Année universitaire 2013/2014

Site : Luminy St-Charles x St-Jérôme Cht-Gombert x Aix-Montperrin Aubagne-SATIS

Sujet session de : 1er semestre - 2ème semestre - x Session 2 Durée de l'épreuve : 2h

Examen de : L1/xL2/ L3 - M1/ M2 - LP - DU Nom diplôme : Licence Physique Chimie - Chimie

Code Apogée du module : SPC3U2TA Libellé du module : Electromagnétisme pour la chimie

Document autorisé : OUI - x NON Calculatrices autorisées : x OUI - NON

Exercice 1 : Électrostatique

On modélise l'action électrique d'un atome d'hydrogène avec le potentiel électrique suivant, en coordonnées sphériques (r,θ,ϕ) :

$$V(r) = \frac{q \exp\left(-\frac{r}{a}\right)}{4\pi\epsilon_o r}$$

a étant une constante et q la charge du proton.

1. Exprimer le champ électrique associé en tout point $r > 0$.

2. En appliquant le théorème de Gauss, calculer la charge Q contenue dans une sphère de rayon $r = R > 0$.

3. En considérant le cas limite de la sphère lorsque le rayon R tend vers 0, retrouver la charge du proton (qui se situe en $r = 0$).

Exercice 2 : Onde électromagnétique

On considère l'onde électromagnétique de champ électrique (fonction d'onde)

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \Psi \cos\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \phi\right) \vec{u}$$

avec Ψ et ϕ l'amplitude et la phase à l'origine, ω la pulsation et k_x,k_y,k_z les trois composantes cartésiennes du vecteur d'onde $\vec{k}$, $\vec{u}$ le vecteur polarisation, vecteur unitaire (de longueur égale à un) de composantes u_x,u_y,u_z.

Les quatre équations de Maxwell donnent pour cette onde

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \tag{1}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2}\varepsilon_r \vec{E} \tag{3}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \tag{4}$$

$\vec{B}(x,y,z,t)$ est le champ magnétique de l'onde. On note c la vitesse de la lumière dans le vide, constante fondamentale de la Physique, et $\varepsilon_r \geq 1$ la permittivité relative du milieu transparent dans lequel se propage l'onde.

On rappelle l'expression du produit scalaire et du produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

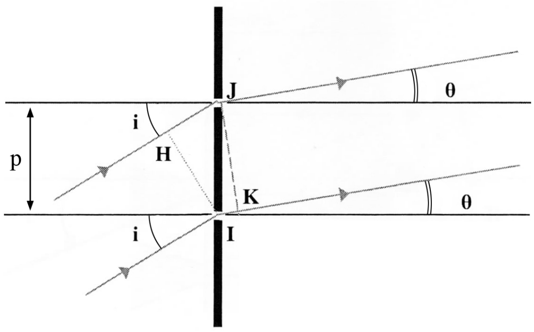
$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \qquad \begin{cases} c_x = a_y b_z - a_z b_y \\ c_y = a_z b_x - a_x b_z \\ c_z = a_x b_y - a_y b_x \end{cases}$$

1. Donner l'unité dans le système international de Ψ, ϕ, ω, k_x. Le vecteur polarisation est sans unité, les composantes x,y,z du vecteur position $\vec{r}$ sont en mètres et le temps t en secondes.
2. Quelle relation géométrique relie le vecteur d'onde $\vec{k}$ et le vecteur polarisation $\vec{u}$? De quelle équation de Maxwell tirez-vous cette relation ?
3. L'onde est-elle longitudinale ou transverse ? Citer des exemples d'ondes (non électromagnétiques) longitudinales et transverses.
4. Comparer les directions du vecteur d'onde $\vec{k}$ et des vecteurs champ électrique $\vec{E}$ et champ magnétique $\vec{B}$. Si $\vec{k}$ est suivant l'axe des x et $\vec{E}$ suivant l'axe des y, quelle est la direction du champ magnétique $\vec{B}$.
5. A partir de l'égalité vectorielle
$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = (\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} - \vec{k}^2\vec{E}$$
et des équations de Maxwell, trouver la relation entre ω et $\vec{k}$, dite relation de dispersion.
6. Relier la période T à la pulsation et la longueur d'onde λ au vecteur d'onde. Sachant que l'onde parcourt une longueur d'onde en une période, en déduire sa vitesse de propagation dans le milieu.
7. En comparant les vitesses de propagation de l'onde dans l'air $\varepsilon_r = 1$ et dans le verre $\varepsilon_r = 2{,}25$, relier la permittivité relative à l'indice optique n.
8. (Question bonus) comparer l'amplitude des champs électrique et magnétique.

Exercice 3 : Spectrométrie à réseau

La spectrométrie optique constitue un outil puissant pour connaitre la structure électronique des atomes et des molécules. Les analyses chimiques des contrôles de processus industriels, les analyses biomédicales, les analyses de pollutions atmosphériques sont pour une grande part faites par spectrométrie optique.

On considère dans la suite un spectromètre à réseau qui permet de disperser les lumières polychromatiques en diffractant les différentes composantes spectrales selon des angles différents. Le réseau du spectromètre est constitué d'un écran percé de fentes très fines, identiques, parallèles et séparées d'une distance p. Le réseau est illuminé par un faisceau parallèle avec un angle d'incidence i ; l'angle de diffraction est noté θ (*cf.* schéma ci-dessous).



1. Exprimer en fonction de p, i et θ la différence de marche δ entre les deux rayons représentés sur la figure précédente.
2. En déduire l'expression du déphasage $\Delta\varphi$ entre deux ondes de longueur d'onde λ diffractées par deux fentes successives selon l'angle θ.
3. Pour quelle(s) condition(s) obtient-on des interférences constructives entre ces ondes ? En tenant compte du signe de l'angle θ (les rayons diffractés peuvent être situés au dessus ou en-dessous de la normale au plan du réseau), justifier que la relation fondamentale des réseaux s'écrit $k\lambda = p\,(\sin(i) \pm \sin(\theta))$ pour k entier.
4. Que vaut la déviation D (angle entre le faisceau incident et le faisceau diffracté) ?
5. On se place en condition d'incidence normale ($i = 0$).
   (a) Donner, dans ces conditions, l'expression de D à l'ordre k en fonction de p et λ.
   (b) On désigne par λ_{min} et λ_{max} les bornes extrêmes du spectre visible. Donner en fonction de p, λ_{min} et λ_{max} la valeur d'ordre k_l limite au-delà de laquelle un recouvrement partiel des spectres de diffraction risque de se produire.
   Que vaut la largeur angulaire $\Delta\theta$ du spectre visible pour cette valeur d'ordre ?
   Faire l'application numérique pour k_l et $\Delta\theta$ avec $\lambda_{min} = 380\,\text{nm}$, $\lambda_{max} = 750\,\text{nm}$ et $p = 10\,\mu\text{m}$.
6. (Question bonus) on se place maintenant dans des conditions telles que $i \neq 0$.
   (a) Déterminer la condition sur i pour laquelle la déviation D est minimale.
   (b) En déduire la relation entre D et λ dans les conditions de déviation minimale.