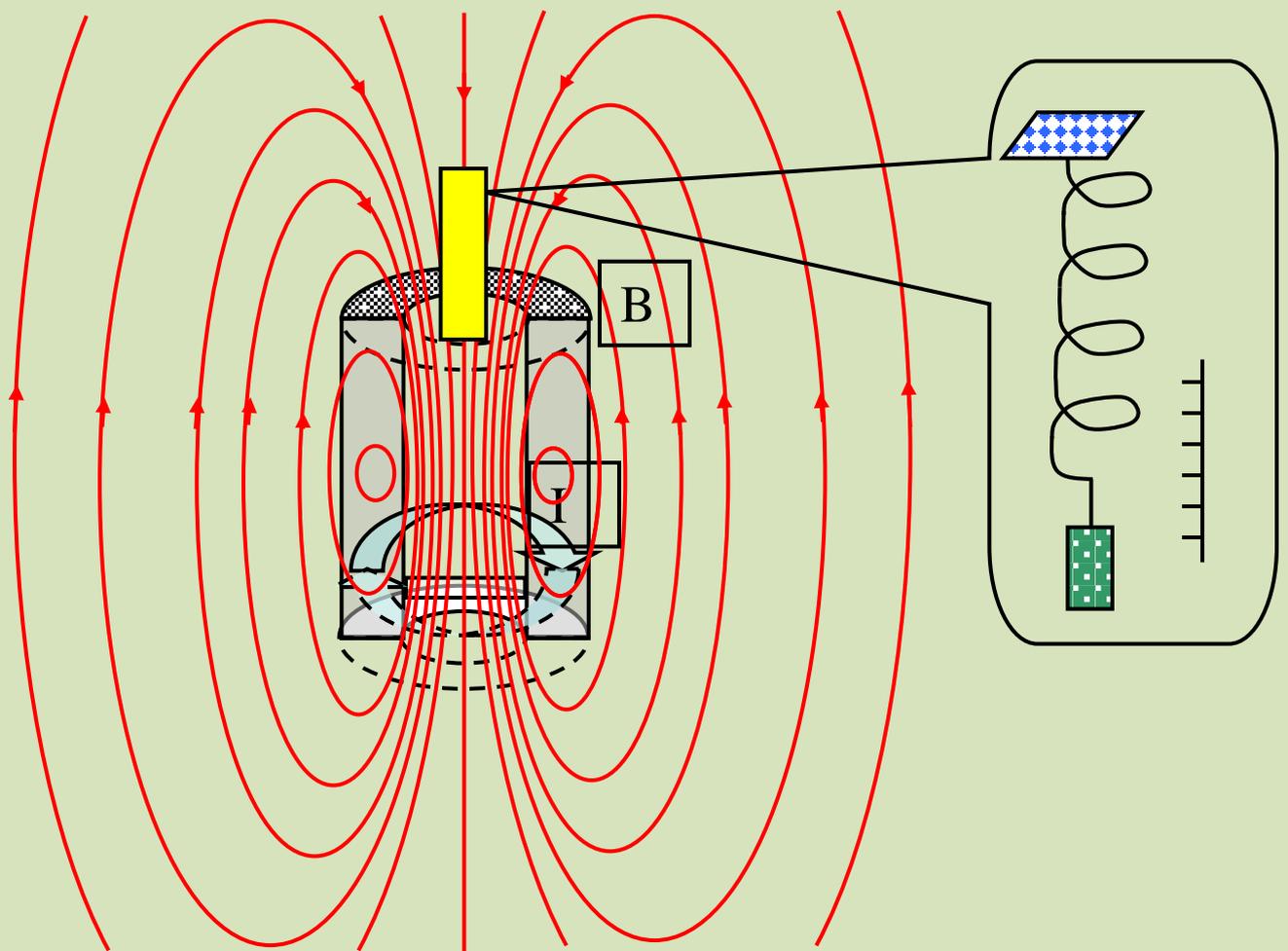


# Electrostatique et Magnétostatique

Notes du cours

**Evgeni Popov**



**Electrostatique et Magnétostatique**  
**Notes du cours**

(Cours d'Electromagnétisme pour L2 Sciences Physiques et Chimiques)

Auteur : Evgeni Popov, Institut Fresnel, Université d'Aix-Marseille (AMU)

Web : [www.fresnel.fr/perso/popov/coursEM2013](http://www.fresnel.fr/perso/popov/coursEM2013)

**Copyright 2013 : Evgeni Popov, AMU**

AMU, 2013

**Notes du Cours  
d'Electromagnétisme :**

**Electrostatique et magnétostatique**

**(L2 Physique - Chimie)**

**E. Popov**

## Plan de cours

### **Electrostatique**

Charge électrique, types de charges. Loi de Coulomb.

Champ électrique, lignes de champ

Dipôle électrostatique

Flux du champ électrostatique, théorème de Gauss

Energie et potentiel du champ électrostatique

Théorème d'Ostrogradski, théorème de Gauss – présentation différentielle

Equations de Laplace et de Poisson

Discontinuité de champ électrique

Type de matériels : conducteurs, isolateur et semi-conducteurs

Conducteurs dans champ électrostatique. Cage électrostatique. Corona décharge

Courant électrique et la loi d'Ohm

Condensateurs

Diélectriques dans champ électrostatique, constante diélectrique, permittivité relative, polarisabilité de milieu

### **Magnétostatique**

Force magnétique, champ magnétique. Loi de Biot et Savart.

Force sur charge en mouvement dans un champ magnétique, la force de Lorentz

Mouvement cyclotron et aurore boréale

Loi de Laplace, effet Hall

Champ créé par une charge en mouvement et un courant électrique

Flux de champ magnétique

Dipôle magnétique

Interactions magnétiques

Théorème d'Ampère, théorème de Stokes

LES équations principales d'électrostatique et magnétostatique

Discontinuité de champ magnétique

Force magnétohydrodynamique

Potentiel vecteur

### **Electromagnétisme (dynamique)**

L'induction électromagnétique et la première des équations de Maxwell

Inductance mutuelle

Courant de déplacement et la deuxième des équations de Maxwell

LES équations de Maxwell et les ondes électromagnétiques

Propriétés magnétiques des matériaux (diamagnétisme, paramagnétisme et ferromagnétisme)

Champ H, susceptibilité et perméabilité magnétique

## Pourquoi faire et à quoi ça sert ?

### Electrostatique

1. Courants électriques, loi d'Ohm, circuits électriques
2. Diélectriques, semiconducteurs  $\implies$  transistors, diodes

puces intégrales      TV, PC, portables, Hi-Fi

3. Structure de la matière (atomes et molécules, propriétés chimiques)

### Magnétostatique

1. Boussoles, compasses
2. Aurore boréale, mouvement cyclotron, séparation d'isotopes
3. Dipôle magnétique, aimantes, magnétisation de milieu

### Electromagnétisme

1. Les ondes électromagnétiques : la lumière, radio et TV émissions, télécommunications
2. Micro-ondes, radiothérapie
3. Radars aériens, maritimes, radioastronomiques et policiers
4. Relativité restreinte
5. Optique et spectroscopie

## **Horaires :**

12 cours de 2 heures

26 séances de TD (2 fois par semaine)

Examen partiel en électrostatique conte pour 50% d'électrostatique  
(en totale – pour 25%)

## Charge électrique

1. Charge  $\xrightarrow{\text{crée}}$  force électrique  
 $\xleftarrow{\text{s'exerce}}$  sur les charges

2. Deux signes :  $\oplus$  et  $\ominus$ :

deux types de forces (d'attraction et de répulsion)



Principe de l'action et de la réaction :



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

3. Quantification des charges :

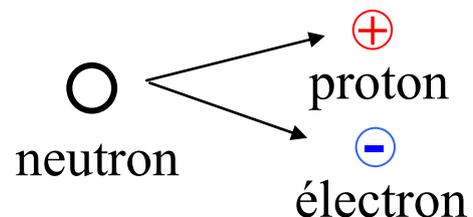
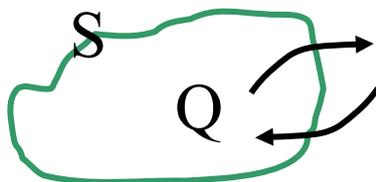
électron  $\ominus$   $e^-$   
 proton  $\oplus$   $p^+$

$$e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ [C]}$$

$$1 \text{ coulomb} = 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ s}$$

4. Conservation

$$\Delta Q = \sum \text{charges entrantes} - \sum \text{charges sortantes}$$



5. Les charges sont additives :

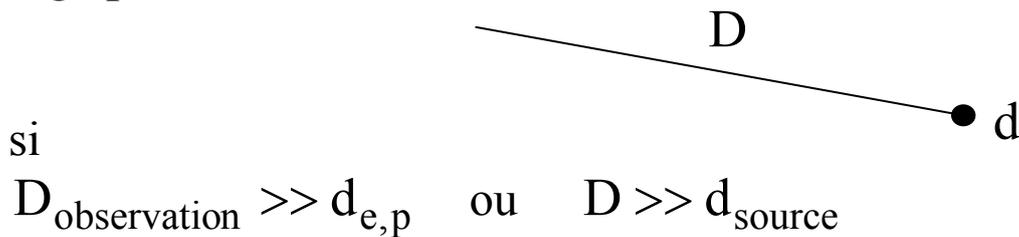
$$q_1' + q_1'' \rightarrow \vec{F}_{21} = \vec{F}_{21}' + \vec{F}_{21}''$$

## Types de charges

Dans la nature : l'électron et le proton (les quarks n'existent pas séparément)

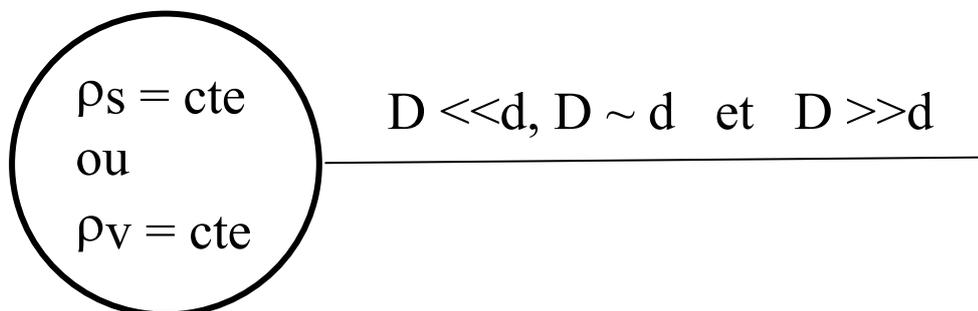
### Approximations utiles :

#### I. Charge ponctuelle :



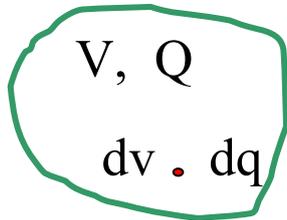
caractéristiques : charge, position, vitesse

Remarque : Une sphère chargée uniformément crée un champ comme une charge ponctuelle



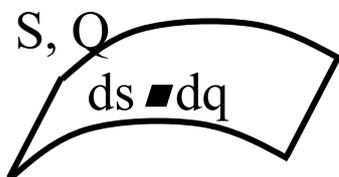
## II. Charges continues

### 1. Charge volumique : densité de charge volumique



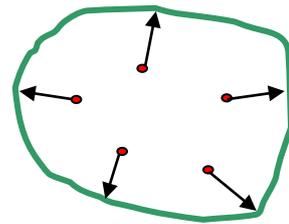
$$\rho_v(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{dv} [\text{Cm}^{-3}].$$

### 2. Charge surfacique : densité surfacique

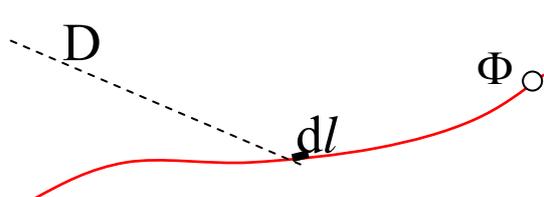


$$\rho_s(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{ds} [\text{Cm}^{-2}]$$

e.g. conducteurs :  
Les charges libres sont repoussées  
jusqu'à la surface



### 3. Charge linéique ( $D \gg \Phi$ ): densité linéique



$$\rho_l(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{dl} [\text{Cm}^{-1}]$$

