Ce document contient 3 page(s) et comporte 33 questions.
Les seuls documents autorisés sont les formulaires distribués en cours.
Durée de l'épreuve : quatre heures (08 :00 — 12 :00)
Vous rendrez deux copies distinctes une pour la partie 2 (20 % du total des points) et une autre pour les autres.
Vous vous appliquerez à indiquer lisiblement les questions auxquelles vous répondez.

1 Questions de cours sur l'Optique Guidée

1. Pour le guide d'onde plan diélectrique, quelle propriété remarquable vérifient entre eux les modes guidés ? La définir mathématiquement.
2. Quelles sont les fonctions propres de l'opérateur parité $\mathcal{P}$?
3. Pour le guide d'onde plan diélectrique symétrique, en définissant l'opérateur $\mathcal{L}$ dans le cadre des notations du cours par $\mathcal{L} \equiv \frac{d^2}{dy^2} + \omega^2 \mu_o \epsilon_0 \epsilon_r(y)$, quelle relation a t'on entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$?
4. Pour le guide d'onde plan diélectrique symétrique, quelles sont les conséquences pour les modes guidés de la relation existant entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$?
5. Quelle différence cruciale y a t'il entre le guide d'onde plan diélectrique asymétriqe et le guide d'onde plan diélectrique symétrique pour ce qui est du mode fondamental ?
6. Signal se propageant. On notera $s(z,t)$ le paquet d'onde centré en β_o. Donner le sens physique de la vitesse de groupe. Définir mathématiquement la vitesse de phase et la vitesse de groupe. On note L la demi-largeur du signal, définir mathématiquement L^2, quelle inégalité L vérifie t'elle ?
7. Que vaut $L^2(t)$? (l'expression exacte des coefficients n'est pas demandée !), quelles conclusions en tirer ?
8. Pour une fibre optique circulaire à saut d'indice, comment se dénomme le mode fondamental, quelle est sa coupure ? Quels sont les trois modes d'ordre supérieur les plus proches du fondamental, quels sont leurs coupures ?

2 Développement multipôlaire du potentiel vecteur

On donne :

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\Omega \underline{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d\mathbf{r}' \tag{1}$$

1. Expliquer en quelques mots comment on a obtenu cette expression.
2. Montrer que lorsque $r = |\mathbf{r}|$ est grand devant les dimensions caractéristiques de Ω *i.e.* $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ pour tout $\mathbf{r}'$ dans Ω, alors on a :
$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ik_0 r}}{r} \int_\Omega \underline{\mathbf{j}}(\mathbf{r})' e^{-ik_0 \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}\, d\mathbf{r}'\ , \tag{2}$$
avec $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$.
3. En déduire le développement multipolaire du potentiel vecteur.
4. Le terme $\underline{\mathbf{A}}_0$ qui est le premier terme du développement fait intervenir l'intégrale $\int_\Omega \underline{\mathbf{j}}(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}'$. En utilisant la continuité de la charge et le théorème d'Ostrogradsky et en admettant que $\underline{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{|\partial\Omega} = 0$ (*i.e.* la composante normale de $\underline{\mathbf{j}}$ s'annule sur le bord de Ω), montrer que :
$$\int_\Omega \underline{\mathbf{j}}(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' = -i\omega \int_\Omega \mathbf{r}' \underline{\rho}(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}'\ . \tag{3}$$
5. À quoi correspond le terme de droite ?

3 Guide d'onde planaire diélectrique et symétrique (GOPDS)

On va étudier la propagation dans un guide d'onde planaire diélectrique et symétrique. Ce guide d'onde est supposé invariant suivant la direction (Oz) et (Ox).

