électrique**, noté  $V$  et tel que

$$\int_\Gamma \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mathcal{C}_\Gamma^e = V(A_\Gamma) - V(B_\Gamma)$$

et dont l'unité est le volt (V). Au passage, la circulation électrique est aussi en volts.

Le potentiel est cartographié par ces surfaces équipotentielles. Chaque surface correspond à une valeur du potentiel. Les surfaces équipotentielles sont toujours perpendiculaires aux lignes



de champ électrique. Ceci se traduit mathématiquement par  $V(B) - V(A) = \int_A^B dV \Rightarrow$

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

c'est-à-dire que lors d'un déplacement  $d\boldsymbol{\ell}$  sur la carte de champ, la variation de potentiel  $dV$  est nulle dans la direction orthogonale à  $\mathbf{E}$ , c'est-à-dire à la ligne de champ. Cette variation est positive en remontant la ligne de champ, et négative en la descendant. On dit aussi que **le champ électrique descend les potentiels**, étant dirigé des surfaces de plus haut potentiel vers les surfaces de plus bas potentiel.

Le potentiel électrique est défini à une constante additive près. En cela, ce n'est pas une grandeur physique, simplement un intermédiaire de calcul. Il est courant d'utiliser un **potentiel de référence**, région de l'espace de potentiel prescrit. En physique, on fixe souvent le potentiel à l'infini à zéro

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V = V_\infty = 0$$

En électricité, la référence est la masse du circuit.

Le potentiel de référence disparaît dans les calculs de **différence de potentiel (ddp)**. Entre deux points  $A$  et  $B$ , on note

$$U_{AB} = V(A) - V(B) \quad (\text{V})$$

et dans une région où le champ électrique peut être supposé uniforme, on obtient

$$U_{AB} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{AB} = -E AB \cos \varphi$$

où  $\varphi$  est l'angle entre les vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{AB}$ .

Soient trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans un champ électrique, alors

$$V(A) - V(B) + V(B) - V(C) + V(C) - V(A) = U_{AB} + U_{BC} + U_{CA} = 0$$

qui est l'expression électrocinétique de la loi des mailles  $\mathcal{C}_{\partial\Sigma}^e = 0$ .

Le travail  $W_{AB}$  de la force de COULOMB  $\mathbf{F}_C = q\mathbf{E}$  exercé par un champ électrique  $\mathbf{E}$  sur une particule de charge  $q$  le long d'une trajectoire reliant les points  $A$  et  $B$  vaut

$$W_{AB} = \int_A^B q\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = q\mathcal{C}^e[AB] = q(V(A) - V(B)) = qU_{AB} \quad (\text{J})$$

Ce travail ne dépend pas du chemin suivi, ce qui est caractéristique d'une **force conservative**, à laquelle on associe une **énergie potentielle**  $\mathcal{E}_p^e$ . Cette énergie potentielle électrique vaut pour une charge  $q$  au point  $M$ ,

$$\mathcal{E}_p^e = qV(M) \quad (\text{J})$$

et si la particule passe d'un potentiel  $V(A)$  à un potentiel  $V(B)$ , quelque soit sa trajectoire, on sait directement que son énergie potentielle a varié de

$$\Delta\mathcal{E}_p^e = q(V(B) - V(A)) = -qU_{AB}$$

Ainsi, si la particule n'est soumise à aucune autre force, son énergie mécanique se conserve :

$$\Delta\mathcal{E}_m = \Delta\mathcal{E}_c + \Delta\mathcal{E}_p^e = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + qU_{AB}$$

### III.3 Flux magnétique

Le flux du champ magnétique est appelé flux magnétique et noté  $\Phi^m$ .

Le flux magnétique à travers toute surface fermée est nul.

$$\Phi_{\partial\Omega}^m = 0$$

Cette loi qui marque l'absence de monopôle magnétique reste valable en régime variable.

En conséquence, lorsqu'on considère un contour fermé orienté  $\partial\Sigma$ , le flux magnétique est de même valeur à travers toutes les surfaces qui s'appuient sur ce contour et sont orientées par lui. En effet, deux telles surfaces définissent une surface fermée pour laquelle le flux magnétique, c'est à dire la différence entre les flux magnétiques de chaque surface, est nul.

Ainsi, le flux magnétique à travers une surface ouverte  $\Sigma$  ne dépend que du bord  $\partial\Sigma$  de cette surface. Le champ magnétique est pour cette raison dit à **flux conservatif**.

Le champ magnétique étant en teslas (T), son flux est en webers (Wb= Tm<sup>2</sup>).

### III.4 Théorème de Gauss

Le flux électrique  $\Phi^e$  n'est pas le flux du champ électrique mais le flux de  $\varepsilon\mathbf{E}$  ou  $\varepsilon$  est la **permittivité** du milieu. La permittivité du vide, valable aussi pour l'air, est notée  $\varepsilon_0$ . Dans le Système International, elle est directement reliée à la constante fondamentale de la Physique  $c$  (célérité de la lumière dans le vide) par

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} c^2} \simeq 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ (SI)}$$

Le théorème de GAUSS établit que pour toute surface fermée  $\partial\Omega$ , dont le volume intérieur  $\Omega$  contient une charge totale  $Q_\Omega$ , le flux électrique vaut

$$d\Phi^e = \varepsilon\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \Phi_{\partial\Omega}^e = Q_\Omega$$

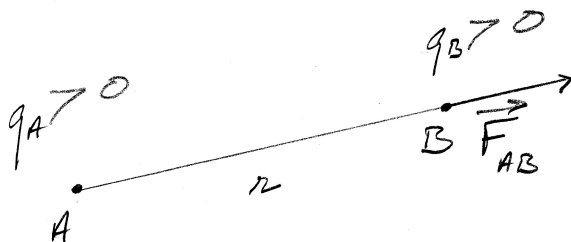
et son unité est donc le coulomb (C).

Pour une particule de charge  $q$  dans un milieu  $\varepsilon$ , on a vu que les lignes de champ sont des rayons issus de la charges. En choisissant pour surfaces de GAUSS - surfaces virtuelles sur

lesquelles on applique le théorème de GAUSS - des sphères centrées sur la charge ponctuelle, le flux électrique vaut

$$\Phi^e = \varepsilon E 4\pi r^2 = q \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

On retrouve ainsi la **loi de Coulomb** établie en 1785 : lorsque deux corps  $A$  et  $B$ , mutuellement au repos dans un référentiel donné, portant des charges  $q_A$  et  $q_B$  sont dans l'air séparés par une distance  $r = AB$  très grande devant leurs dimensions respectives, ces corps interagissent comme des charges ponctuelles suivant la loi



- son amplitude est proportionnelle au produit des charges et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.

$$F = \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- pour direction la droite  $AB$ ,
- son sens indiqué par le signe du produit des charges  $q_A q_B$  :

$$\begin{cases} q_A q_B > 0 & \text{répulsion} \\ q_A q_B < 0 & \text{attraction} \end{cases}$$

**Exercice** Comparer l'interaction coulombienne à celle de NEWTON.

Dans la matière, on définit la **constante diélectrique**  $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ . En régime stationnaire (basse fréquence), on rencontre les valeurs suivantes :

matériau	vide	air (1 atm)	polystyrène	papier	huile
$\varepsilon_r$	1	$\simeq 1$	2,6	3,5	4,5
matériau	porcelaine	silicone	ethanol	eau	céramique
$\varepsilon_r$	6,5	12	25	80	130

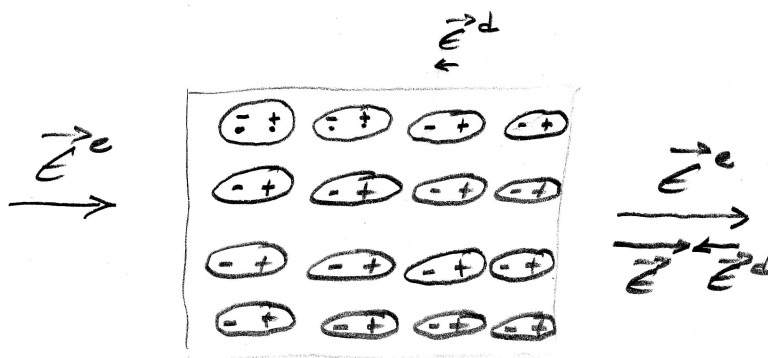
Il apparaît donc que le champ électrique est plus faible dans les **milieux diélectriques** que dans le vide.

Ceci s'explique à l'échelle microscopique. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les atomes et les molécules non-polaires se **polarisent** sous l'effet d'un champ électrique  $\mathbf{E}^e$ , et les molécules polaires s'alignent sur ce champ. Tous ces doublets électriques créent dans le volume du diélectrique un champ électrique **dépolarisant**  $\mathbf{E}^d$  qui s'oppose au champ excitateur. Le champ total  $\mathbf{E}$  est plus faible que le champ excitateur

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^d = \frac{\mathbf{E}^e}{\varepsilon_r}$$

d'un facteur qui s'identifie à  $\varepsilon_r$  la constante diélectrique du matériau.

En régime variable, le théorème de GAUSS reste valable, mais la constante diélectrique des matériaux, à l'exception du vide, varie (!) en fonction de la **fréquence** du champ électrique.