**def** : un volume, une surface ou un fil sont chargés uniformément si  $\rho = \text{cte}$  et  $Q_{\text{total}} = \rho \cdot V, S$  ou  $L$

**Remarque :**

Notations :  $\rho_\ell = \lambda, \rho_S = \sigma,$

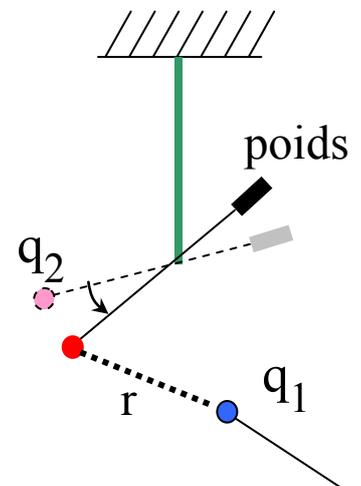
mais par fois  $l$  – longueur d’onde et  $s$  - conductivité

## Loi de Coulomb

Charles Augustin de Coulomb - 1785

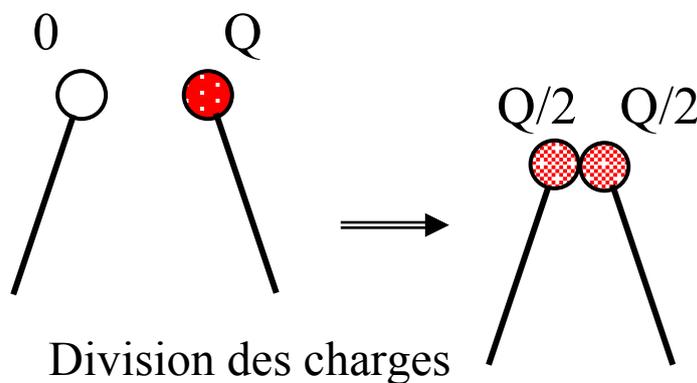
### Règles de Coulomb :

1. Les charges similaires se repoussent, les charges opposées s'attirent.
2. L'attraction ou la répulsion s'exerce sur la ligne droite entre les charges.
3. La magnitude (la norme) de la force est proportionnelle au carré de l'inverse de la distance entre les charges.
4. La force est proportionnelle à la magnitude de chacune des charges et les charges sont additives.



si  $r \rightarrow r'$

$$F \rightarrow F' = F \frac{r^2}{r'^2}$$



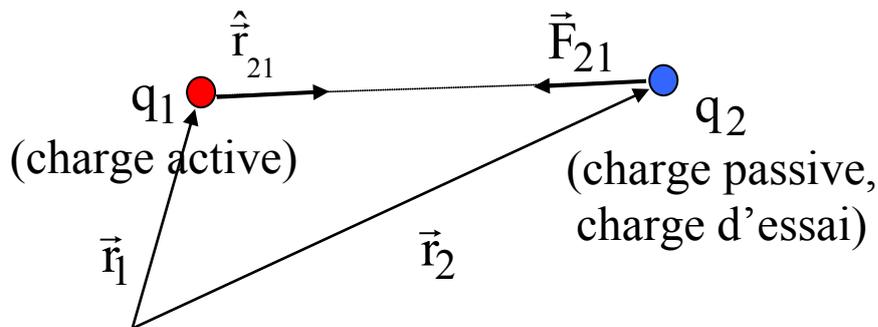
### Hypothèses :

1. La force électrique créée par une petite sphère est la même que si la charge est ponctuelle.
2. L'isotropie d'une charge ponctuelle : la force ne dépend pas de l'orientation de la sphère dans l'espace.
3. L'indépendance mutuelle des forces électrique, élastique et gravitationnelle.

**Expression mathématique :**

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21}$$

$$\hat{r}_{21} = \frac{\vec{r}_{21}}{r} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r}$$



$q_1 q_2 > 0 \Rightarrow F \uparrow\uparrow r_{21}$  : répulsion

$q_1 q_2 < 0 \Rightarrow F \uparrow\downarrow r_{21}$  : attraction

La constante de Coulomb  $k$

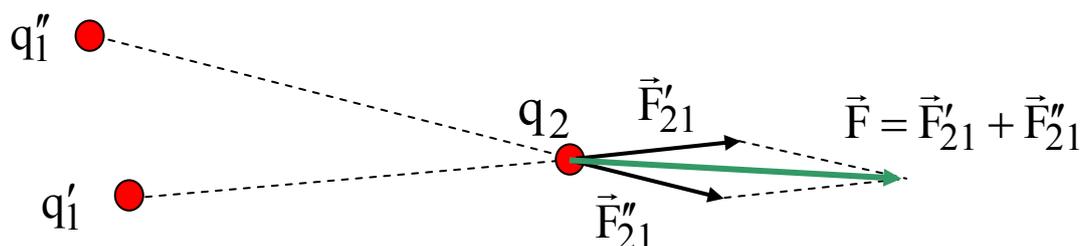
$$k = 10^{-7} \text{ c}^2 \approx 8.95 \times 10^9 \text{ [Nm}^2\text{C}^{-2}\text{]}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ permittivité du vide}$$

Autre propriété de la force électrique (linéarité, principe de superposition) :

Les sources différentes  $\longrightarrow$  **sommation** vectorielle des forces



## Champ électrique

**Notion** de champ électrostatique : la propriété d'une charge de modifier les caractéristiques de l'espace : chaque autre charge est soumise à une force électrostatique.

Cause  $\longrightarrow$  résultat : charge  $\longrightarrow$  champ  $\longrightarrow$  force

1. Le champ ne dépend pas de la charge qui est soumise à la force (dite charge **passive**).
2. Le champ représente le 'porteur' d'action à distance de la charge qui le crée (dite charge **active**).

**Def.** Dans une région d'espace il existe un champ électrostatique si une charge placée dans la région est soumise à une force électrostatique

Propriétés :

1. Le champ est proportionnel à la force, donc vecteur
2. Le champ ne dépend pas de la magnitude de la charge passive, donc est égal à la force exercée sur une charge passive unitaire :

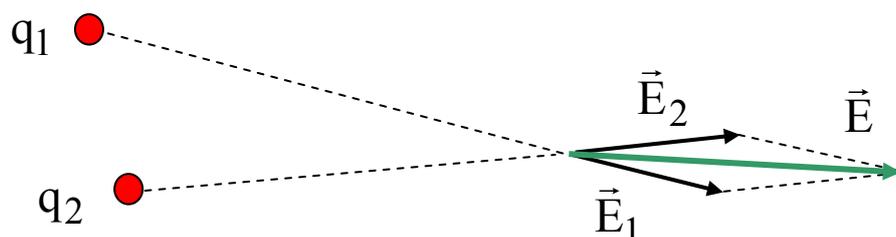
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \text{ [NC}^{-1}\text{]}, \text{ usuelle [Vm}^{-1}\text{]}$$

Remarque : électrostatique : les charges ne bougent pas et il n'y a pas d'influence des charges passive sur les charges actives ('collées' dans l'espace).

Le champ  $\longrightarrow$  la force :  $\vec{F} = q\vec{E}$

Le champ est additif (principe de superposition) :  $\longrightarrow$

$$\vec{E} = \frac{\sum \vec{F}_j}{q} = \sum \frac{\vec{F}_j}{q} \equiv \sum \vec{E}_j$$

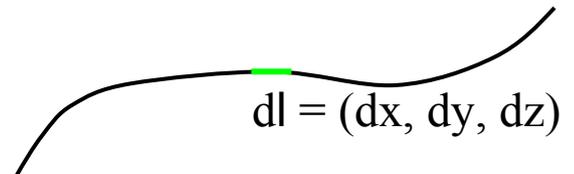


## Lignes de champ

Représentation graphique de champ (introduite par Faraday) :  
les lignes tangentes au vecteur de champ

Si  $d\vec{\ell} = (dx, dy, dz)$  est un élément de ligne,  $d\vec{\ell} // \vec{E} \Rightarrow d\vec{\ell} = c\vec{E}$   
donc

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} = c(\vec{r})$$



La densité des lignes est proportionnelle à la magnitude du champ

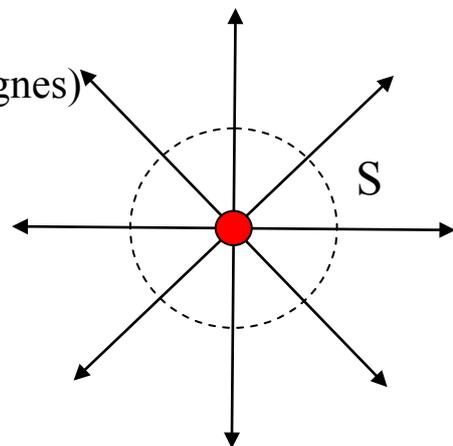
I. Champ d'une charge **ponctuelle**  $q_0$  située à l'origine du système de coordonnées :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} \hat{r}$$

radiale :

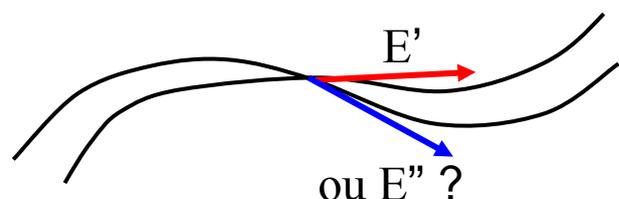
densité =  $N/S = N/4\pi r^2$  (N – nombre de lignes)

$E \rightarrow \infty$  **diverge** sur  $r \rightarrow 0$   
(densité  $\rightarrow \infty$ )



Propriétés des lignes de champ :

1. Les lignes ne se croisent que sur les charges (le champ est unique)



2. Les lignes commencent sur la charge positive (pourquoi ?) et finissent sur la charge négative.

### Cas particuliers

1. Le champ électrostatique créé dans un point P(r) par un élément de volume dv ayant une densité **volumique** de charge  $d\rho_v$  et situé dans P'(r') est donné par l'équation :

$$d\vec{E}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_v(\vec{r}')dv(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

Le champ créé par un volume V est obtenu par intégration tridimensionnelle sur V :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_v(\vec{r}')dv(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_v(\vec{r}')dv(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \Delta\hat{r} \end{aligned}$$

2. Champ des charges **surfaceutiques** :

$$\begin{aligned} d\vec{E}(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_s(\vec{r}')ds(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad \text{et} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\rho_s(\vec{r}')dS(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned}$$

3. Champ des charges **linéiques** :

$$\begin{aligned} d\vec{E}(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_\ell(\vec{r}')d\ell(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad \text{et} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\rho_\ell(\vec{r}')d\ell(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned}$$

Remarque préliminaire :

$dv \propto r^3 \Rightarrow \iiint$  ne diverge pas quand  $\Delta r \rightarrow 0$

$ds \propto r^2 \Rightarrow \iint$  ne diverge pas quand  $\Delta r \rightarrow 0$

$d\ell \propto r \Rightarrow \int$  **diverge** quand  $\Delta r \rightarrow 0$  (comme pour charge ponctuelle)

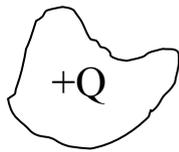
Pourquoi ? La définition de charge ponctuelle et linéique nécessite que la distance d'observation soit beaucoup plus grand que les dimension de charge, donc on n'a pas le droit de se situer sur  $r \rightarrow 0$ .

## Considérations de la symétrie

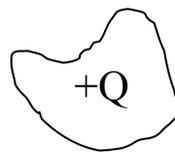
Règles générales :

1. Si la distribution de charges électriques est symétrique par rapport à un point, ligne ou plan, le champ électrique à la même symétrie.
2. Si la distribution de charges électriques est antisymétrique par rapport à un point, ligne ou plan, le champ électrique à la même antisymétrie.

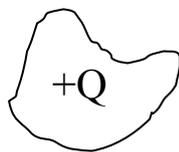
Exemples :



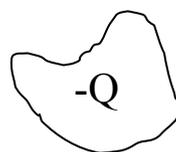
P : plan de symétrie de Q



E est aussi symétrique par rapport à P



P : plan d'antisymétrie de Q



E est aussi antisymétrique par rapport à P

### Conséquences :

1. Le champ électrique est contenu dans chaque plan de symétrie, hors des charges.
2. Le champ électrique est perpendiculaire à chaque plan d'antisymétrie des charges.
3. S'ils existent deux plans de symétrie non parallèles, sur l'intersection de ces plans le champ électrique est dans la direction de cette intersection.