3.1 le cas où l'indice de réfraction est constant par morceaux

On prendra les notations et hypothèses suivantes :

- n_1 pour l'indice des couches extérieures et n_2 pour l'indice de la couche interne comprise entre les plans $y = -e/2$ et $y = e/2$.
- $n_1 < n_2$
- la direction de propagation sera (Oz)
- on prendra une dépendance temporelle en $\exp(-i\omega t)$
- le milieu est non magnétique, et il n'y a ni charges, ni courant

1. Donner les équations de Maxwell en temporel en unités S.I., en déduire les équations de Maxwell en fréquentiel en unités S.I.. Quelles équations suffit'il de considérer pour étudier le problème ?
2. Comment simplifier l'étude du problème ? Le simplifier et nommer cette simplification ?
3. On cherche les solutions de propagation dans le GOPDS sous la forme d'ondes guidées. On notera β la constante de propagation le long de l'axe (Oz). En tenant compte des propriétés géométriques du GOPDS :
   1. obtenir deux équations de propagation (on rappelle que $\epsilon\mu = \epsilon_o\mu_o n^2$)
   2. donner les conditions aux limites générales à utiliser pour les champs électromagnétiques $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B})$ au niveau d'une interface entre deux milieux. Particulariser ces conditions au sein du GOPDS $(\rho_s = 0, \mathbf{j_s} = \mathbf{0})$ en utilisant les relations constitutives $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ (que vaut μ dans notre étude ?), et $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ avec $\epsilon = \epsilon_o\epsilon_{relatif}$
   3. En reprenant un résultat de la question 1 (on pourra utiliser les relations vectorielles suivantes $\nabla \wedge (f\mathbf{U}) = \nabla(f) \wedge \mathbf{U} + f\nabla(\mathbf{U})$ et $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}$) que peut on en conclure sur la validité des équations de propagation précédemment obtenues ?
   4. On s'intéresse aux ondes se propageant vers les z positifs. On suppose que la condition suivante est vérifiée : $\beta \in [\frac{2\pi n_1}{\lambda_o}, \frac{2\pi n_2}{\lambda_o}]$ où λ_o est la longueur d'onde dans le vide. On pourra ne traiter que le cas le plus simple (voir la question 2).
   1. Exprimer cette condition en faisant apparaître k_o.
   2. Qu'implique cette condition sur les solutions ?
   3. Quelles sont les formes des solutions dans les différentes parties du GOPDS ?

3.2 le cas où l'indice de réfraction à un profil parabolique (début de l'étude)

Ce cas est une des rares situations autre que celle de la section 3.1 où une solution analytique existe. On prendra les notations et hypothèses suivantes :

- le profil de l'indice de réfraction sera tel que

$$n^2(y) = n_f^2(1 - (y/y_0)^2) \tag{4}$$

- la direction de propagation sera (Oz)
- on prendra une dépendance temporelle en $\exp(-i\omega t)$
- le milieu est non magnétique, et il n'y a ni charges, ni courant

Le profil décrit par l'équation 4 suppose que l'on se limitera à l'étude des modes localisé au voisinage du plan $y = 0$.

1. En partant des équations de Maxwell en régime harmonique obtenir l'équation générale de propagation pour le champ électrique dans le cas d'un indice non homogène. Dans toute la suite de cette exercice, on va négliger le terme de droite en $-\nabla(\frac{\mathbf{E}.\nabla(\epsilon_0 n^2(y))}{\epsilon_0 n^2(y)})$ de l'équation obtenue à cette question. A priori, à quoi correspond cette approximation ?
2. On se limite dans la suite des questions à l'étude des modes TE de constante de propagation β. En faisant le changement de variable $Y = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}y$ où $\sigma^2 = \frac{\lambda y_0}{\pi n_f}$ avec $\sigma > 0$ et λ la longueur d'onde, réécrire l'équation de propagation des modes TE en tenant compte de hypothèses, en fonction de σ, β, n_f, et λ.
3. On pose $\frac{\sigma^2}{2}(\beta^2 - n_f^2(\frac{2\pi}{\lambda})^2) = -(2\nu + 1)$ où ν est un entier. Simplifier l'équation obtenue à la question précédente.
4. L'équation différentielle vérifiée par les polynômes d'Hermite d'ordre ν est $H_\nu^{''}(x) - 2xH_\nu^{'}(x) + 2\nu H_\nu(x) = 0$. On pose $f_\nu(x) = H_\nu(x)\exp(-x^2/2)$, vérifier que $f_\nu(x)$ est solution de l'équation différentielle $f_\nu^{''}(x) + (2\nu + 1 - x^2)f_\nu(x) = 0$.
5. En déduire la forme des solutions de l'équation des modes TE pour le profil parabolique.