### III.5 Théorème d'Ampère

La circulation magnétique  $\mathcal{C}^m$  n'est pas la circulation du champ magnétique, mais la circulation de  $\frac{1}{\mu}\mathbf{B}$  où  $\mu$  est la perméabilité du milieu. La perméabilité du vide, valable pour l'air et la plupart des matériaux, vaut

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} (SI)$$

Le théorème d'AMPÈRE stipule que pour toute surface ouverte orientée  $\Sigma$ , la circulation magnétique sur le bord  $\partial\Sigma$  orienté suivant la règle vaut l'intensité algébrique du courant qui traverse  $\Sigma$

$$\mathcal{C}_{\partial\Sigma}^m = I_\Sigma$$

Dans le cas de fils électriques *embrassés* par le contour, ce théorème s'écrit

$$\mathcal{C}_{\partial\Sigma}^m = \sum_n I_n$$

la circulation magnétique vaut la somme *algébrique* des courants embrassés, en comptant comme positifs ceux qui traversent la surface  $\Sigma$  dans le sens de sa normale.

Dans cet exemple,  $\mathcal{C}^m = I_1 - I_2 + I_3$

La loi de BIOT et SAVART est écrite pour des fils dans l'air, mais la plupart des matériaux ont un comportement vis-à-vis du magnétisme proche de celui de l'air (ou plus précisément du vide). Au contraire, certains matériaux dits **ferromagnétiques** ont des propriétés magnétiques exceptionnelles. Le fer, le nickel et le cobalt sont les trois éléments simples ferromagnétiques. Sont aussi ferromagnétiques aussi les ferrites, quelques oxydes et alliages. Les ferromagnétiques sont tous des conducteurs.

On a vu que les isolants se polarisent sous l'effet d'un champ électrostatique. Les molécules acquièrent un moment dipolaire électrique et produisent un champ dépolarisant qui s'oppose au champ excitateur. Le champ total dans l'isolant est atténué d'un facteur  $\varepsilon_r > 1$ . Les matériaux ferromagnétiques eux s'**aimantent** sous l'action d'un champ magnétostatique : les vecteurs moments dipolaires des atomes s'alignent sur le champ excitateur. Ici, le champ créé par les dipôles magnétiques est **dans le même sens que le champ excitateur**. Le champ magnétique total dans le ferromagnétique est amplifié d'un facteur  $\mu_r > 1$ . Moyen mnémotechnique :  $E \sim \frac{1}{\varepsilon}$  (loi de COULOMB) alors que  $B \sim \mu$  (loi de BIOT et SAVART).

Les ferromagnétiques présentent des perméabilités magnétiques  $\mu$  beaucoup plus grandes que celles du vide

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \gg 1$$

La perméabilité magnétique  $\mu$  d'un corps ferromagnétique peut varier dans le temps, et dépend de son *histoire magnétique* : c'est le phénomène d'**hystérésis**, très important en régime variable et alternatif.

Ferromagnétique	fer	nickel	cobalt
max $\mu_r$	10000	600	250

Certains ferromagnétiques, une fois aimantés, gardent un moment dipolaire magnétique permanent et produisent un champ magnétique en dehors de toute excitation. Ce champ est appelé **champ rémanent**, et le ferromagnétique est dit **dur**. Les aimants (permanents) sont des ferromagnétiques durs aimantés. Au contraire, les transformateurs et les électroaimants utilisent des ferromagnétiques **doux**, aussi aimantables, mais dont le champ magnétique rémanent est faible.



# Chapitre IV

## Champ magnétique et inductance

### IV.1 Champ créé par un câble rectiligne infini

Le spectre magnétique du câble rectiligne est composé de de lignes de champ circulaires centrées sur le câble. Une boussole permet d'orienter ces lignes en fonction du sens du courant dans le câble. La circulation magnétique suivant la ligne  $\partial\Sigma$  de rayon  $r$  vaut :

$$C_{\partial\Sigma}^m = \frac{B2\pi r}{\mu_0}$$

et comme l'intensité embracée  $I_\Sigma$  vaut l'intensité  $I$  parcourant le fil, on trouve un champ magnétique extérieur

$$B_{fil} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

de direction **orthoradiale**, c'est à dire perpendiculaire aux rayons issus du fil. On remarque que la valeur  $a$  du rayon du câble n'intervient pas. Pour cette raison, on considère les câbles comme des fils, c'est-à-dire infiniment fins. C'est le modèle du **circuit filiforme**.

**Exercice** Comparer les cartes de champ pour une charge ponctuelle et un courant (dans un fil) rectiligne.

**Exercice** Calculer le champ à l'intérieur d'un câble de rayon  $a$  et parcouru par un courant  $I$  uniformément réparti sur la section du câble.

### IV.2 Inductance

Le champ magnétique créé par un fil est proportionnel au courant qui l'a produit. Ce résultat peut être généralisé à tous les circuits filiformes, par exemple en invoquant le théorème d'AMPÈRE.

Considérons deux circuits électriques filiformes fixes et rigides  $\partial\Sigma_1$  et  $\partial\Sigma_2$  parcourus par des courants continus  $I_1$  et  $I_2$  dans l'air. Le champ magnétique  $\mathbf{B}_1$  produit par  $\partial\Sigma_1$  est proportionnel à  $I_1$ . Le flux magnétique  $\Phi_{11}^m$  du champ magnétique induit par le circuit  $\partial\Sigma_1$  à travers sa

propre surface, souvent appelé **flux propre**, est lui aussi proportionnel à  $I_1$ . Le coefficient de proportionnalité entre  $\Phi_{11}^m$  et  $I_1$  définit le **coefficient d'inductance propre** du circuit  $\partial\Sigma_1$

$$L_1 = \frac{\Phi_{11}^m}{I_1} > 0 \quad (\text{H})$$

Ce coefficient, toujours positif, ne dépend que de la géométrie du circuit  $\partial\Sigma_1$ .

Le flux magnétique  $\Phi_{12}^m = \Phi_{\partial\Sigma_2}^m(\mathbf{B}_1)$  du champ magnétique créé par le circuit inducteur  $\partial\Sigma_1$  à travers la surface du circuit induit  $\partial\Sigma_2$  est lui aussi proportionnel à  $I_1$ . Le coefficient de proportionnalité entre  $\Phi_{12}^m$  et  $I_1$  définit le **coefficient d'inductance mutuelle** entre les deux circuits

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}^m}{I_1} \quad (\text{H})$$

Ce coefficient ne dépend en valeur absolue que de la géométrie des deux circuits, et de leurs positions relatives. Son signe dépend de l'orientation choisie pour chacun des circuits. On peut montrer que  $M_{12} = M_{21} = M$  et aussi  $|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$ .

L'unité des coefficients d'inductance propre et mutuelle est le henry (H=Wb/A).

Le flux total dans chaque circuit s'écrit

$$\begin{cases} \Phi_1^m = L_1 I_1 + M I_2 \\ \Phi_2^m = M I_1 + L_2 I_2 \end{cases}$$

et la matrice symétrique  $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix}$  est appelée **matrice inductance** du système composé des deux circuits.

### IV.3 Calcul avec le théorème d'Ampère

Nous allons calculer quelques coefficients d'inductance propre; le champ magnétique est obtenu par le théorème d'AMPÈRE.

#### a) Solénoïde long

En partant des lignes de champ magnétique de la spire de rayon  $R$ , de centre  $O$  et d'axe  $Oz$ , parcouru par un courant  $I$ , puis du spectre magnétique du solénoïde court de longueur  $\ell$ , on en arrive à statuer que le solénoïde long ( $\ell \gg R$ ) a ses lignes de champ parallèle à l'axe  $Oz$  dans sa partie centrale. Alors, à partir du théorème d'AMPÈRE sur un contour intérieur au solénoïde, on montre que ce champ est y **uniforme**. En appliquant le théorème d'AMPÈRE sur un contour qui englobe des fils, et en supposant le champ nul à l'extérieur, on obtient l'amplitude très simple

$$B_{sol} = \mu_0 n I \quad L \gg R \quad n = \frac{N}{\ell}$$

où  $n = N/\ell$  est la **densité de spires par mètres** ( $\text{m}^{-1}$ ) du solénoïde. Cette amplitude est indépendante de la forme des spires. Le champ est le long de l'axe des spires, et est orienté dans le sens de la normale aux spires. Il est dit **axial**.

En négligeant les effets de bord, c'est-à-dire la diminution du champ magnétique sur les extrémités du solénoïde, on estime facilement le flux propre du solénoïde long à travers ses  $N$  spires d'aire  $S$  :

$$\Phi_m = \mu_0 n I N S = \mu_0 n^2 S \ell I = \mu_0 n^2 \tau I$$

avec  $\tau = S\ell$  le volume intérieur du solénoïde. Le coefficient d'inductance propre vaut donc :

$$L_{sol} = \mu_0 n^2 \tau \quad L \gg R \quad n = \frac{N}{\ell}$$

Cette inductance peut être démultipliée en plaçant dans le volume intérieur du solénoïde un noyau de matériau ferromagnétique de constante  $\mu_r = \mu/\mu_0 \gg 1$ . En pratique, on utilise du fer doux pour éviter le phénomène d'hysteresis.