### Aspects pratiques :

1. Il suffit de trouver un plan d'antisymétrie de charges pour déterminer la direction de champ électrique sur ce plan.
2. Il faut deux plans de symétrie pour déterminer la direction de champ électrique sur son intersection.

## Champ d'un fil chargé uniformément

charge sur axe x,

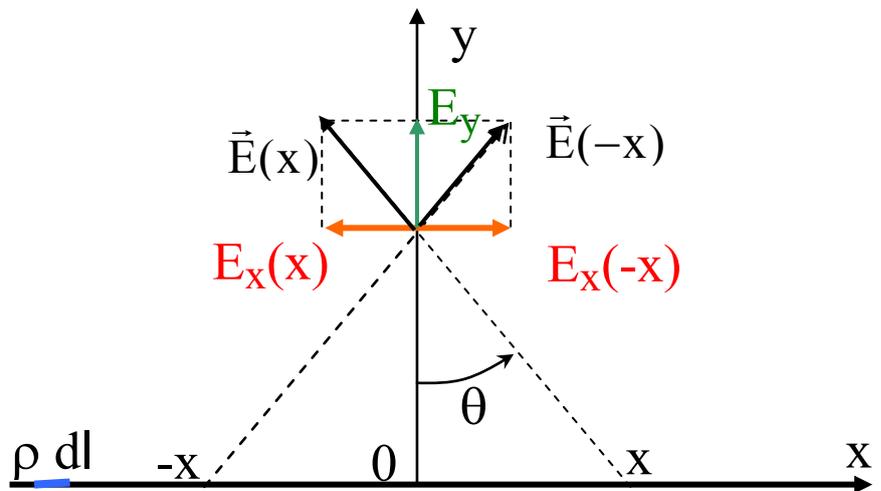
observation sur  $y_0$

$\rho = \text{cte}$ ,  $dl = dx$

$\sin\theta = x/r$

1)  $E_x = 0$  :

pour  $\forall$  charge  $\rho dx$  sur  $x$ , la charge sur  $-x$  compense  $E_x$  :



$$dE_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dx}{r^2} \sin\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dx}{r^3} x \Rightarrow dE_x(x) + dE_x(-x) = 0$$

$$2) dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dx}{r^2} \cos\theta \quad ; \quad x = y_0 \operatorname{tg}\theta$$

$$\Downarrow \quad dx = \frac{y_0 d\theta}{\cos^2 \theta} ; \quad r^2 = \frac{y_0^2}{\cos^2 \theta} ;$$

$$E_y = \int_x dE_y = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{r^2} \cos\theta = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} y_0 \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \frac{\cos^2 \theta}{y_0^2} \cos\theta$$

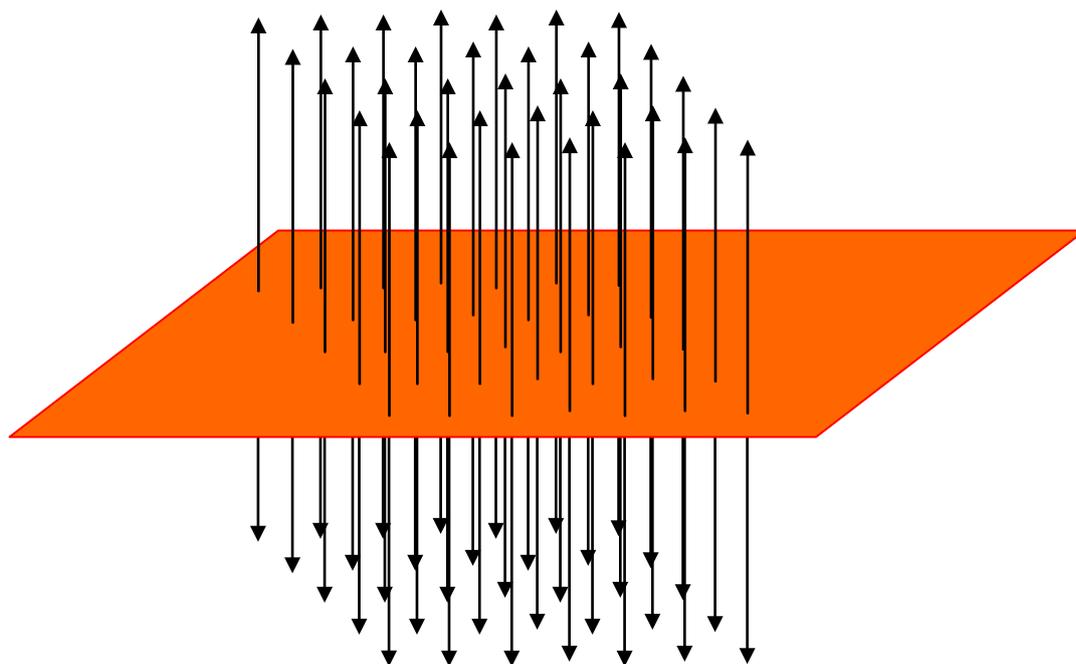
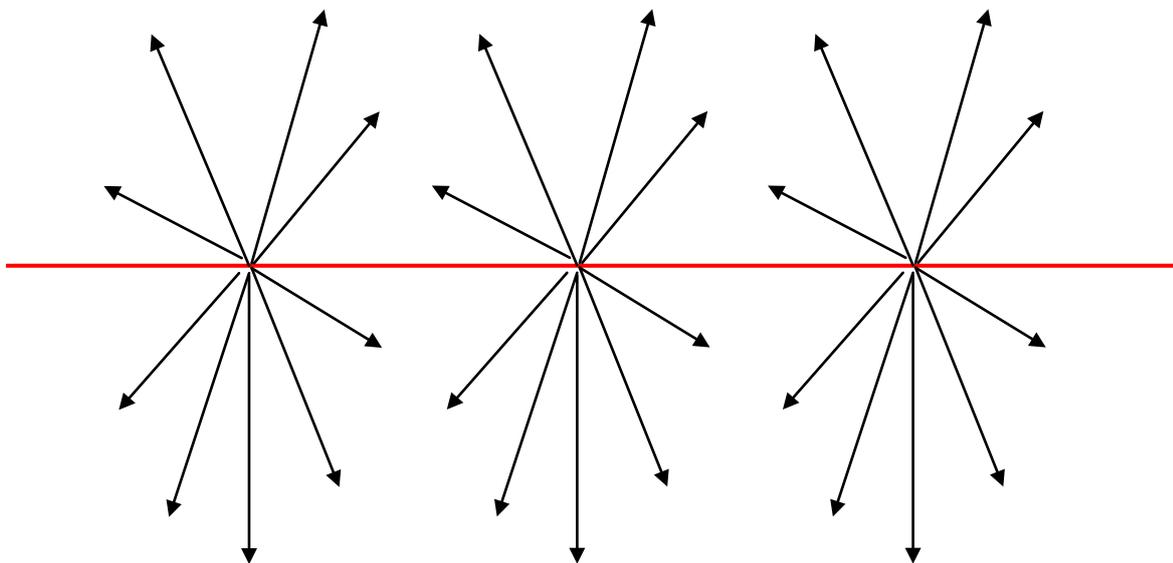
$$= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 y_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \cos\theta = \frac{2\rho}{4\pi\epsilon_0 y_0}$$

Observations :

I.  $\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{0}$

II.  $E_{\perp} = \frac{2\rho}{4\pi\epsilon_0 y_0}$  - radial

III. E diverge sur les charges linéiques :  $E \rightarrow \infty$  si  $y_0 \rightarrow 0$



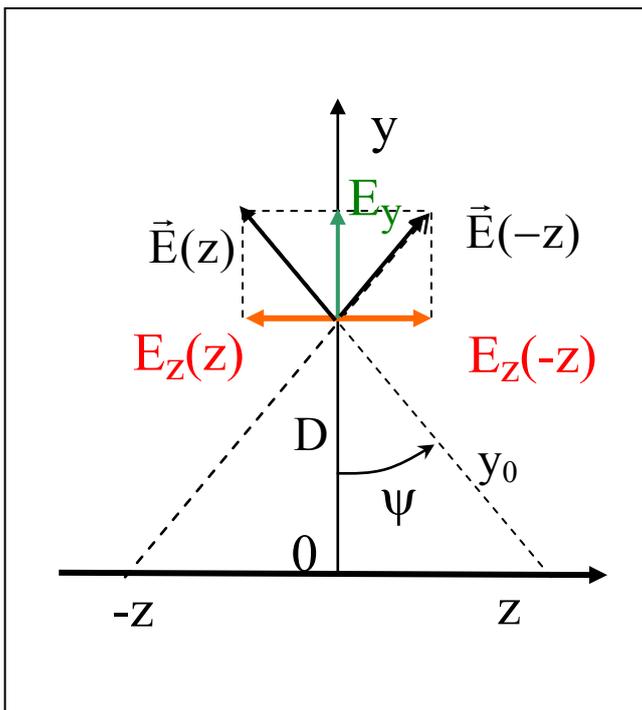
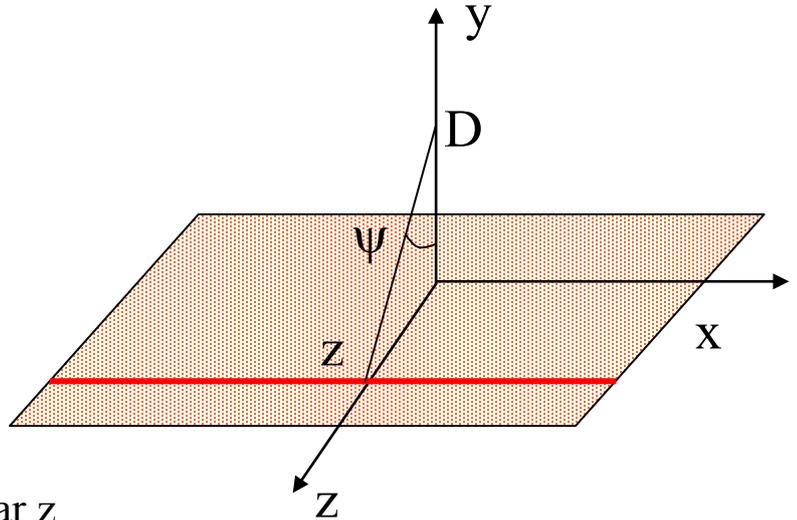
## Champ d'un plan chargé uniformément

observation sur axe y  
à distance D

$\rho = \text{cte}$ ,

$$\vec{E} = \iint_S d\vec{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E} dx$$

champ d'un fil // x et passant par z



1)  $E_x = 0$

2)  $E_z = 0$  pour  $\forall$  fil par z, le fil par  $-z$  compense  $E_z$

3)  $dE_y = dE_{\text{fil}} \cos \psi = \frac{\rho \cos \psi}{2\pi \epsilon_0 y_0} dz$

$$E_y = \int_x dE_y = \frac{\rho}{2\pi \epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \psi}{y_0} dz =$$

$$z = D \tan \psi \Rightarrow dz = \frac{D d\psi}{\cos^2 \psi}$$

$$y_0 = \frac{D}{\cos \psi}$$

$$= \frac{\rho}{2\pi \epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \psi \frac{\cos \psi}{D} \frac{D d\psi}{\cos^2 \psi}$$

$$= \frac{\rho}{2\pi \epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\psi = \frac{\rho}{2\epsilon_0}$$

**Observations :**

I.  $E_{\parallel} = 0$

II.  $E_{\perp} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}$  invariant de D

III. E a des directions opposées des deux côtés de la surface

IV. E **ne** diverge pasV. E subit une discontinuité à la traversée de la surface chargée, égale à  $\frac{\rho_s}{\epsilon_0}$ .