4 Approximation de guidage faible

On va établir les premiers résultats nécessaires à une description précise de l'approximation du guidage faible pour une fibre optique circulaire de rayon a. On considère que les champs électromagnétiques d'un mode guidé selon l'axe (Oz) d'un guide d'onde invariant selon cet axe peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{E_t} + E_z\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{e_t} + e_z\hat{\mathbf{z}})e^{i\beta z} \tag{5}$$
$$\mathbf{H}(x,y,z) = \mathbf{H_t} + H_z\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{h_t} + h_z\hat{\mathbf{z}})e^{i\beta z} \tag{6}$$
$$\tag{7}$$

où $\hat{\mathbf{z}}$ est le vecteur unitaire suivant l'axe z, β la constante de propagation. En coordonnées cartésiennes on pourra aussi utiliser la décomposition suivante :

$$\mathbf{e_t} = e_x\hat{\mathbf{x}} + e_y\hat{\mathbf{y}} \tag{8}$$
$$\mathbf{h_t} = h_x\hat{\mathbf{x}} + h_y\hat{\mathbf{y}} \tag{9}$$

On supppose le milieu non magnétique, sans charges ni courant et on note le profil d'indice par

$$n = n(x,y) \text{ (en coordonnées cartésiennes)} \tag{10}$$

1. Préliminaire : en se plaçant en régime harmonique ($\exp(-i\omega t)$), montrer en partant des équations de Maxwell et des relations constitutives que :

$$(\nabla^2 + k_0^2 n^2)\mathbf{E} = -\nabla(\mathbf{E}.\nabla_\mathbf{t}(\ln(n^2))) \tag{11}$$

   où $k_0 = \frac{\omega}{c}$. On rappelle que $\nabla_\mathbf{t}$ est un opérateur tel que $\nabla_\mathbf{t}.\mathbf{A_t} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}$.
2. réduire cette équation en utilisant l'équation (5) pour obtenir :

$$({\nabla_\mathbf{t}}^2 + k_0^2 n^2 - \beta^2)\mathbf{e_t} = -\nabla_\mathbf{t}(\mathbf{e_t}.\nabla_\mathbf{t}(\ln(n^2))) \tag{12}$$
$$({\nabla_\mathbf{t}}^2 + k_0^2 n^2 - \beta^2)e_z = -i\beta(\mathbf{e_t}.\nabla_\mathbf{t}(\ln(n^2))) \tag{13}$$

3. On va admettre que le champ $\mathbf{e}$ dépend de la fréquence normalisée V et du paramètre décrivant le saut d'indice $\Delta = \frac{n_c^2 - n_g^2}{2n_c^2}$ où n_c et n_g sont les indices maximaux repectivement du cœur et de la gaine. Rappelez les définitions des paramètres modaux U et V. En utilisant : $n^2(x,y) = n_c^2(1 - 2\Delta f(x,y))$ avec $f \geq 0$ transformer l'équation (12) en faisant intervenir a, V, et U de façon à obtenir :

$$(a^2{\nabla_\mathbf{t}}^2 + U^2 - V^2 f)\mathbf{e_t} = -a\nabla_\mathbf{t}(\mathbf{e_t}.a\nabla_\mathbf{t}(\ln(n^2))) \tag{14}$$

4. Montrer que l'on peut exprimer β sous la forme :

$$\beta = \frac{V}{a}(\frac{1}{2\Delta})^{1/2}(1 - 2\Delta\frac{U^2}{V^2})^{1/2} \tag{15}$$

5. On note $\tilde{U}$ la valeur de U quand $\Delta \to 0$ et $\tilde{\beta}$ la constante de propagation associée. On suppose que U peut se développer de la façon suivante : $U(V,\Delta) = \tilde{U} + \Delta U^{(1)}$, montrer que l'on peut écrire un développement de β de la forme :

$$\beta = \tilde{\beta} - \frac{4}{aV}\tilde{U}U^{(1)}(\frac{\Delta}{2})^{3/2} \tag{16}$$

Vous rendrez cet énoncé à la fin de l'épreuve.

NOM : PRÉNOM :