## b) Bobine torique

En tordant un solénoïde long jusqu'à relier ses extrémités, on forme une bobine torique : un enroulement de  $N$  spires autour d'un tore ouvert (bouée). On évite ainsi les effets de bord ! Les lignes de champ magnétiques sont rigoureusement des cercle centrés sur l'axe du tore. On obtient rapidement

$$B_{tore} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

à l'intérieur du tore, et le champ est nul en dehors. Le champ magnétique est parfaitement confiné à l'intérieur de la bobine. L'amplitude du champ ne dépend pas de la géométrie des spires, seulement de la distance  $r$  à l'axe.

Le coefficient d'inductance propre dépend lui de la géométrie des spires. Le flux  $\phi^m$  à travers une spire rectangulaire de largeur  $a$  et de hauteur  $b$ , vaut

$$\phi^m = \int_{R-a/2}^{R+a/2} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} b dr = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} b \ln \left( \frac{R+a/2}{R-a/2} \right)$$

avec  $R$  le grand rayon du tore, d'où un coefficient d'inductance propre

$$L_{tore} = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} b \ln \left( \frac{R+a/2}{R-a/2} \right)$$

**Exercice** Montrer qu'on retrouve  $L_{tore} = \mu_0 n^2 \tau$  dès que  $R \gg a$ .

## IV.4 Calcul avec la loi de Biot et Savart

Le théorème d'AMPÈRE ne permet pas de traiter tous les cas. Pour aller plus loin, il faut utiliser la

### a) Loi de Biot et Savart

Cette loi donne l'expression du champ magnétique  $\mathbf{B}$  créé par un circuit filiforme  $\partial\Sigma$  traversé par un courant continu  $I$  dans un milieu homogène de perméabilité  $\mu$ . L'élément de circuit

$d\mathbf{l} = \mathbf{t}dl$ , tangent au fil et orienté par le sens du courant, contribue au champ magnétique  $\mathbf{B}$  au point  $M$  à hauteur de

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu I}{4\pi r^2} \mathbf{t} \wedge \mathbf{u} dl \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_{\partial\Sigma} \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{u}}{r^2} dl$$

où  $r$  est la distance entre l'élément de circuit et le point  $M$  et  $\mathbf{u}$  est le vecteur unitaire de l'élément vers  $M$ . Le champ créé par un circuit complet s'obtient, d'après le principe de superposition, par intégration curviligne le circuit fermé  $\partial\Sigma$ .

Au voisinage d'un fil électrique, le produit vectoriel de la loi de BIOT et SAVART indique encore que le champ magnétique tourne autour du fil. Il est dit orthoradial, les lignes de champ s'enroulent autour des fils : elles sont bouclées.

### b) Champ créé par une bobine plate circulaire sur son axe

Une bobine est constituée d'un enroulement de fil électrique de  $N$  tours ou spires. Une bobine est dite plate lorsqu'on peut négliger la section des  $N$  spires. Le champ magnétique créé par une telle bobine est simplement  $N$  fois plus intense que celui créé par une spire seule.

On considère une spire circulaire de centre  $O$ , de rayon  $R$ , d'axe  $Oz$  et parcourue par un courant continu  $I$ . On détermine facilement à l'aide de la loi de BIOT et SAVART que le champ en n'importe quel point  $M$  d'abscisse  $z$  sur l'axe  $Oz$  est colinéaire à cet axe. C'est une conséquence de la symétrie de la distribution de courant constituée par la spire, et ça n'est valable que sur l'axe de la spire.

On remarque en particulier que la distance  $r = \sqrt{R^2 + z^2}$  est la même pour tous les points de la boucle, de sorte qu'elle sort de l'intégrale. Il est commode de définir l'angle  $\theta$  sous lequel est vu la boucle depuis le point  $M$  et vérifiant  $\sin \theta = R/r > 0$ . Finalement, le périmètre de la boucle valant  $2\pi R$  et la bobine comptant  $N$  tours, le champ créé par la bobine sur son axe s'écrit

$$B_{spire} = \frac{\mu NI}{2R} \sin^3 \theta \quad \sin \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Loin de la bobine, on a

$$|z| \gg R \Rightarrow \sin \theta \underset{|z| \gg R}{\sim} \frac{R}{|z|} \Rightarrow B_{spire} \sim \frac{\mu N I R^2}{2|z|^3} = \frac{\mu N I S}{2\pi |z|^3}$$

et donc en considérant une bobine de  $N_1$  spires d'aire  $S_1$  sur l'axe d'une bobine de  $N_2$  spires d'aire  $S_2$  et orientée suivant un angle  $\theta$  par rapport à cet axe, à grande distance le coefficient d'inductance mutuelle vaut

$$M \sim \frac{\mu N_1 N_2 S_1 S_2}{2\pi |z|^3} \cos \theta$$

### c) Solénoïde court

On considère un solénoïde court de rayon  $R$ , de longueur  $L$  et comptant  $N$  spires parcourues par un courant  $I$ . Un élément de solénoïde centré sur l'abscisse  $x$  et de largeur  $dx$  comporte  $ndx$  spires où  $n = N/L$  est la densité de spires par unité de longueur, et crée au point d'abscisse  $z$  l'élément de champ magnétique

$$dB_{court} = \frac{\mu ndxI}{2R} \frac{R^3}{(R^2 + (z-x)^2)^{3/2}}$$

Le champ total vaut donc l'intégrale

$$B_{court} = \frac{\mu n I}{2} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{R^2}{(R^2 + (z-x)^2)^{3/2}} dx$$

et en remarquant que

$$\frac{d}{dx} \frac{x-z}{\sqrt{R^2 + (z-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z-x)^2}} - \frac{(x-z)^2}{(R^2 + (z-x)^2)^{3/2}} = \frac{R^2}{(R^2 + (z-x)^2)^{3/2}}$$

on obtient

$$B_{court} = \frac{\mu n I}{2} \left[ \frac{x-z}{\sqrt{R^2 + (z-x)^2}} \right]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{\mu n I}{2} \left( \frac{L/2 - z}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} + \frac{L/2 + z}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} \right)$$

## IV.5 Aimants et magnétisme terrestre

On a vu qu'on peut associer à une petite bobine un vecteur moment dipolaire magnétique  $\mathbf{m} = NIS\mathbf{u}_z$  avec  $S = \pi R^2$ . Le champ magnétique sur l'axe s'écrit alors

$$\mathbf{B}_{spire}(M) \underset{|z| \gg R}{\sim} \frac{\mu}{2\pi} \frac{\mathbf{m}}{|z|^3}$$

Loin de la bobine, le champ sur l'axe ne dépend que du vecteur moment dipolaire  $\mathbf{m}$  et de la distance  $|z|$ . Ce champ est appelé champ magnétique dipolaire, et permet l'interprétation des interactions entre aimants.

Les lignes de champ magnétiques d'un aimant sortent par son pôle Nord et rentrent par son pôle Sud. Le champ est à peu près uniforme dans l'entrefer d'un aimant.

Considérons l'action d'un aimant  $\mathbf{m}_1$  fixe sur un aimant  $\mathbf{m}_2$  positionné à l'abscisse  $z$  de son axe. L'énergie potentielle magnétique de l'aimant  $\mathbf{m}_2$  dans le champ  $\mathbf{B}_1$  de l'aimant  $\mathbf{m}_1$  vaut, à une constante près,

$$\mathcal{E}_{pe} = -\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_0 \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_1}{2\pi |z|^3} = -\frac{\mu_0 m_2 m_1 \cos \theta}{2\pi |z|^3}$$

où  $\theta$  est l'angle entre les deux vecteurs moments dipolaires. Pour minimiser son énergie potentielle, l'aimant  $\mathbf{m}_2$  va

- tourner et s'aligner sur la direction et le sens du vecteur moment dipolaire de l'aimant  $\mathbf{m}_1$  ( $\cos \theta = +1$ ), de sorte que les pôles opposés des deux aimants soient en regard,
- être attiré par et se rapproché de l'aimant  $\mathbf{m}_1$  ( $|z| \rightarrow 0$ ).

Une boussole est composée d'une aiguille aimantée et placée sur une pointe, de sorte que son vecteur moment dipolaire magnétique s'aligne sur les lignes de champ terrestres. La partie rouge de la boussole désigne le pôle Nord de l'aiguille, de sorte qu'à l'équilibre, la boussole devrait pointer vers le pôle Sud de la Terre. On peut en première approximation représenter la Terre par un aimant. Il se trouve qu'historiquement, ce qu'on appelle le pôle Nord magnétique terrestre, lieu de la surface de la Terre où le champ magnétique est dirigé vers le bas, est en fait du côté du pôle Sud de l'aimant équivalent à la Terre.

Le champ magnétique terrestre en France fait un angle de  $\simeq 45^\circ$  avec l'horizontale, et la composante horizontale du champ, celle qui fait tourner l'aiguille de la boussole, est d'amplitude  $B_T \simeq 20 \mu\text{T}$ .

L'origine du champ magnétique terrestre n'est pas encore entièrement déterminée. Il serait dû aux mouvements du fer liquide dans le noyau terrestre. Dans l'histoire de la Terre, le sens du vecteur moment magnétique terrestre a changé plusieurs fois.