Explication physique :

Si on regarde le champ créé par la surface vue dans le même angle solide à une distance différente :

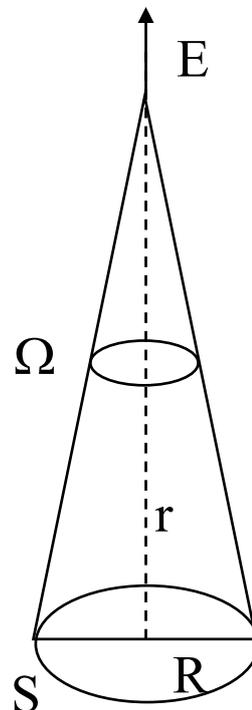
$$E \propto \frac{Q_S}{r^2}$$

mais  $Q_S = \rho S \propto \rho R^2$

donc  $E_{\Omega}$  est indépendant de r

$$R \sim r$$

$$S \sim R^2 \sim r^2$$

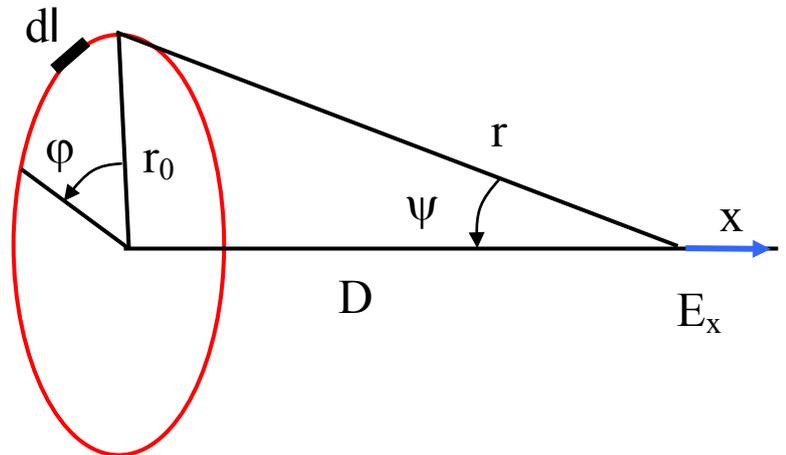


## Champ sur l'axe d'un fil circulaire chargé uniformément

observation sur l'axe x  
à distance D

$\rho_l = \text{cte}$ ,

1) sur l'axe : symétrie  
 $\implies$  seul  $E_x \neq 0$



$$dE_x = \frac{\rho dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\psi$$

$$\begin{aligned}
 E_O &= \int_l dE_x = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_l \cos\psi \frac{1}{r^2} dl \\
 &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \cos\psi \frac{\cos^2\psi}{D^2} D \operatorname{tg}\psi d\varphi \\
 &= \frac{\rho \sin\psi \cos^2\psi}{4\pi\epsilon_0 D} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\rho \sin\psi \cos^2\psi}{2\epsilon_0 D} \\
 &= \frac{\rho r_0 D}{2\epsilon_0 (\sqrt{r_0^2 + D^2})^3} = \frac{QD}{4\pi\epsilon_0 r^3}
 \end{aligned}$$

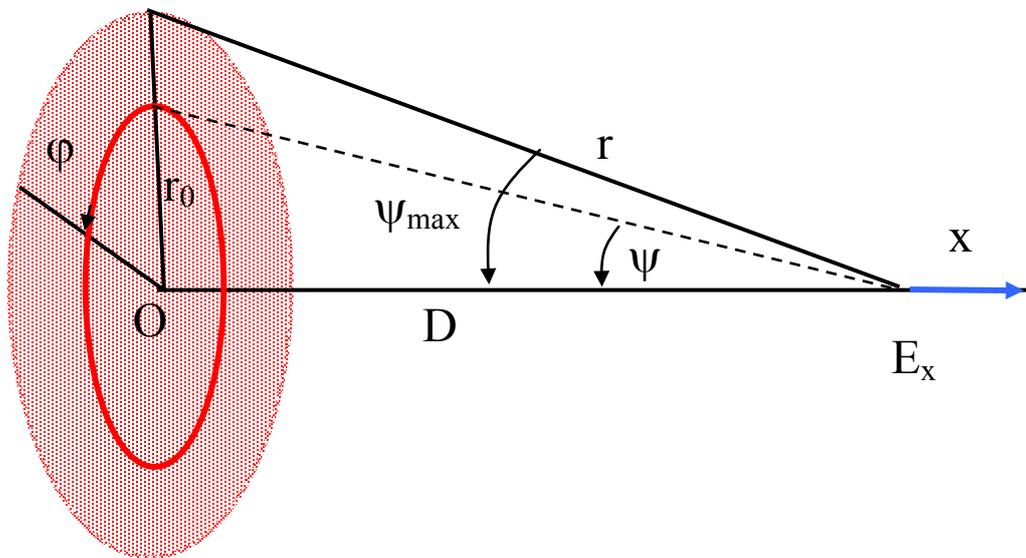
$r = \frac{D}{\cos\psi}$   
 $dl = r_0 d\varphi = D \operatorname{tg}\psi d\varphi$

$Q = 2\pi r_0 \rho$   
 $\sin\psi = \frac{r_0}{r}$   
 $\cos\psi = \frac{D}{r}$

I.  $D \gg r_0 : D \approx r \implies E_O \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  - charge ponctuelle

II.  $D = 0, E = 0$

## Disque



$$r_0 = D \operatorname{tg} \psi \Rightarrow dr_0 = \frac{D}{\cos^2 \psi} d\psi$$

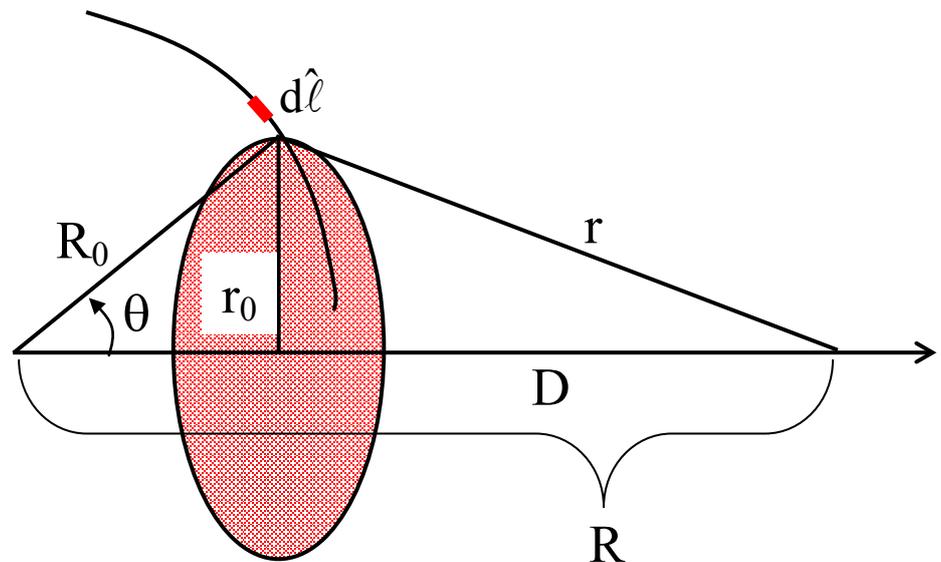
$$\begin{aligned} E_{\bullet} &= \int_0^{r_0} E_O(\tilde{r}_0) d\tilde{r}_0 = \int_{\psi} \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{\sin \psi \cos^2 \psi}{D} \frac{D d\psi}{\cos^2 \psi} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^{\psi_{\max}} \sin \psi d\psi \\ &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} (1 - \cos \psi_{\max}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{D}{\sqrt{r_0^2 + D^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{I. } \left\{ \begin{array}{l} D \rightarrow 0 \\ \text{ou} \\ r_0 \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow E_{\bullet} \rightarrow \frac{\rho}{2\epsilon_0} \quad (\text{plan infini})$$

II.  $r_0 \rightarrow 0$ , mais  $Q = \pi r_0^2 = \text{cte}$  :

$$E_{\bullet} = \frac{Q}{2\epsilon_0 r_0^2} \left( 1 - \frac{D}{\sqrt{r_0^2 + D^2}} \right) \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D^2} \quad (\text{charge ponctuelle})$$

### Sphère : charge surfacique uniforme



$$E_{\text{sph}} = \int_S E_O d\hat{\ell} = \int_0^\pi E_O R_0 d\theta = \int_0^\pi \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{r_0 D}{r^3} R_0 d\theta$$

( $d\hat{\ell} = R_0 d\theta$ )

Changement d'intégration en fonction de r :

$$1. \quad D = r \cos \psi = r \frac{R^2 + r^2 - R_0^2}{2Rr} = \frac{R^2 + r^2 - R_0^2}{2R}$$

$$2. \quad \cos \theta = \frac{R_0^2 + R^2 - r^2}{2RR_0} \Rightarrow \sin \theta d\theta = -d \cos \theta = \frac{r}{RR_0} dr$$

$$3. \quad r_0 = R_0 \sin \theta$$

$$E_{\text{sph}} = \int_0^\pi \frac{\rho}{2\epsilon_0} r_0 \frac{D}{r^3} R_0 d\theta = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_r R_0 \sin \theta \frac{R^2 + r^2 - R_0^2}{2R} \frac{1}{r^3} R_0 \frac{r}{\sin \theta R R_0} dr$$

A l'extérieur ( $R > R_0$ ) :

$$\begin{aligned}
 E_{\text{sph}} &= \frac{\rho}{4\epsilon_0} \frac{R_0}{R^2} \int_{R-R_0}^{R+R_0} \frac{r^2 + R^2 - R_0^2}{r^2} dr = \frac{\rho}{4\epsilon_0} \frac{R_0}{R^2} \int_{R-R_0}^{R+R_0} \left( 1 + \frac{R^2 - R_0^2}{r^2} \right) dr \\
 &= \frac{\rho}{4\epsilon_0} \frac{R_0}{R^2} \left( R + R_0 - R + R_0 - \frac{R^2 - R_0^2}{R + R_0} + \frac{R^2 - R_0^2}{R - R_0} \right) \\
 &= \frac{\rho}{4\epsilon_0} \frac{R_0}{R^2} (2R_0 - R + R_0 + R + R_0) \\
 &= \frac{\rho R_0^2}{\epsilon_0 R^2} = \frac{4\pi\rho R_0^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} : \text{comme si la charge est dans le}
 \end{aligned}$$

centre

A l'intérieur ( $R < R_0$ ) :

$$\begin{aligned}
 E_{\text{sph}} &= \frac{\rho}{4\epsilon_0} \frac{R_0}{R^2} \int_{R_0-R}^{R+R_0} \frac{r^2 + R^2 - R_0^2}{r^2} dr = \frac{\rho}{4\epsilon_0} \frac{R_0}{R^2} \int_{R_0-R}^{R+R_0} \left( 1 + \frac{R^2 - R_0^2}{r^2} \right) dr \\
 &= \frac{\rho}{4\epsilon_0} \frac{R_0}{R^2} \left( R + R_0 - R_0 + R - \frac{R^2 - R_0^2}{R + R_0} + \frac{R_0^2 - R^2}{R - R_0} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Remarques :

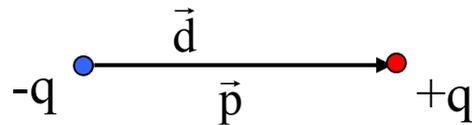
1. A l'intérieur de la sphère le champ est zéro !
2. Le champ d'une sphère ayant une distribution de charge volumique radiale ( $\rho_V = \rho_V(r)$ ) peut être calculé par intégration sur  $r$  du champ des charges surfaciques de chaque sphère : le même résultat est obtenu à l'extérieur.

## Dipôle électrostatique

**Définition** : L'ensemble de deux charges ponctuelles opposées (+q et -q) à une distance d

- **charge** de dipôle : q  
(attn ! charge totale : zéro !)

- **moment** dipolaire :



$$\vec{p} = q\vec{d} \equiv q\vec{r}_{+-}$$

- **unité** : [Cm], [D] (Debye) :  $1D = \frac{1}{3}10^{-29} \text{ Cm}$

- **types** :

permanent	induit	mixte
-----------	--------	-------

$$d = \text{cte}$$

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_{\text{externe}}$$

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \alpha \vec{E}_{\text{externe}}$$

$$\vec{p} = \vec{p}_0$$

Les atomes et les molécules ont des charges positives et négatives. Si les centres des charges coïncident (e.g., les molécules symétriques),  $\vec{p}_0 = 0$ . Un champ externe 'tire' les charges différentes dans les directions opposées, les forces intramoléculaire s'opposent. Pour le nouvel équilibre, les centres des charges positives et négatives sont déplacés et un dipôle induit est créé, proportionnel au champ externe. La constante de proportionnalité  $\alpha$  s'appelle **polarisabilité** du milieu.

Si  $\vec{p}_0 \neq 0$  (l'eau) : deux cas en absence de champ externe

- **désordre** chaotique (liquides, milieux amorphes, polycristaux)

$$\vec{p}_{0,\text{total}} = 0$$

- **ordre** partiel : segnetoélectriques (ferroélectriques) – cristaux ayant un dipôle naturel

Dans champ externe : deux cas

- les dipôles permanents ne bougent pas :  $\vec{p}_{0,\text{total}} = \text{cte}$

- les dipôles sont alignés partiellement parallèlement au  $\vec{E}_{\text{externe}}$

$$\Rightarrow \vec{p} = \vec{p}_0 + \alpha \vec{E}_{\text{externe}}$$

## Champ d'un dipôle électrostatique

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \vec{r} \left( \frac{1}{r_+^3} - \frac{1}{r_-^3} \right) - \frac{\vec{d}}{2} \left( \frac{1}{r_+^3} + \frac{1}{r_-^3} \right) \right]$$

en utilisant  $\vec{r}_\pm = \vec{r} \mp \frac{1}{2}\vec{d}$ .

$$r_\pm^2 = r^2 \mp 2rd \cos\theta + d^2$$

$$r_\pm^{-3} = (r_\pm^2)^{-3/2} \approx (r^2)^{-3/2} \mp (-3/2)(r^2)^{-3/2-1} 2rd \cos\theta \quad , \quad d \ll r$$

$$= r^{-3} \pm 3r^{-4}d \cos\theta$$

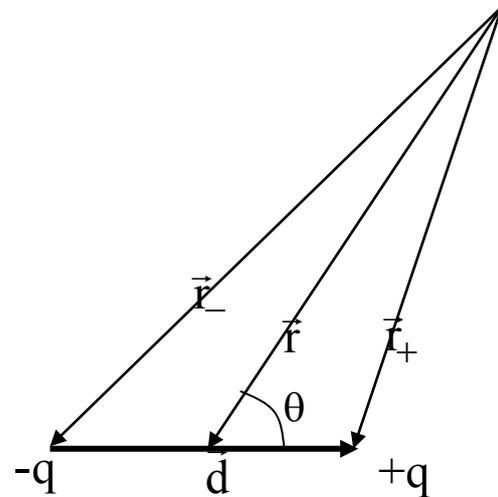
$$\frac{1}{r_+^3} + \frac{1}{r_-^3} \approx \frac{2}{r^3}, \quad \frac{1}{r_+^3} - \frac{1}{r_-^3} \approx \frac{6d \cos\theta}{r^4}$$

$$\vec{E} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \vec{r} \frac{3d \cos\theta}{r^4} - \frac{\vec{d}}{2} \frac{2}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3p \cos\theta \hat{r} - \vec{p})$$

NB Soit deux charges identiques (+, +) :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{r}_+}{r_+^3} + \frac{\vec{r}_-}{r_-^3} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \vec{r} \left( \frac{1}{r_+^3} + \frac{1}{r_-^3} \right) - \frac{\vec{d}}{2} \left( \frac{1}{r_+^3} - \frac{1}{r_-^3} \right) \right]$$

$$= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_0}{r^2} : \text{ le champ de charge ponctuelle de } 2q$$



## Dipôle électrostatique

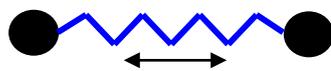
Observations :

1. Champ décroît comme  $\frac{1}{r^3}$  : plus vite que le champ d'une charge (le charge totale du dipôle est zéro)
2. Symétrie axiale
3. Sur l'axe à l'extérieur :  $\cos\theta=1 \Rightarrow \vec{E} = \frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$  :  $\vec{E} \uparrow \uparrow \vec{p}$
4. Dans le plan transverse :  $\cos\theta = 0$  :  $\vec{E} \uparrow \downarrow \vec{p}$
5. Très proche d'une charge : comme pour la charge isolée

Positions principales de Gauss :  $\vec{E} // \vec{p}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{l'axe} \\ \text{plan transverse} \end{array} \right.$

**Très important :**

- pour la polarisation de milieux
- les dipôles induits sont comme les oscillateurs mécaniques



oscillations  $\longrightarrow$  ondes électromagnétiques

- en magnétisme : les charges de base sont des dipôles magnétiques

## Champ de deux charges identiques

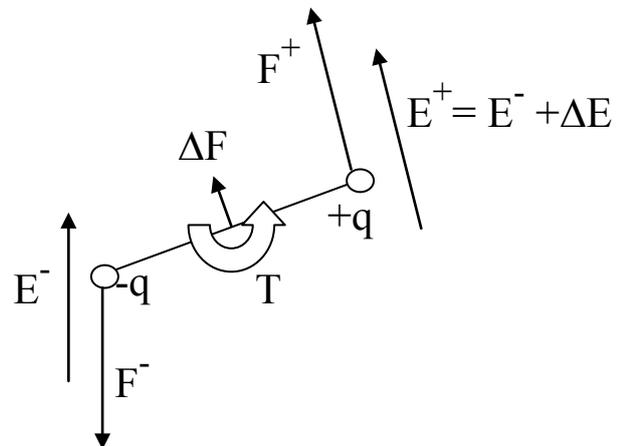
Observations :

1. Distance large ou très faible : comme une charge isolée
2. Dans le plan transverse :  $\vec{E} \perp$  ligne de charges
3. Exactement entre les deux charges  $E = 0$  (mais c'est un équilibre instable)

## Dipôle dans un champ électrostatique externe

$$\vec{F}^- = -q\vec{E}^-$$

$$\vec{F}^+ = +q(\vec{E}^- + \Delta\vec{E})$$



### 1. Force résultante générale :

$$\Delta\vec{F} = \vec{F}^+ + \vec{F}^- = q\Delta\vec{E}, \quad \text{pour un champ } E \text{ uniforme } \Delta\vec{F} = 0$$

$$\Delta\vec{F} \xrightarrow{d \rightarrow 0} d\vec{F} = q d\vec{E} = q \left( dx \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + dy \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + dz \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \left( \frac{\partial E_x}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x}, \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

$$\text{mais } q(dx, dy, dz) = \vec{p}$$

$$\boxed{d\vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E}}, \quad \nabla \vec{E} \text{ est tensor de rang 2 (représenté comme une matrice carré)}$$

### 2. Force du couple (**moment de torsion**) :

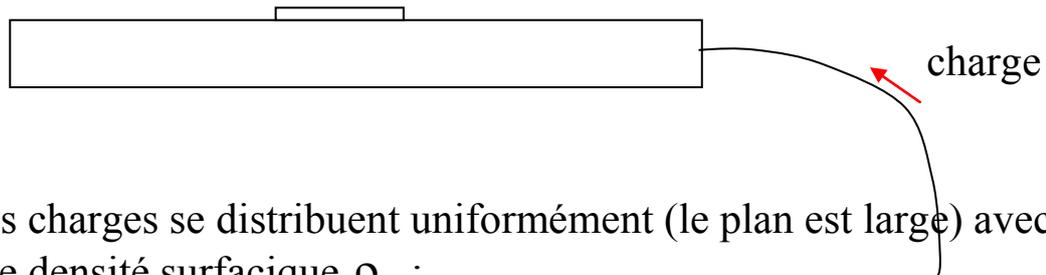
$$\vec{T} = \vec{d} \wedge \vec{F} = \vec{d}q \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E} \quad (\text{produit vectoriel de deux vecteurs})$$

$T = 0$  si  $\vec{p} \parallel \vec{E}$  le moment de torsion 'tire' le dipôle pour l'aligner avec le champ externe

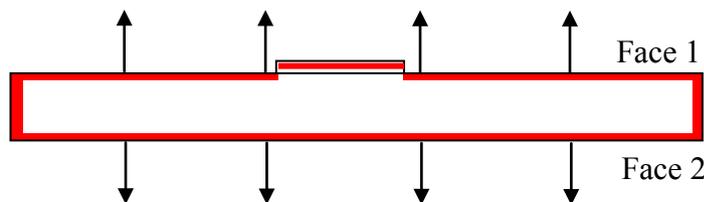
## Pression électrostatique

**Problème 1** : Petit disque sur un plan conducteur ; en augmentant de la charge du plan, il existe une charge critique au-dessus de laquelle le disque se soulève brusquement. Pourquoi ?

1. Le plan et le disque sont chargés :



2. Les charges se distribuent uniformément (le plan est large) avec une densité surfacique  $\rho_s$  :



Les charges sur face 1 n'exercent aucune force sur les charges du disque :

- Les composantes horizontales s'annulent ;
- Il n'y a pas de composantes verticales (le disque est mince)

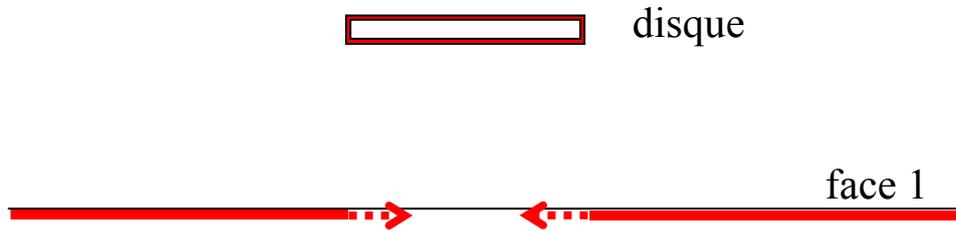
Les charges sur face 2 exercent une force verticale

$$F = \underbrace{\rho_s S}_{\text{charge du disque}} E = \rho_s S \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} ; \quad P = \frac{F}{S} = \frac{\rho_s^2}{2\epsilon_0} : \quad \text{la pression}$$

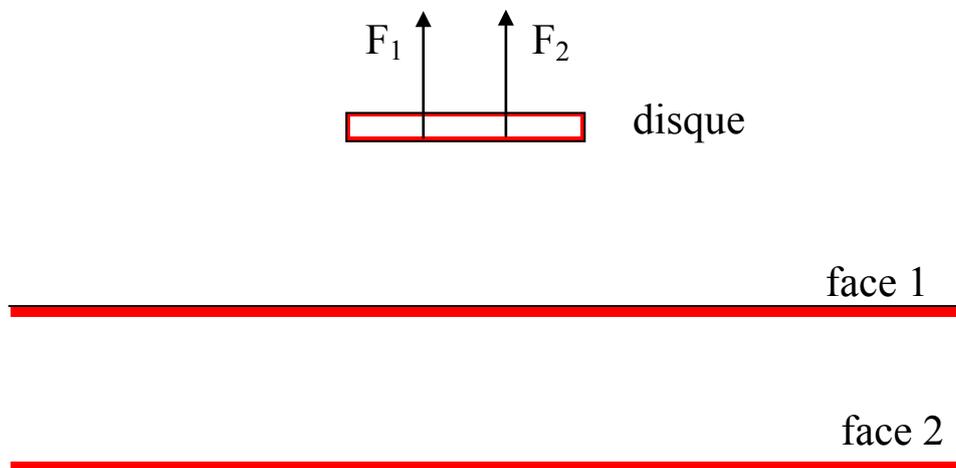
3. Le disque se soulève quand  $\frac{\rho_s^2}{2\epsilon_0} S = mg \Rightarrow \rho_s^2 = 2\epsilon_0 g \frac{m}{S}$ .

La charge totale sur le disque  $q = S\rho_s = \sqrt{2\epsilon_0 gmS}$ .