# Chapitre V

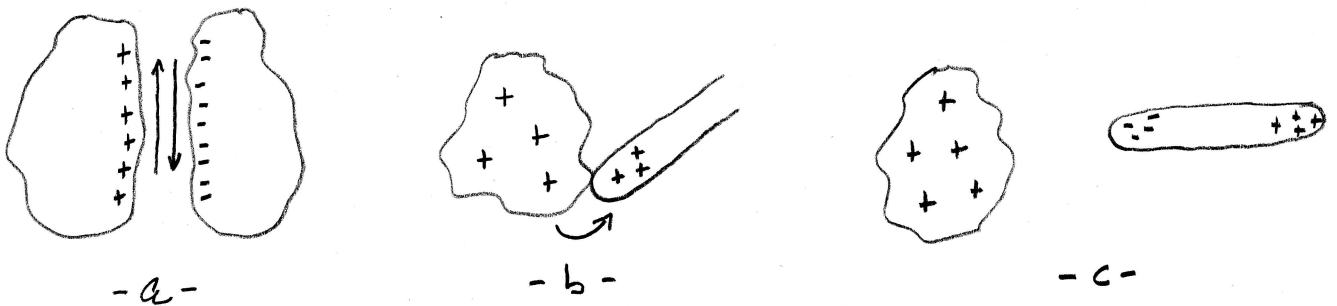
## Conducteur

### V.1 Electrification

Dans les matériaux isolants ou diélectriques, à l'état neutre, toutes les charges sont liées, alors que certains porteurs de charges d'un matériau **conducteur** se **déplacent librement** dans les limites de son volume.

On peut établir les règles suivantes pour l'électrification de la matière.

- Tout corps peut être électrisé par frottement (triboélectricité).
- Un conducteur chargé peut **électriser par contact** un conducteur neutre, lui cédant une partie de sa charge.
- Un conducteur peut être électrisé par un corps chargé **à distance, par influence**.



Lorsqu'on tient un conducteur dans la main, sa charge peut s'écouler à travers notre corps, conducteur, jusque dans le sol. Le conducteur est dit **mis à la terre**. Le conducteur peut être **isolé**, en insérant un isolant dans la chaîne des conducteurs, ici en mettant un gant en plastique.

### V.2 Conducteur en équilibre électrostatique

Dès qu'un champ électrique apparaît dans le volume d'un conducteur, ses charges mobiles sont mises en mouvement par la force de COULOMB. Nous commençons par étudier l'**équilibre électrostatique** des conducteurs, état où les charges sont au repos. On a alors les propriétés suivantes :

- le champ électrique est **nul** dans le volume du conducteur,
- le volume du conducteur est **équipotentiel**,

c. le conducteur est **localement neutre en volume**. Il s'**électrise en surface** uniquement.

Lorsqu'une de ces conditions n'est pas respectée, le conducteur est dit en déséquilibre. Il est alors le siège d'un champ électrique (non nul), et ses charges libres sont en mouvement. L'électrisation de surface du conducteur se modifie, jusqu'à **retour à l'équilibre**. Lorsque le déséquilibre n'est pas entretenu (par un générateur par exemple), le retour est très rapide, notamment dans les métaux où le temps caractéristique est de l'ordre de  $\tau \sim 10^{-18}$  s. Pour la suite du chapitre, tous les conducteurs sont implicitement à l'équilibre électrostatique.

Le champ électrique est aussi nul à l'intérieur d'une **cavité** ménagée à l'intérieur d'un conducteur et dépourvue de charge. De même, le champ électrique à l'extérieur du conducteur n'est pas influencé par une cavité chargée, pourvu que le conducteur soit **mis à la terre**. Les conducteurs forment des écrans électrostatiques qui permettent d'isoler des régions de l'espace.

Lorsqu'une charge  $Q$  (C) est répartie sur la surface  $S$  ( $\text{m}^2$ ) d'un conducteur, on définit sa **densité surfacique de charge**  $\sigma$  ( $\text{C}/\text{m}^2$ ). Dans le cas où les charges sont uniformément réparties, ces densités valent

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

Comme un conducteur est équipotentiel en volume, **les lignes de champ électriques sont perpendiculaires à sa surface** (au sens, le bord du volume). Le **théorème de Coulomb** indique aussi l'amplitude et le sens du champ : à l'extérieur au *voisinage* de la surface d'un conducteur, le champ électrostatique vaut

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{n}$$

où  $\sigma$  est la densité surfacique de charge,  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal à la surface et  $\varepsilon$  la permittivité électrique du milieu au voisinage extérieur du conducteur. Ce théorème est intéressant car il donne une expression très simple du champ électrique au voisinage d'un conducteur chargé. Par contre, la notion de voisinage est assez floue, les dimensions de ce voisinage dépendant notamment de la courbure de la surface du conducteur...

Deux conducteurs sont **en influence** lorsque les charges surfaciques de l'un créent un champ électrostatique qui modifie la répartition surfacique des charges de l'autre, et réciproquement. Certaines des lignes du champ *total* relient alors les deux conducteurs.

Lorsque toutes les lignes partant de la (ou une) surface d'un conducteur arrivent à la (ou une) surface de l'autre, l'influence est dite **totale**. Une telle influence est facilement réalisée en emboîtant deux conducteurs.

**Autres effets électriques** On a vu que le champ électrique près d'un conducteur  $E = \sigma\varepsilon$  dépend de la charge surfacique  $\sigma = Q/S$ . A charge constante, le champ créé par une sphère au voisinage de sa surface est d'autant plus grand que son rayon est petit. On peut généraliser ce résultat en constatant que le champ est plus élevé aux endroits d'un conducteur où le rayon de courbure est petit, c'est l'**effet de pointe**. La charge se concentre sur les pointes, et même si le potentiel reste uniforme, le champ y devient très intense. Si le champ approche de la **rigidité diélectrique**, le conducteur commence à se décharger dans l'isolant. Il s'ionise près de la pointe, et le mouvement des ions crée dans l'air un **vent électrique**.



## V.3 Condensateur

Pour un conducteur libre de toute influence et entouré d'un isolant, le potentiel  $V$  (par rapport à l'infini) est proportionnel à sa charge  $Q$ .

Pour deux conducteurs en influence totale et séparés par un isolant, de potentiels  $V_2 > V_1$  et portants des charges égales et opposées  $Q_2 = +Q > 0$  et  $Q_1 = -Q < 0$ , c'est la ddp  $U = V_2 - V_1 > 0$  qui est proportionnelle à  $Q$ . Le facteur de proportionnalité entre  $U$  et  $Q$  est appelé **capacité** du **condensateur** constitué par les deux conducteurs et l'isolant.

$$C = Q/U > 0 \quad (\text{F})$$

La capacité a sa propre unité, le Farad ( $\text{F} = \text{C}/\text{V}$ ). Les conducteurs, en pratique des métaux, forment les **armatures** ou plaques du condensateur.  $Q$  est la charge de l'armature de plus haut potentiel, ou plaque positive.  $U$  est la ddp positive, de sorte que la capacité d'un condensateur est positive.

Le condensateur le plus simple est le **condensateur plan**, constitué de deux armatures planes d'aire  $S$  placées parallèlement et écartées d'une distance ou épaisseur  $e$ . Si les plaques sont suffisamment rapprochées, le théorème de COULOMB s'applique sur tout le domaine inter-armature, où le champ est uniforme et d'amplitude  $E = \sigma/\varepsilon$ . Finalement, avec  $U = Ee$  et  $Q = \sigma S$ , on trouve l'expression de la capacité du condensateur plan

$$C_{\text{plan}} = \frac{\varepsilon S}{e}$$

**Exercice** Retrouver les règles d'association des condensateurs à l'aide de la formule de la capacité du condensateur plan.

Un condensateur permet d'**emmagasiner de l'énergie électrique**. Un générateur doit fournir un travail au condensateur pour créer une ddp entre ses plaques, et les charger. Cette énergie est stockée dans le condensateur, et peut, sous certaines conditions, être réutilisée. Pour faire passer une charge  $dQ > 0$  de plaque négative à la plaque positive, le générateur compense le travail  $W_C = -UdQ$  de la force de COULOMB  $\mathbf{F}_C$  et fournit donc un travail qui est emmagasiné dans le condensateur sous forme d'énergie potentielle électrique  $d\mathcal{E}_p^e = UdQ$ . Maintenant, dans un condensateur, charge et ddp sont linéairement liées : les premières charges sont faciles à déplacer, car la ddp est faible. On écrit par exemple  $dQ = CdU$  d'où

$$d\mathcal{E}_p^e = CUdU = d\left(\frac{CU^2}{2}\right)$$

et par intégration, on retrouve la formule bien connue en électrocinétique

$$\mathcal{E}_p^e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad (\text{J})$$

Pour le condensateur plan pour lequel  $C = \frac{\varepsilon S}{e}$  et  $U = Ee$ , on obtient une énergie électrostatique  $\frac{1}{2}CU^2 = \mathcal{E}_p^e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \tau$  proportionnelle au volume inter-armature  $\tau = Se$ . On peut alors définir une **densité volumique d'énergie électrostatique** dont l'expression

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \quad (\text{J}/\text{m}^3)$$

se trouve être très générale, et permet notamment de calculer par intégration volumique l'énergie électrique dans n'importe quelle région de l'espace.

## V.4 Courant volumique

Considérons des particules de charge  $q$ , réparties avec une densité volumique  $d$  ( $\text{m}^{-3}$ ). On en déduit la densité volumique de charge  $\rho = qd$  ( $\text{C}/\text{m}^3$ ).

Prenons l'exemple des charges mobiles du cuivre. De volume molaire  $7,11 \text{ cm}^3/\text{mol}$ , un morceau de cuivre contient  $6 \cdot 10^{23}/7,11 \cdot 10^{-6} = 8,44 \cdot 10^{28}$  atomes/ $\text{m}^3$ . En supposant qu'un électron par atome est mobile, de charge  $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , on obtient la densité volumique de charges mobiles

$$d = 8,44 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \Rightarrow \rho = -1,35 \cdot 10^{10} \text{ C}/\text{m}^3$$

Pour déterminer l'intensité qui traverse une section  $\Sigma$  d'aire  $S$  d'un câble conducteur, on calcule le volume  $\tau$  contenant les charges qui traverse la section durant un temps  $\Delta t$  :  $\tau = v \Delta t S_d$ . On en déduit la charge qui traverse la section :  $\Delta q = \rho \tau = \rho v \Delta t S$ , et finalement l'intensité  $I_\Sigma = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \rho v S$ .

Dans le cas général, pour un élément orienté  $d\mathbf{S}$  de surface, l'élément d'intensité vaut  $dI = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ , ce qui fait de l'intensité  $I_\Sigma$  le flux de

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad \left( \frac{\text{C}}{\text{m}^3} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{C}/\text{s}}{\text{m}^2} = \text{A}/\text{m}^2 \right)$$

à travers  $\Sigma$ . Le champ vectoriel  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  est appelé **vecteur densité volumique de courant**.

Dans un volume  $\Omega$  plongé dans un champ électrique  $\mathbf{E}$  et traversé par un courant, on a une quantité de charges mobiles  $q_\Omega = \rho \Omega$ . Le travail de la force de COULOMB sur un déplacement élémentaire  $d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{v} dt$  de ces charges vaut

$$\delta W = q_\Omega \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \Omega dt = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \Omega dt$$

On définit ainsi la **densité volumique de puissance Joule**

$$w_J = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad \left( \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \frac{\text{V}}{\text{m}} = \text{W}/\text{m}^3 \right)$$

dans le volume  $\Omega$ .

## V.5 Conducteur ohmique

Un conducteur est dit **ohmique** si le vecteur densité volumique de courant  $\mathbf{j}$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$  sont proportionnels en tous points du conducteur. La **loi d'Ohm locale** s'écrit

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$$

La **conductivité électrique**  $\gamma$  en siemens par mètre ( $\text{S}/\text{m}$ ), est une caractéristique du conducteur.

matériau	métal	isolant	semi-conducteur
$\gamma$ ( $\text{S}/\text{m}$ )	$10^7$	$10^{-11} \rightarrow 10^{-6}$	$10^{-6} \rightarrow 10^4$
	métal	Ag	Cu Au Al Hg
$\gamma$ ( $10^7 \text{ S}/\text{m}$ )	6,2	5,9	4,6 3,6 0,1

La densité volumique de puissance JOULE vaut indifféremment

$$w_J = jE = \frac{j^2}{\gamma} = \gamma E^2 \quad (\text{W/m}^3)$$

Lorsque cette densité dépasse un certain seuil, le conducteur **fond**.

Si  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{E}$  sont proportionnels, alors dans un tronçon conducteur homogène délimité par un tube de champ et deux équipotentielles, intensité  $I$  et ddp  $U$  sont proportionnelles. Le coefficient de proportionnalité est appelé **résistance ohmique**  $R$  du tronçon et la relation

$$U = RI$$

est la **loi d'Ohm intégrée**. L'unité de la résistance ohmique est l'ohm ( $\Omega = \text{V/A}$ ). La densité volumique de puissance JOULE peut être facilement intégrée sur le volume du tronçon

$$P_J = UI = RI^2 = U^2/R \quad (\text{W})$$

En courant continu, la vitesse  $\mathbf{v}$  des charges mobiles est constante. La puissance électrique fournie au conducteur ne sert donc pas à accélérer ces charges mobiles. Elle est intégralement dissipée sous forme de chaleur, c'est l'**effet Joule**.

Dans un tronçon rectiligne parcouru par un vecteur densité volumique de courant uniforme, on a les relations simples  $U = E\ell$  et  $I = jS$  où  $\ell$  est la longueur du tronçon et  $S$  sa section, d'où avec  $j = \gamma E$ , la formule de la résistance ohmique du tronçon

$$R = \frac{\ell}{\gamma S} \quad (\Omega)$$

## V.6 Force électromotrice

Dans un circuit électrique en régime continu, le conducteur est le siège d'un courant  $\mathbf{j}$  et donc d'un champ  $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\gamma$ , mais il n'y a pas d'accumulation de charges : le conducteur est localement neutre en volume.

Considérons un champ qui s'applique aux charges mobiles sur un certain tronçon de circuit. Ces charges sont mises en mouvement, et poussent les charges qui les précèdent. Ce sont alors toutes les charges mobiles du circuit qui sont mises en mouvement. Si un autre champ d'égale amplitude de d'orientation opposée s'applique sur un autre tronçon du circuit, alors les actions de ces champs se compensent, et les charges mobiles sont au repos et l'intensité dans le circuit nulle.

Pour traduire l'influence, forcément globale, du champ électrique  $\mathbf{E}$  sur un circuit  $\partial\Sigma$ , on calcule la circulation électrique sur une ligne de courant

$$C_{\partial\Sigma}^e = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = e \quad (\text{V})$$

qu'on renomme pour le coup **force électromotrice** (fem)  $e$  en volts. Ainsi une force constante est sans effet sur un circuit fermé  $\partial\Sigma$ .

$$e = \mathbf{E} \cdot \int_{\partial\Sigma} d\boldsymbol{\ell} = 0$$

Sans plus d'effet est le champ électrostatique produit par des charges au repos, de par la loi des mailles :

$$C_{\partial\Sigma}^e = 0$$

Pour la force magnétique,  $e = \int_{\partial\Sigma} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell}$  et dans un circuit filiforme au repos,

$$\mathbf{v} \parallel d\boldsymbol{\ell} \Rightarrow \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \perp d\boldsymbol{\ell} \Rightarrow e = 0$$

Par contre, dans un circuit déformable en mouvement, la vitesse des charges mobiles devient  $\mathbf{v} + \mathbf{V}$  où  $\mathbf{v} \parallel d\boldsymbol{\ell}$  est la vitesse de la charge par rapport au conducteur et  $\mathbf{V}$  est la vitesse de l'élément de circuit  $d\boldsymbol{\ell}$  par rapport au référentiel des champs, on obtient la fem de LORENTZ

$$e = \int_{\partial\Sigma} (\mathbf{V} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

et

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{V} \wedge \mathbf{B}$$

est appelé **champ électromoteur** de LORENTZ.

Cette fem s'accompagne d'un courant électrique dans le circuit fermé de résistance ohmique  $R$ .

$$i = \frac{e}{R}$$

Ce courant est éventuellement variable, suivant le déplacement du circuit.

## V.7 Effet Hall

Quelle est l'influence d'une force  $\mathbf{F}_\perp$  orthogonale à la trajectoire des charges mobiles d'un courant qui circule dans un câble métallique ?

Dans le câble, les électrons sont déviés de leur trajectoire par la force  $\mathbf{F}_\perp$ . Toutefois, la force transverse n'est généralement pas assez intense pour que les électrons ne quitte le barreau : en cas de perte de sa neutralité globale, le barreau exercerait sur ces électrons une force de COULOMB très importante. Ne pouvant quitter le barreau, les électrons viennent s'accumuler sur une des parois. La paroi opposée, pauvre en électrons par neutralité, se charge positivement : on dit que **le barreau se polarise**. Les parois chargées en regard constituent un condensateur équivalent, et le volume du barreau est le siège d'un champ électrique transverse. Ce nouveau champ crée sur les électrons une force de COULOMB  $\mathbf{F}_C$  qui vient compenser la force transverse  $\mathbf{F}_\perp$ . Très rapidement s'installe un régime permanent où les électrons ne sont plus déviés :  $\mathbf{F}_C + \mathbf{F}_\perp = \mathbf{0}$ .

Cet effet est connu dans le cas où la force transverse  $\mathbf{F}_\perp = \mathbf{F}^m = -e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$  est la force magnétique sous le nom d'effet HALL. Dans un barreau métallique allongé, Le champ de HALL vaut alors  $\mathbf{E}_H = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$  et la ddp de HALL entre les parois chargées vaut  $U_H = E_H a = vBa$  où  $a$  est la distance entre les parois chargées, et peut être reliée à l'intensité  $I$  :  $I = |j|ab = |\rho|vab$  avec  $b$  la largeur du barreau dans la direction du champ magnétique. Finalement

$$U_H = \frac{1}{|\rho|b} IB$$

Les sondes à effet HALL pour la mesure du champ magnétique, et les pinces ampèremétriques modernes sont fondées sur cet effet. Les barreaux utilisés sont taillés dans des matériaux semi-conducteurs, qui présentent des constantes de HALL  $\frac{1}{|\rho|b}$  plus importantes. Les prix NOBEL 1985 et 1998 ont récompensé des découvertes sur l'effet HALL quantique.