4. Quand le disque perd contact avec le plan, les charges sur face 1 se précipitent pour occuper la place libérée, repoussées par les autres charges :



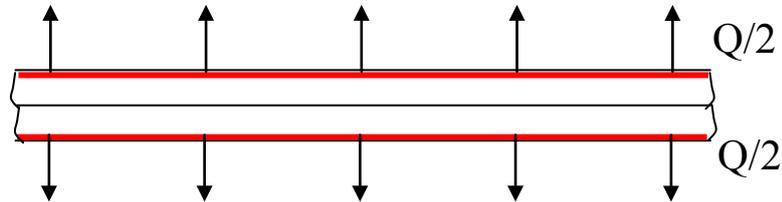
En négligeant l'influence du disque sur la distribution des charges du plan, les charges de disque sont repoussées par deux forces créées par les deux plans charges :



$$F = F_1 + F_2 = q_{\text{disque}} 2E_1 = q_{\text{disque}} \frac{\rho_{\text{plan}}}{\epsilon_0} \text{ (2 fois plus grand !)}$$

**Problème 2** : Deux plans conducteurs : en chargeant des plans, ils se séparent, mais doucement

$$E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} = \frac{Q/2}{2\epsilon_0 S}$$



chaque plan exerce une force sur l'autre, avec une pression électrostatique :

$$P_E = \frac{F}{S} = \frac{(Q/2)E}{S} = \rho_s \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} ; \quad F = \frac{\rho_s^2}{2\epsilon_0} S = \frac{Q^2}{8\epsilon_0 S}$$

la pression gravitationnelle : 
$$P_G = \frac{mg}{S}$$

Les plans se séparent quand

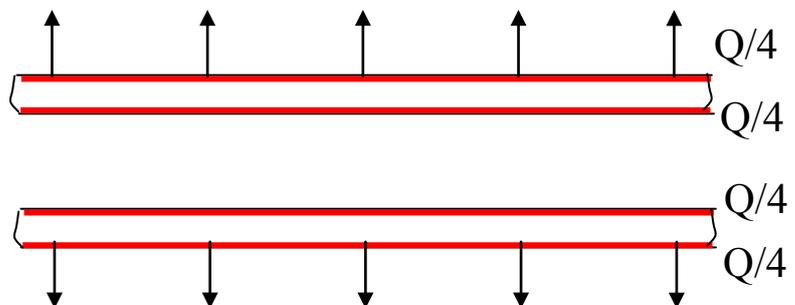
$$P_E = P_G \quad \Leftrightarrow \quad \frac{mg}{S} = \frac{Q^2}{8\epsilon_0 S^2} \quad \Rightarrow \quad Q = \sqrt{8\epsilon_0 S mg}$$

Après la séparation des plans des charges se redistribuent, mais la force ne change pas (les quantités avec tilde – après la séparation) :

$$\tilde{F} = \left( \frac{Q}{4} + \frac{Q}{4} \right) \tilde{E}$$

$$= \frac{Q}{2} 2 \frac{\tilde{\rho}_s}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2} \frac{S}{\epsilon_0} \frac{Q/4}{S}$$

$$= \frac{Q^2}{8\epsilon_0 S} = F$$



**Problème 3** : Une sphère et un disque, ayant un degré de liberté :

En chargeant la sphère, le disque se soulève, mais il s'arrête dans une position équilibrée, qui dépend de la charge de la sphère.

$r > R$  :

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$F_E = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$F_G = mg$$

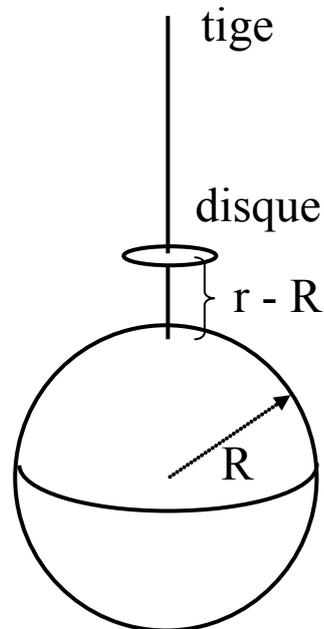
en équilibre :

$$mg = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow r^2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 mg} ;$$

si  $r < R$ , le disque reste sur la sphère ; quand  $r = R$ , il commence à se soulever :

$r = R$  :

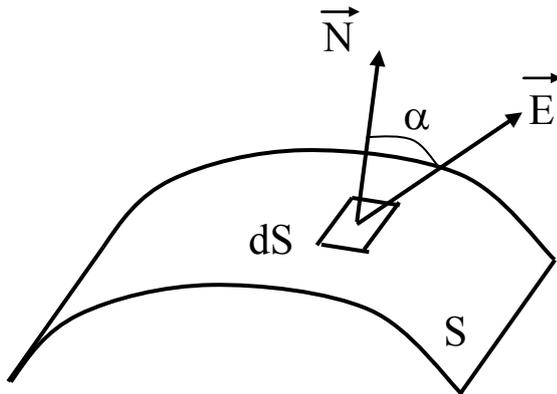
$$E = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2} \quad F_E = \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 R^2}$$



## Flux du champ électrostatique

Flux (def. générale) la quantité de qqch. à travers une surface  
 $\implies$  Le flux parallèle à une surface est nul

Le flux élémentaire d'un vecteur  $\vec{E}$  à travers  
 d'une surface élémentaire  $dS$  :



$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{N}_S dS \quad [\text{Vm}]$$

$$= E \cos \alpha dS$$

$\vec{N}_S$  - la normale de  $dS$   
 (le signe - convention,  
 mais attn. - continuité)

surface fermée :

$\vec{N}_S$  vers l'extérieur

Observations :

1.  $d\Phi$  (et  $\Phi$ ) : scalaire (i.e., un nombre !)

2.  $\Phi = E_{\perp S} dS = E dS_{\perp E}$

3.  $\vec{E} // S \implies \Phi = 0$

4. E et S sont additifs  $\implies \Phi$  est additif

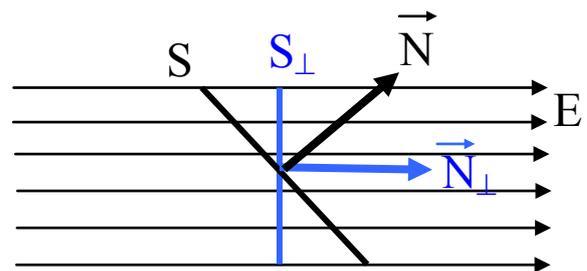
$$\left[ \begin{array}{l} \Phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{N} dS \\ \Phi_{\Sigma} = \sum_j \vec{E}_j \cdot \vec{N} dS = \sum_j \Phi_j \end{array} \right.$$

e.g. champ uniforme

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{N}_S dS = E dS \cos \alpha$$

$$= E dS_{\perp}$$

(pour S inclinée  $\cos \alpha < 1$ ,  
 mais  $S > S_{\perp}$ )



## Flux du champ d'une charge ponctuelle

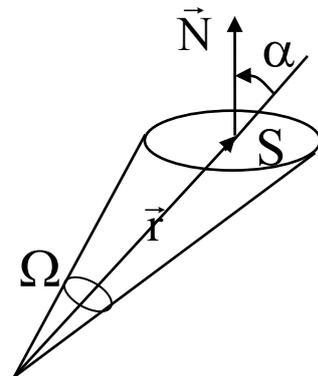
$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{dS \cos \alpha}{r^2} ;$$

$$\frac{dS \cos \alpha}{r^2} = d\Omega - \text{l'angle solide sous lequel on voit } dS \text{ de point } \vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q d\Omega$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

$\Phi$  dépend seulement de l'angle solide et non de la surface !



Donc  $\Phi$  est le même pour toutes les surfaces ayant  $\Omega$  constant

Explication :

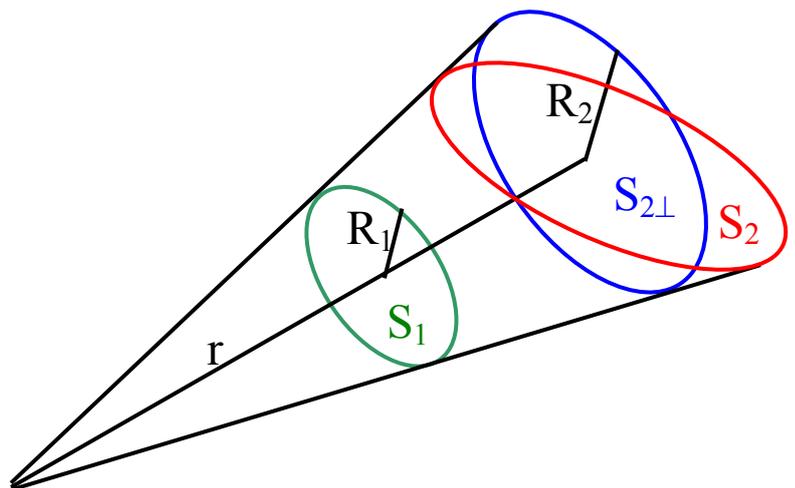
$$1. \Phi_2 = \Phi_{2\perp}$$

$$2. S_{2\perp} \propto R_2^2 \propto r_2^2 ;$$

$$S_1 \propto R_1^2 \propto r_1^2$$

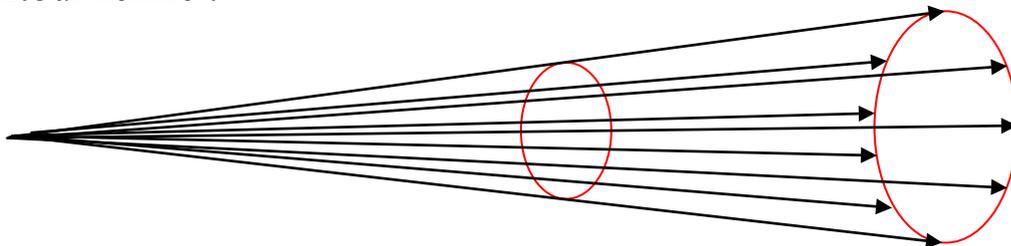
$$3. E \propto \frac{1}{R^2}$$

$$\Rightarrow E S_{\perp} = \text{cte}$$



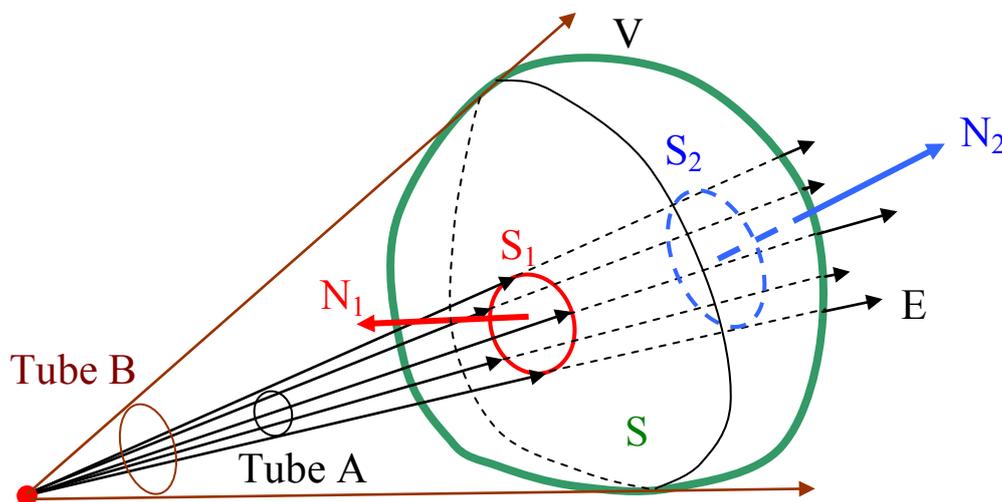
## Surfaces fermées

**Tube** des lignes de champ : l'ensemble des lignes qui s'appuient sur un contour fermé :



$\vec{N}_S$  vers l'extérieur

L'intersection du tube et d'une surface fermée : deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$



I. Charge à l'extérieur :  $\Phi_{S_1} < 0, \Phi_{S_2} > 0$  ; même tube :  $|\Phi_{S_1}| = |\Phi_{S_2}|$

$$\Phi_{\text{tube A}} = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = 0 \quad \text{pour } \forall \text{ tube,}$$

Vrai pour tube B, ayant support S, la coupe transversale de V

II. Charge à l'intérieur :

L'angle solide de la sphère à l'intérieur  $\Omega_{\text{total}} = 4\pi$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{donc } 4\pi \text{ dans la constante de Coulomb})$$

## Théorème de Gauss

Généralisation de  $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$  pour un système général de charges:

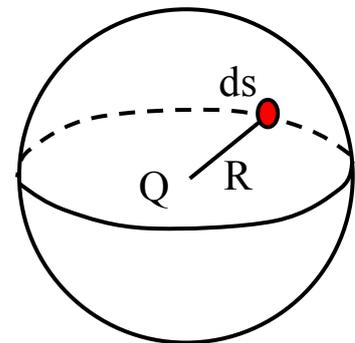
$\Phi$  est additif, donc pour un ensemble de charges  $\{q_j\}$ :

$$\Phi_S = \sum_j \Phi_{S,j} = \sum_{j \in V_S} \Phi_{S,j} + \sum_{j \notin V_S} \Phi_{S,j} = \sum_{j \in V_S} \Phi_{S,j} = \frac{\sum_{j \in V_S} q_j}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{int érne}}}{\epsilon_0}$$

Le flux total de vecteur de champ électrostatique sortant d'une surface fermée est égal au quotient par  $\epsilon_0$  de la somme de charges électriques situées à l'intérieur.

Preuve direct à partir de la loi de Coulomb pour une sphère chargée uniformément :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{N} ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \iint_S ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



Observations :

1.  $Q_V = 0 \Leftrightarrow \Phi_S = 0$
2.  $\Phi_S$  ne dépend de la configuration de charges ni à l'intérieur ni à l'extérieur
3. A l'intérieur d'une sphère avec des charges surfaciques uniformes

$\vec{E} \equiv 0$  : Soit  $S_R$  avec le même centre et  $r < R \Rightarrow \Phi = 0$

Symétrie radiale  $\Rightarrow \vec{E}$  radial  $\Rightarrow \Phi = |\vec{E}| \iint_{S_R} ds = 4\pi r^2 |\vec{E}| \Rightarrow E = 0$

## L'importance du théorème de Gauss

1. Il représente une forme intégrale d'une d'équations de Maxwell (on verra plus tard)
2. Il est très utile pour déterminer le champ pour les systèmes ayant une symétrie élevée.

Exemple 1 : Champ d'une **sphère chargée uniformément** (TD)

Symétrie radiale:  $\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \parallel \vec{R} \\ \vec{E} = \vec{E}(R) \end{array} \right.$

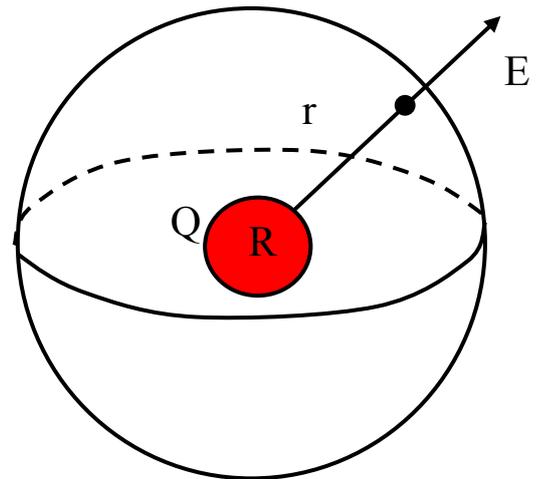
Gauss :  $\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$

Def :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{N} ds = E(r) \iint_S ds = 4\pi r^2 E$$

Donc

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{--- Charges surfaciques uniformes} \\ \text{--- Charges volumiques uniformes} \end{array} \right.$$



En fait, il suffit d'avoir une distribution radiale de charges  $\rho_v = \rho_v(r)$  pour préserver la symétrie radiale

Champ à l'intérieur :  $r < R$

I. Charge surfacique :  $\vec{E} \equiv 0$  (déjà fait)

II. Charge volumique uniforme :  $\Phi = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} = \frac{Q(R)r^3}{\epsilon_0 R^3} = \frac{Q_{\text{totale}} r^3}{\epsilon_0 R^3}$

$$\Phi = 4\pi r^2 E \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{totale}}}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \quad \text{--- dépendance de r linéaire}$$

$$E(r=R) = \frac{Q_{\text{totale}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} \equiv E_{\text{extérieur}}(R)$$

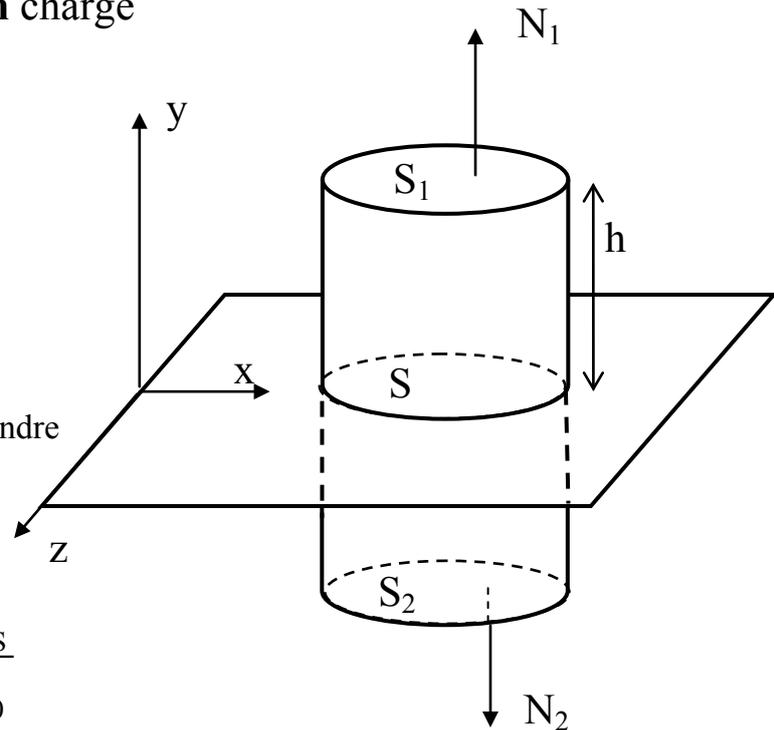
Exemple 3 : Champ d'un **plan** chargé

$$\text{Symétrie : } \begin{cases} E \perp S \\ \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \\ E^+ = -E^- \end{cases}$$

$$\text{Gauss : } \frac{\rho_s S}{\epsilon_0} = \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{\text{cylindre}}$$

$$\text{Def : } = 2\Phi_1 = 2E^+(h)S$$

$$\implies E^+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \implies \Delta E_N = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$$

Exemple 2 : Champ d'un **fil** chargé

$$E \perp x$$

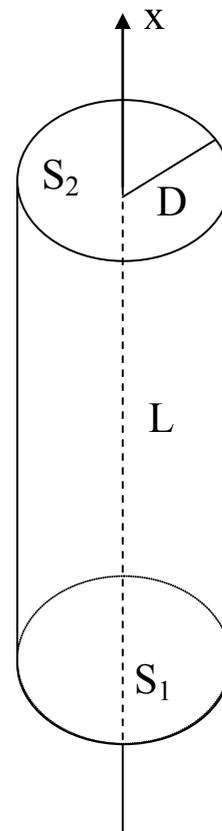
$$\text{Symétrie : } \frac{\partial E}{\partial x} = 0$$

$$E = E(r)$$

$$\text{Gauss : } \frac{\rho_\ell L}{\epsilon_0} = \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{\text{cylindre}}$$

$$\text{Def. } = \Phi_{\text{cylindre}} = E 2\pi D L$$

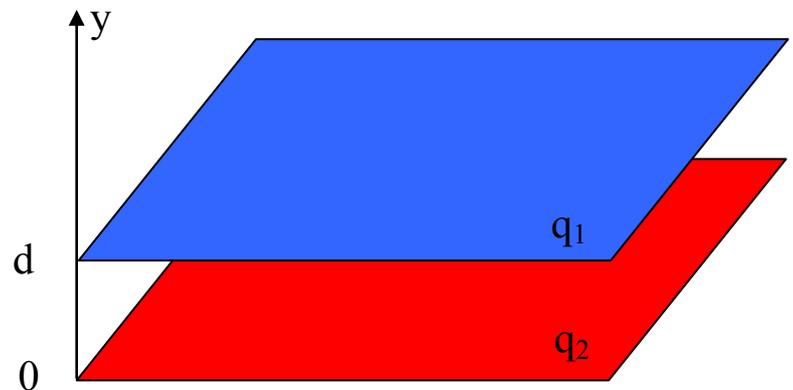
$$\implies E = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0 D}$$



Exemple 4 : Champ de **deux plans** parallèles

$$E_1 = \begin{cases} +\frac{q_1}{2\epsilon_0} & y > d \\ -\frac{q_1}{2\epsilon_0} & y < d \end{cases}$$

$$E_2 = \begin{cases} +\frac{q_2}{2\epsilon_0} & y > 0 \\ -\frac{q_2}{2\epsilon_0} & y < 0 \end{cases}$$



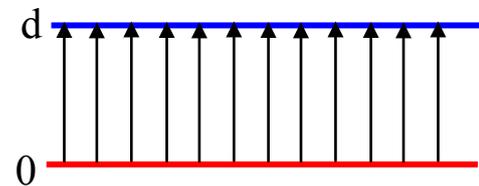
Condensateur :

$$q_1 = -q_2 = -q$$

$$y > d : \quad E = \frac{q_1 + q_2}{2\epsilon_0} \quad E = 0$$

$$0 < y < d : \quad E = -\frac{q_1 - q_2}{2\epsilon_0} \quad E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$y < 0 : \quad E = -\frac{q_1 + q_2}{2\epsilon_0} \quad E = 0$$



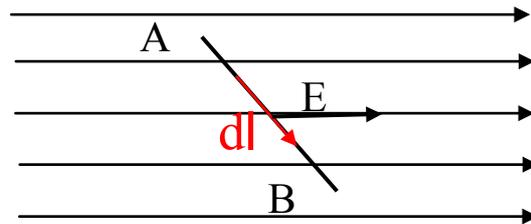
## Energie et potentiel du champ électrostatique

Charges actives  $\longrightarrow$  champ  $\longrightarrow$  force  $\xrightarrow{\text{maintenant}}$  travail

Soit  $\vec{E}$  **homogène** (= cte). Le **travail**  $\Delta W$  nécessaire pour déplacer une charge  $q_0$  entre les points A et B, est :

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \vec{L}_{AB} = q_0 \vec{E} \cdot \Delta \vec{\ell} .$$

$$(dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell})$$



Inversement, le travail effectué contre le champ a le signe opposé. Le travail fait par le champ par charge unitaire s'appelle **différence de potentiel** entre B et A (le travail nécessaire pour déplacer une charge négative unitaire) :

$$\Delta V = V_B - V_A = -\frac{\Delta W_{BA}}{q_0} = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{\ell} \quad \left[ \frac{\text{J}}{\text{C}} \equiv \text{V} \right] .$$

### Remarques :

1.  $1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19} [\text{CV}=\text{J}]$  l'énergie gagnée par l'électron quand il se déplace de 1m dans champ de 1 V
2. V s'appelle **potentiel** du champ sur un point et est défini à une constante près, car ce qui compte sont les différences de potentiel
3. Convention de signe : le signe  $-$  signifie que si une charge  $+$  se déplace contre E son énergie augmente et  $\Delta V > 0$ .  
Donc, les lignes de champ pointent en direction de la diminution de potentiel (les lignes sont dans le sens de potentiel décroissant).
4. Déplacement à travers le champ ne fait pas de travail, équivalent au déplacement horizontal dans le champ gravitationnel. Donc, sur les surfaces  $S \perp \vec{E} \implies V = \text{cte}$  :  
Ces sont des surfaces **équipotentielles**.  
(et elles sont perpendiculaires aux lignes du champ)

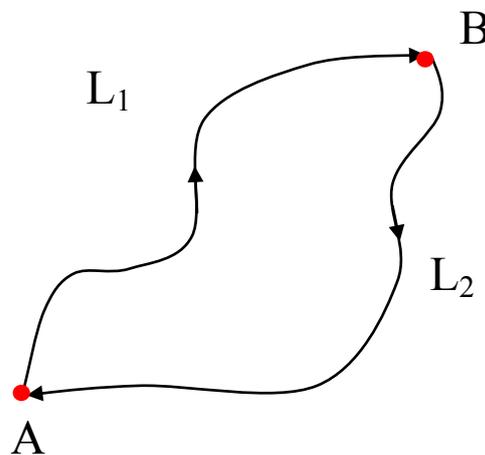
Cas général : **champ non-uniforme**
 $\Delta \vec{L} \Rightarrow d\vec{\ell} \rightarrow 0 : E \text{ est uniforme sur } d\vec{\ell}$ 

$$W_{BA} = \int_A^B dW = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \implies V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Remarque : le champ électrostatique est **conservatif** – le travail ne dépend pas du chemin

Champ conservatif

Champ non-conservatif



$$W_{BA(L_1)} = W_{BA(L_2)}$$

$$W_{BA(L_1)} \neq W_{BA(L_2)}$$

$$W_{BA} + W_{AB} = 0$$

$$W_{BA} + W_{AB} \neq 0$$

pour  $\forall$  chemin

l'énergie sur A n'est pas la même après un aller- retour (e.g. friction)