## V.8 Force de Laplace

Les ions du métal, immobiles, ne sont pas sensibles à la force magnétique, mais sont soumis à la force de COULOMB du champ électrique de HALL

$$\mathbf{F}_C = e\mathbf{E}_H = -e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{F}^m$$

Cette force de COULOMB sur les ions du métal s'identifie à la force magnétique sur les électrons. Il faut interpréter ce résultat de la façon suivante : la force magnétique qui s'applique sur les électrons est intégralement transmise aux ions du métal. Ainsi la force de LAPLACE

$$d\mathbf{F}_L = I d\boldsymbol{\ell} \wedge \mathbf{B}$$

s'exerce bien sur les circuits électriques filiformes.

## Deuxième partie

### Régime quasi-stationnaire et effets électrodynamiques

# Chapitre VI

## Induction

### VI.1 Approche expérimentale

Réalisons l'expérience suivante : une bobine reliée à un galvanomètre (microampèremètre) très sensible est plongée dans le champ magnétique produit par un gros aimant.

Si la bobine est déplacée vers l'aimant fixe, l'aiguille du galvanomètre bouge, puis revient immédiatement à zéro si la bobine s'immobilise. Et si la bobine est éloigné, un courant de signe opposé fait son apparition dans la bobine. Ce courant est produit par la fem d'**induction de Lorentz** dont le champ électromoteur est  $\mathbf{E}_m = \mathbf{V} \wedge \mathbf{B}$  où  $\mathbf{V}$  est la vitesse de la bobine et  $\mathbf{B}$  est le champ magnétostatique de l'aimant.

Maintenant, dire que la bobine est en mouvement et l'aimant fixe, c'est se placer dans le référentiel de l'aimant. Et si la bobine est fixe et l'aimant en mouvement, on s'attend donc à observer la même fem. Ceci se vérifie expérimentalement.

FARADAY a interprété cette expérience en 1831, en reliant la **fem induite** dans la bobine à la variation temporelle du nombre de lignes de champ magnétiques qui traversent la surface. Ce phénomène est appelé **induction électromagnétique**.

### VI.2 Loi de Faraday

Le flux magnétique  $\Phi_m$  est une mesure du nombre de lignes de champ magnétiques qui traverse une surface. Suivant la loi de FARADAY, la fem induite  $e(t)$  dans un circuit électrique filiforme fixe et rigide est à tout instant  $t$  égale et opposée au taux de variation temporelle du flux magnétique  $\frac{d\Phi_m}{dt}(t)$  à travers la surface des boucles du circuit.

$$e(t) = -\frac{d\Phi_m}{dt}(t) \quad (\text{V})$$

Cette variation du flux magnétique à travers le circuit peut avoir pour origine un champ magnétique variable, comme produit par un circuit fixe parcouru par un courant variable, ou un champ magnétique dont la source est en mouvement, comme dans le cas d'un aimant qu'on déplace devant une bobine. Cette induction électromagnétique est appelée **induction de Neumann**.

Dans l'exemple suivant, lorsque l'aimant s'approche de la bobine,  $\mathbf{B}$  devient plus fort, et suivant l'orientation des boucles, le produit scalaire  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$  et le flux magnétique  $\Phi_m$  augmentent.

La fem induite  $e$  est donc négative, et le courant induit  $i = e/r < 0$  de sens opposé à l'orientation du circuit. Ce sens peut être prédit par la **loi de Lenz** : le sens du courant induit est tel que le champ magnétique qui en découle s'oppose à la variation du flux magnétique inducteur.

Le circuit qui reçoit le flux magnétique est l'**induit**, et on note  $e$  la fem d'induction dans ce circuit. Le circuit qui produit le champ magnétique est appelé **inducteur**. Si ce champ est produit par un courant inducteur  $i$ , on définit  $M$  le coefficient de mutuelle induction entre les deux circuits, et la loi de FARADAY s'écrit

$$e = -M \frac{di}{dt}(t) \quad (\text{V})$$

Ce phénomène est appelé **auto-induction** lorsqu'inducteur et induit sont un seul et même circuit.

$$e = -L \frac{di}{dt}(t) \quad (\text{V})$$

Si l'induit est un circuit fermé de la résistance ohmique  $r$ , le courant induit s'obtient directement :

$$i_{ind} = \frac{e}{R} \quad (\text{A})$$

## VI.3 Exemples d'induction

- a. Considérons une bobine à  $N$  spires carrés de coté  $a$  et de normale  $\mathbf{n}$  en rotation à la vitesse angulaire  $\omega$  dans un champ magnétostatique  $\mathbf{B}$  orthogonal à son axe de rotation. On trouve finalement

$$e(t) = \omega N S B \sin \theta$$

avec  $S = a^2$  et  $\theta$  l'angle entre  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{n}$ .

- b. Etudions maintenant le cas d'un circuit déformable à contacts glissants. Considérons deux rails conducteurs parallèles espacés d'une distance  $\ell$  dans un plan horizontal, plongés dans un champ magnétostatique vertical dirigé vers le haut et d'amplitude  $B$ , et sur lesquels glisse perpendiculairement à la vitesse  $\mathbf{V}$  un barreau conducteur. Le barreau est le siège d'un champ électromoteur  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{B}$  d'amplitude  $VB$  et qui lui est colinéaire. La fem sur le barreau vaut donc

$$e = VB\ell$$

si on oriente le barreau dans le sens du champ électromoteur.

- c. Finissons sur l'exemple d'un autre circuit à contact glissant. Le circuit comprend un certain nombre de spires d'un solénoïde traversées par un courant continu  $I$ , et un voltmètre. Le contact glisse le long du solénoïde, faisant ainsi varier le nombre  $n$  de spires incluses dans le circuit. Sur le circuit, les points mobiles sont hors champ magnétique (en supposant que celui-ci est confiné au solénoïde), en conséquence de quoi, le champ électromoteur  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{B}$  est partout nul, et la fem induite aussi

$$e = 0$$

**Exercice** Appliquer la loi de FARADAY pour chacun de ces trois exemples.



## VI.4 Courants de Foucault

Si un champ électrique  $\mathbf{E}$  est créé par induction électromagnétique dans le volume d'un conducteur ohmique de conductivité  $\gamma$ , celui est le siège d'une densité volumique de courant  $\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}$ . Ce phénomène est appelé **courants de Foucault**.

La puissance JOULE dissipée par ces courants de FOUCAULT est négligeable pour les circuits filiformes, mais devient très importante dans les conducteurs massifs. C'est sur le phénomène des courants de FOUCAULT que sont fondés le **chauffage et le freinage par induction**. C'est pour éviter ces courants que les circuits magnétiques des transformateurs sont **feuilletés**.

## VI.5 Courant de déplacement

De même qu'une variation temporelle du champ (en fait du flux) magnétique va engendrer une circulation (et un champ) électrique, une variation temporelle du champ (en fait du flux) électrique va engendrer une circulation (et un champ) magnétique. Ainsi le champ magnétique a deux sources : les courants, mouvements de charge, et la variation du flux électrique. Le théorème d'AMPÈRE devient

$$\mathcal{C}_m = i + \frac{d\Phi_e}{dt}(t)$$

La circulation est calculée sur un contour fermé orienté fixe, et les intensité et flux sont calculés à travers une surface fixe s'appuyant sur le contour, et orientée en conséquence. Par analogie, on définit à partir de la variation du flux électrique un **courant équivalent**, historiquement appelé **courant de déplacement**

$$i_D(t) = \frac{d\Phi_e}{dt}(t)$$

Ce courant de déplacement

$$i_D = \frac{d\Phi_e}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{ndS} = \int_S \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{ndS} = \int_S \mathbf{j}_D \cdot \mathbf{ndS}$$

a pour densité volumique

$$\mathbf{j}_D = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{A/m}^2)$$

## VI.6 Temps de propagation

Reprenons l'étude d'un problème classique d'induction entre circuits. Une fois qu'on a calculé le coefficient d'inductance mutuelle  $M$  entre deux circuits  $C_1$  et  $C_2$  en courant continu, on est tenté de passer en régime variable avec  $\Phi_{m2}(t) = M i_1(t)$  pour calculer la fem d'induction  $e_2(t) = -\frac{d\Phi_{m2}}{dt}(t) = -M \frac{di_1}{dt}(t)$ . Ce raisonnement suppose que la loi de BIOT et SAVART est généralisable aux régimes variables, et que la variation du courant  $i_1(t)$  s'est instantanément répercutée sur la valeur du champ magnétique  $\mathbf{B}_1(t)$  dans la région du circuit  $C_2$ , et ce, quelque soit la distance séparant les deux circuits.

Admettons qu'on place un interrupteur ouvert sur le circuit  $C_1$ . Lorsqu'on ferme l'interrupteur, le champ magnétique apparait-il immédiatement sur  $C_1$  ?

La vitesse de propagation des interactions a longtemps été crue infinie. Elle est en fait finie et égale dans le vide et dans tout référentiel galiléen à la constante fondamentale  $c$

$$c_0 = 299792458 \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

appelée célérité ou vitesse de la lumière dans le vide. On remarque au passage que cette constante intervient aussi dans le rapport de la constante magnétostatique  $\frac{\mu_0}{4\pi}$  sur la constante de COULOMB  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , rapport qui vaut  $\epsilon_0\mu_0 = c_0^{-2}$ .

Ainsi le temps de propagation entre deux points  $M_1$  et  $M_2$  de deux circuits  $C_1$  et  $C_2$  séparés par le vide est

$$t_p = \frac{M_1 M_2}{c_0}$$

et un signal émis à l'instant  $t$  en  $M_1$  arrivera en  $M_2$  à l'instant  $t + t_p$ .

Si le courant vaut  $i_1(t)$  en  $M_1$ , alors la contribution de ce point au champ magnétique en  $M_2$  est, d'après la loi de BIOT et SAVART et en prenant compte le temps de propagation

$$d\mathbf{B}_1(M_2, t + \frac{M_1 M_2}{c_0}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1(t) \frac{\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{u}_{12}}{M_1 M_2^2} d\ell_1$$

soit en changeant l'origine des temps,

$$d\mathbf{B}_1(M_2, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1(t - \frac{M_1 M_2}{c_0}) \frac{\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{u}_{12}}{M_1 M_2^2} d\ell_1$$

et en intégrant sur le circuit  $C_1$ ,

$$\mathbf{B}_1(M_2, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} i_1(t - \frac{M_1 M_2}{c_0}) \frac{\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{u}_{12}}{M_1 M_2^2} d\ell_1$$

Ici, ce qui est important, c'est que  $i_1$  **ne sort plus de l'intégrale**.  $\mathbf{B}(t)$  n'est plus proportionnel à  $i(t)$ , et par conséquent, **on ne peut plus définir d'inductance**.

## VI.7 ARQS

On se placera souvent dans un cas particulier du régime variable, le **régime harmonique** où le courant est une fonction sinusoïdale du temps  $i(t) = I_0 \sin \omega t$  où  $\omega = 2\pi f$ , (rad/s) est la pulsation. Le temps de propagation  $i(t - t_p) = I_0 \sin \omega(t - t_p) = I_0 \sin(\omega t - \phi)$  est compté dans la phase  $\phi = \omega t_p$  (rad).

Cette phase est négligeable si  $\phi \ll 2\pi$ . Si on calcule l'influence d'un circuit sur lui même ou sur un autre, il faut que la distance  $r$  entre les deux points **les plus éloignés** vérifie  $\phi = \omega t_p = 2\pi f r / c_0 \ll 2\pi$  soit

$$r \ll \frac{c_0}{f} = \lambda_0$$

Cette relation sur la taille des circuits est l'une des hypothèses fondamentales de l'**Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires** (ARQS). L'**électrocinétique** est une partie de l'électricité qui étudie les circuits électriques dans le cadre de cette approximation.

Dans l'ARQS, l'intensité du courant en tout point d'une branche de circuit est égale à chaque instant  $t$ , et notée  $i(t)$ . Il n'y a donc **pas d'accumulation de charge** dans les fils, et la **loi des noeuds** de KIRCHHOFF sur les circuits est vérifiée.

# Chapitre VII

## Onde électromagnétique

L'ARQS permet d'étudier les circuits de tailles  $a \ll \lambda_0$  et espacés de distances  $r \ll \lambda_0$  très inférieures à la longueur d'onde  $\lambda_0 = c_0/f$ .

Pour des problèmes de rayonnement et de propagation sur des distances de l'ordre de grandeur  $r \sim \lambda_0$  ou plus grandes que la longueur d'onde  $r \gg \lambda_0$ , pour les télécommunications par exemple, on utilise le modèle de l'**onde électromagnétique**.

Spectre électromagnétique. Sources de rayonnement.

### VII.1 Onde propagative

Fonction d'onde  $\Psi(x,t)$ , equation d'onde  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$ , célérité  $c$ , ondes progressive et rétrograde  $\Psi(x,t) = f(\pm x/c - t)$ , front d'onde  $\pm x/c - t = a$ .

Régime harmonique  $\omega = 2\pi/T$ ,  $\Psi(x,t) = \Psi_0 \cos[\omega(\pm x/c - t) + \phi_0]$ , longueur d'onde  $\lambda = cT$ , double périodicité  $\Psi(x,t) = \Psi_0 \cos[2\pi(\pm x/\lambda - t/T) + \phi_0]$ , nombre d'onde  $k = 2\pi/\lambda$ , phase  $\phi(x,t) = \pm kx - \omega t - \phi_0$ .

Notation complexe  $\Psi(x,t) = \Re\{\tilde{\Psi}e^{i(\pm kx - \omega t)}\}$ , amplitude complexe  $\tilde{\Psi} = \Psi_0 e^{i\phi_0}$ , dérivations  $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \pm ik$  et  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$ , equation d'onde  $\Rightarrow -k^2 + \frac{\omega}{c} = 0$ , relation de dispersion  $c(\omega)$ .

### VII.2 Onde plane

$\Psi(M,t) = \Re\{\tilde{\Psi}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}\}$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ , vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , fronts d'onde  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t = \omega a - \phi_0$  plans.

Equation d'onde  $\Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow -\mathbf{k}^2 + \frac{\omega}{c(\omega)} = 0$ .

### VII.3 Structure de l'onde électromagnétique

Dans le vide  $\mathbf{k}^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2 = \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2$  avec  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \simeq 3 \cdot 10^8$  m/s.

Fonctions d'onde vectorielles  $\mathbf{E}(M,t)$ ,  $\mathbf{B}(M,t)$

$x$  direction de propagation,  $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_x$

$y$  direction de polarisation,  $\mathbf{E}(M,t) = \Re\{\tilde{E}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\}\mathbf{u}_y$

$z$  direction du champ magnétique,  $\mathbf{B}(M,t) = \Re\{\tilde{B}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\}\mathbf{u}_z$

Onde transverse  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  perpendiculaires à  $\mathbf{k}$ .

Amplitudes complexes proportionnelles  $\tilde{E} = c_0\tilde{B}$  autant d'énergie électrique  $\varepsilon_0\mathbf{E}^2/2$  que d'énergie magnétique  $\mathbf{B}^2/(2\mu_0)$ .

## VII.4 Effet Kelvin

Dans un conducteur ohmique de conductivité  $\gamma$ , non magnétique et dans lequel on néglige le courant de déplacement, la relation de dispersion devient :

$$-\mathbf{k}^2 + i\omega\mu_0\gamma = 0 \quad \mathbf{k} = \frac{1+i}{\delta}\mathbf{u}_x \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu_0}} \quad (\text{m})$$

et le vecteur d'onde, complexe, s'exprime en fonction de l'épaisseur de peau  $\delta$ .

L'onde est exponentiellement atténuée dans le conducteur. Après la traversée de quelques épaisseurs de peau  $\delta$ , l'onde est entièrement amortie.

$$\mathbf{E}(M,t) = e^{-\frac{x}{\delta}} \Re\{\tilde{E}e^{i(\frac{x}{\delta}-\omega t)}\}\mathbf{u}_y$$

La puissance électromagnétique de l'onde est dissipée par effet JOULE lors de la traversée du conducteur.

Cet effet appelé **effet de peau** ou effet KELVIN est utilisé pour le **blindage électromagnétique**. Pour isoler un région de toute onde électromagnétique, on l'entoure de plaques conductrices épaisses. On utilise des matériaux ferromagnétiques, qui combinant une grande conductivité  $\gamma$  et une grande perméabilité  $\mu$ , présentent les épaisseurs de peau les plus faibles.

## VII.5 Résistance des câbles électriques à haute-fréquence

L'effet de peau explique que le **courant électrique n'est pas uniformément réparti sur la section d'un câble à haute fréquence**. La densité volumique de courant suit la décroissance exponentielle  $\exp(-\frac{x}{\delta})$  où  $x$  est la profondeur dans le câble. Le courant est concentré sur la périphérie du câble, sur une épaisseur de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau  $\delta$ , d'autant plus faible que la fréquence est grande. La **surface utile**  $S_u$  du conducteur est ainsi plus faible que sa section  $S$ , et sa résistance ohmique  $R = \frac{\ell}{\gamma S_u}$  est plus grande à haute fréquence. Pour un conducteur cylindrique de section  $S = \pi a^2$ , la surface utile peut être estimée à  $S_u = \pi a^2 - \pi(a - \delta)^2$ . A haute fréquence,  $a \gg \delta$  d'où  $S_u \simeq 2\pi a\delta \ll S$ , et la résistance ohmique

$$R_{HF} \simeq \frac{\ell}{2\pi a\gamma\delta} \gg R_{DC}$$

est beaucoup plus grande qu'en courant continu.

Dans le cuivre à la fréquence secteur  $f = 50$  Hz, l'épaisseur de peau est de l'ordre du centimètre  $\delta \simeq 1$  cm. Pour tous les fils électriques usuels, le courant peut donc être supposé

uniforme sur la section du fil, et la formule  $R = \frac{\ell}{\gamma S}$  s'applique. A basse fréquence, un fil de section  $S = 1 \text{ mm}^2$  a une résistance ohmique linéaire de  $17 \text{ m}\Omega/\text{m}$ . A  $f = 1 \text{ MHz}$ , fréquence utilisée en radar, l'épaisseur de peau est réduite à  $\delta \simeq 65 \mu\text{m}$ . La surface utile est alors de  $S_u = 2\pi r\delta = 0.23 \text{ mm}^2$  et la résistance linéaire du fil de section  $S = 1 \text{ mm}^2$  est à peu près quadruplée à  $74 \text{ m}\Omega/\text{m}$ .

## VII.6 Milieu matériel

Milieu transparent :  $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon_r$  célérité diminuée  $c_0 \rightarrow c = c_0/\sqrt{\varepsilon_r} = c_0/n$ , indice de réfraction  $n$ .

Cas général en régime harmonique :  $\varepsilon = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$ ,  $\mu = \mu'(\omega) + i\mu''(\omega)$ ,  $\gamma = \gamma'(\omega) + i\gamma''(\omega)$  varient avec la pulsations et sont complexes. On retrouve à la limite  $\omega \rightarrow 0$  les valeurs statiques, réelles.

Relation de dispersion :  $\mathbf{k}^2 = \omega^2 \varepsilon \mu + i\omega \mu \gamma$ , nombre d'onde  $k = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\varepsilon_r \mu_r + i \frac{\mu_r \gamma}{\omega \varepsilon_0}}$ , équivalence métal-diélectrique  $\tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_r + i \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_0} = \tilde{\varepsilon}' + i\tilde{\varepsilon}''$ , indice complexe  $n = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_r \mu_r} = n' + in''$ , indice d'extinction  $n''$  rend compte de l'absorption.

$$n' = \sqrt{\frac{|\tilde{\varepsilon}'_r \mu'_r - \tilde{\varepsilon}''_r \mu''_r|}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\tilde{\varepsilon}'_r \mu'_r - \tilde{\varepsilon}''_r \mu''_r}{\tilde{\varepsilon}'_r \mu'_r - \tilde{\varepsilon}''_r \mu''_r} \right)^2} + 1 \right)}$$

$$n'' = \sqrt{\frac{|\tilde{\varepsilon}'_r \mu'_r - \tilde{\varepsilon}''_r \mu''_r|}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\tilde{\varepsilon}'_r \mu'_r - \tilde{\varepsilon}''_r \mu''_r}{\tilde{\varepsilon}'_r \mu'_r - \tilde{\varepsilon}''_r \mu''_r} \right)^2} - 1 \right)}$$

$$\mathbf{E}(M,t) = e^{-2\pi \frac{n'' x}{\lambda_0}} \Re \{ \tilde{E} e^{2i\pi \frac{n' x - c_0 t}{\lambda_0}} \} \mathbf{u}_y$$

## VII.7 Relations de passage

Les équations de MAXWELL :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\partial\Sigma}^e &= -\frac{d\Phi_{\Sigma}^m}{dt} & \Phi_{\partial\Omega}^e &= Q_{\Omega} \\ \mathcal{C}_{\partial\Sigma}^m &= I_{\Sigma} + \frac{d\Phi_{\Sigma}^e}{dt} & \Phi_{\partial\Omega}^m &= 0 \end{aligned}$$

permettent de déterminer les relations entre les champs de part et d'autre d'une interface séparant deux milieux :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{12} \wedge (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= \mathbf{0} & \mathbf{n}_{12} \cdot (\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 - \varepsilon_1 \mathbf{E}_1) &= \sigma \\ \mathbf{n}_{12} \wedge \left( \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} \right) &= \mathbf{j}_S & \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{n}_{12}$  est la normale à l'interface orientée depuis le milieu 1 vers le milieu 2.

On a toujours conservation de la composante tangentielle du champ électrique  $\mathbf{E}$  et de la composante normale du champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

$\sigma$  et  $\mathbf{j}_S$  sont les densités surfaciques de charge et de courant sur l'interface. Lorsque celles-ci sont nulles, on a aussi conservation de la composante tangentielle de l'excitation magnétique  $\mathbf{B}/\mu$  et de la composante normale de la densité de flux électrique  $\varepsilon\mathbf{E}$ .

## VII.8 Dioptre plan

On considère un dioptre plan d'équation  $z = 0$  séparant deux milieux homogènes tels que  $\mathbf{n}_{12} = -\mathbf{u}_z$ . On suppose que l'onde incidente de phase

$$\phi^{in}(M,t) = \mathbf{k}^{in} \cdot \mathbf{r} - \omega^{in}t$$

dans le milieu 1 (milieu incident), interagit avec le dioptre plan pour donner naissance à une onde plane de phase

$$\phi^{re}(M,t) = \mathbf{k}^{re} \cdot \mathbf{r} - \omega^{re}t$$

réfléchi dans le milieu incident et une onde plane de phase

$$\phi^{tr}(M,t) = \mathbf{k}^{tr} \cdot \mathbf{r} - \omega^{tr}t$$

transmise dans le milieu 2 (milieu transmis).

Les relations de passage, vérifiées pour toutes valeurs de  $x$ ,  $y$  et  $t$  en  $z = 0$ , imposent les conditions nécessaires et non suffisantes :

$$\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{k}^{in} = \mathbf{u}_z \wedge \mathbf{k}^{re} = \mathbf{u}_z \wedge \mathbf{k}^{tr} \qquad \omega^{in} = \omega^{re} = \omega^{tr} = \omega$$

ainsi la pulsation est transmise de l'onde incidente à l'onde réfléchi et à l'onde transmise, et le régime harmonique à la pulsation commune  $\omega$  est pleinement justifié. Les trois vecteurs d'onde partagent la même composante tangentielle, et se trouvent appartenir avec l'axe ( $Oz$ ) au même plan, appelé plan d'incidence. C'est la première loi de Descartes. On peut sans perdre de généralité fixer l'axe des  $x$  tel que ( $xOz$ ) soit plan d'incidence, ce qui annule les composantes en  $y$  des trois vecteurs d'onde.

L'équation d'onde impose dans chacun des deux milieux  $(\tilde{\varepsilon}_1, \mu_1)$  et  $(\tilde{\varepsilon}_2, \mu_2)$  à la pulsation  $\omega$  :

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}^{in})^2 &= \omega^2 \tilde{\varepsilon}_1 \mu_1 = (k_x^{in})^2 + (k_z^{in})^2 \\ (\mathbf{k}^{re})^2 &= \omega^2 \tilde{\varepsilon}_1 \mu_1 = (k_x^{in})^2 + (k_z^{re})^2 & k_z^{re} &= \pm k_z^{in} \\ (\mathbf{k}^{tr})^2 &= \omega^2 \tilde{\varepsilon}_2 \mu_2 = (k_x^{in})^2 + (k_z^{tr})^2 & k_z^{tr} &= \pm \sqrt{\omega^2 \tilde{\varepsilon}_2 \mu_2 - (k_x^{in})^2} \end{aligned}$$

Les relations de passage permettent d'établir le signe des composantes verticales des vecteurs d'onde réfléchi et transmis, établissant ainsi les lois de Descartes sur la réflexion et la réfraction :

$$k_z^{re} = -k_z^{in} \qquad k_z^{tr} = -\sqrt{\omega^2 \tilde{\varepsilon}_2 \mu_2 - (k_x^{in})^2}$$

Ces mêmes relations permettent de définir l'amplitude complexe des ondes réfléchi  $\tilde{E}^{re}$  et transmise  $\tilde{E}^{tr}$  en fonction de l'amplitude complexe de l'onde incidente  $\tilde{E}^{in}$ . On définit les coefficients de réflexion  $r$  et de transmission  $t$  en amplitude :

$$r = \frac{\tilde{E}^{re}}{\tilde{E}^{in}} \qquad t = \frac{\tilde{E}^{tr}}{\tilde{E}^{in}} = 1 + r$$

On considère deux cas de polarisation fondamentaux, suivant que ce soit le champ électrique (polarisation  $S$ ) ou le champ magnétique (polarisation  $P$ ) qui soit perpendiculaire au plan d'incidence.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \mathbf{E}(M,t) = \Re\{\tilde{E}e^{i\phi(M,t)}\}\mathbf{u}_y \\ P &\rightarrow \mathbf{B}(M,t) = \Re\{\tilde{B}e^{i\phi(M,t)}\}\mathbf{u}_y \end{aligned}$$

Les coefficients de FRESNEL valent alors :

$$r_S = \frac{\mu_2 k_z^{in} - \mu_1 k_z^{tr}}{\mu_2 k_z^{in} + \mu_1 k_z^{tr}} \qquad r_P = \frac{\tilde{\epsilon}_2 k_z^{in} - \tilde{\epsilon}_1 k_z^{tr}}{\tilde{\epsilon}_2 k_z^{in} + \tilde{\epsilon}_1 k_z^{tr}}$$