Preuve pour une région de champ uniforme :

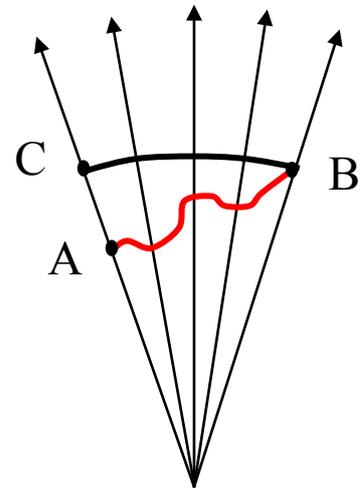
$$W_{BA} = \int_A^B dW = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q_0 \int_A^B E d\ell = q_0 E \int_A^B d\ell = q_0 E AB = q_0 \vec{E} \cdot A\vec{B}$$

## Potentiel d'une charge ponctuelle

$$W_L = W_{L\parallel} + \cancel{W_{L\perp}} = W_{L\parallel}$$

$$\begin{aligned} V_B - V_A &= -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_A^C E dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_A} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \end{aligned}$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \text{cte}$$



convention Coulombienne :

$$V(\infty) = 0 \Leftrightarrow \text{cte} = 0: \text{l'énergie à l'infini est } 0$$

**L'énergie potentielle** : l'énergie obtenue en déplaçant une charge passive  $q_0$  de  $r$  au point avec potentiel zéro :

$$U(r) = q_0 V(r) \stackrel{\text{charge ponctuelle}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r}$$

**Relation différentielle :**  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

1.  $dV$  – différentielle totale d'une fonction scalaire de trois variables,

$$\text{donc } dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$\text{Notations : } \vec{\text{grad}}V \equiv \vec{\nabla}V \equiv \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

$$2. d\vec{\ell} = (dx, dy, dz) \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

3.  $x, y$  et  $z$  sont indépendantes

donc  $\boxed{\vec{\text{grad}}V = -\vec{E}}$

avantage :  $V$  scalaire et  $E$  est obtenu par différentiation

Qqch. d'utile :  $\boxed{\vec{N}_S = \vec{\text{grad}}S}$

$S(x,y,z) = \text{cte}$  : l'équation de surface  $S$

$\vec{N}_S$  : le vecteur normal à  $S$

$S(\vec{r}) = c^{\text{te}} \Rightarrow dS = 0$  : l'équation de la surface  $S$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz = \vec{\text{grad}}S \cdot d\vec{r}$$

$\Rightarrow \vec{\text{grad}}S \cdot d\vec{r}_S = 0$  pour les déplacements  $d\vec{r}_S$  parallèlement à la surface

$$\Rightarrow \vec{\text{grad}}S \perp \vec{r}_S$$

surfaces équipotentielles :  $V = \text{cte}$  ;  $\vec{\text{grad}}V = -\vec{E}$ , donc

$\vec{E} \perp V_{\text{cte}}$  : sens physique – l'énergie potentielle ne change pas en se déplaçant à travers du champ

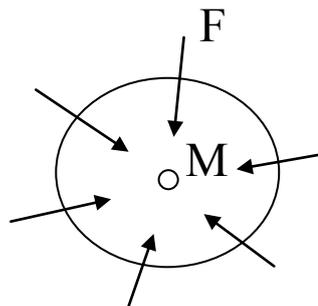
**Extremum** du potentiel : Si  $V$  a un extremum sur  $M$ ,  $M$  est chargé.

Supposons que  $V$  a un minimum. Sur chaque point d'une petite surface  $S$  autour de  $M$  :  $V_S > V_M$ , donc toutes les lignes de champ se dirigent vers l'intérieur et par application du théorème de Gauss à l'intérieur de  $S$  il y a une charge négative. En prenant la limite  $S \rightarrow 0$ , la charge se situe sur  $M$ . Inversement, l'existence d'une charge positive sera signalée par un maximum.

Conséquence : L'équilibre stable d'une charge dans un champ électrostatique n'est pas possible !

L'équilibre stable nécessite que le potentiel a un minimum local : tous les petits déplacements doivent 'tirer' la charge vers la position de l'équilibre stable, donc pour une charge positive toutes les lignes du champ créé par des autres charges doivent pointer vers l'intérieur, donc le potentiel a un minimum, donc il existe une autre charge dans cette position !

Un point d'équilibre  $M$  : toutes les forces  $F$  doivent pointer à l'intérieur



Donc, par conséquence du théorème de Gauss  $\Phi_S \neq 0$ ,  
 $S$  – arbitraire autour  $M$ .

$S \rightarrow 0 \Rightarrow M$  est chargé !

Donc, les points d'espace sans charges ne peuvent pas être des position d'équilibre stable.

**La preuve générale que le champ électrostatique est conservatif**

$$\vec{E} = -\text{grad}V$$

$$W_{BA} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}_L = -\int_A^B \text{grad}V \cdot d\vec{\ell}_L = -\int_A^B dV = -V(B) + V(A)$$

donc  $W_{BA}$  ne dépend pas du chemin

## Potentiel d'une distribution (discrète ou continue) des charges

I. Voie **directe** : par sommation ou intégration (plus facile que E : V est scalaire !)

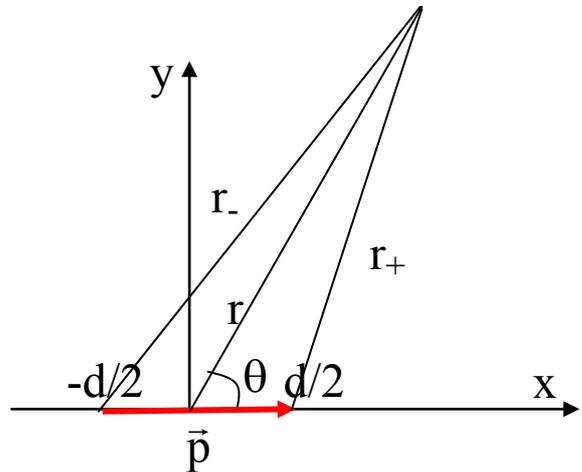
II. Depuis E :  $\vec{\text{grad}}V = -\vec{E}$

III. Depuis  $\rho$  : plus tard

Exemple: **dipôle** électrostatique

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_- r_+}$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



Attention : V écrit comme ça est une fonction de r et  $\theta$ .

Dans le système des coordonnées sphériques :  $\vec{\nabla} = \vec{r} \frac{\partial}{\partial r} + \vec{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$

Donc :  $E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ ,  $E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

Lignes de champ :

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta} = 2 \frac{d \sin \theta}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow r = C \sin^2 \theta$$

Surfaces équipotentiels :

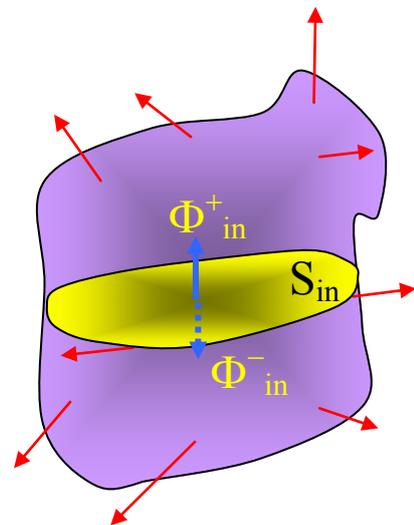
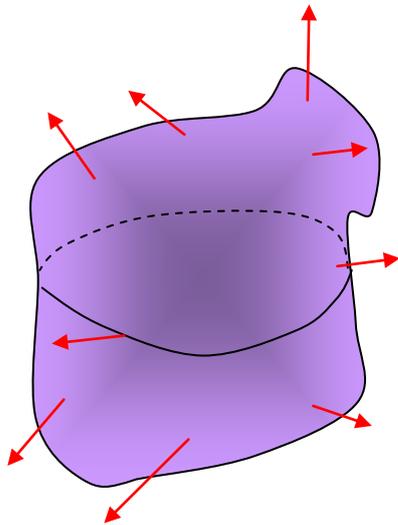
$$V = \text{cte}$$

$$\Rightarrow r^2 = C \cos \theta$$

Observations pour les surfaces équipotentielles:

1. Surfaces sont fermées
2. Ne se croisent pas ( $V$  – unique)
3. A côté des charges : sphère

## Théorème d'Ostrogradski et la présentation différentielle du théorème de Gauss



$F(x,y,z)$  – une fonction vecteur

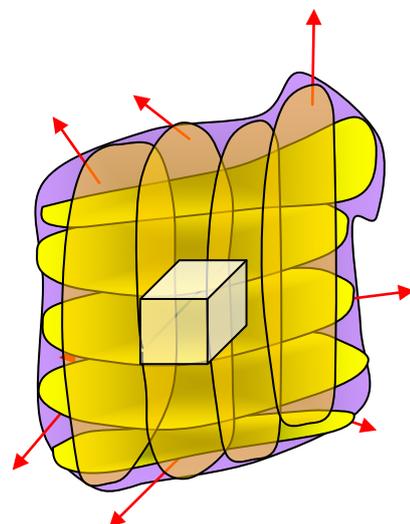
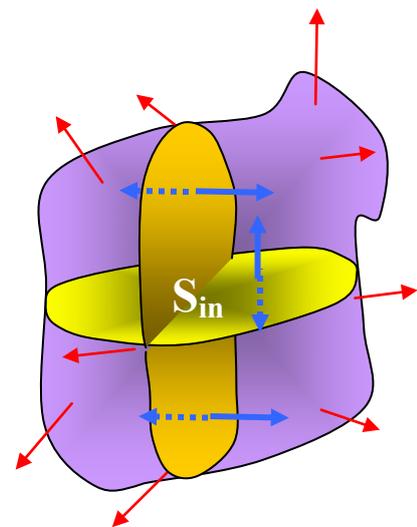
$$\Phi = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\Phi_{in}^+ = -\Phi_{in}^-$$

$$\sum_{j=1}^N \oint_{S_j} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Phi$$

$$\Phi_j = \oint_{S_j} \vec{F} \cdot d\vec{s} \xrightarrow{V_j \rightarrow 0} ?$$

On vera que la limite existe et est proportionnelle à  $V_j$  :



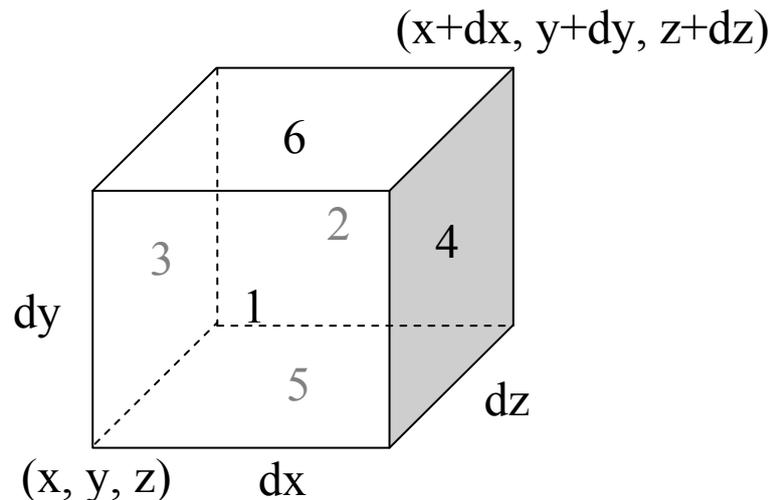
$$(ds \propto r^2, \Delta F \propto rdF/dr, V \propto r^3)$$

$$\text{def.} \quad \text{div} \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_V \vec{F} \cdot d\vec{s}}{V} \quad (\text{si elle existe}).$$

Coordonnées cartésiennes :

faces :

- 1 – en face
- 2 – au fond
- 3 – à gauche
- 4 – à droit
- 5 – en bas
- 6 – en haut



$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 =$$

$$\approx F_z(x, y, z) dx dy - F_z(x, y, z - dz) dx dy$$

$$- F_x(x, y, z) dy dz + F_x(x + dx, y, z) dy dz$$

$$- F_y(x, y, z) dx dz + F_y(x, y + dy, z) dx dz$$

$$F_z \text{ continue : } F_z(x, y, z + dz) \approx F(x, y, z) + dz \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\Phi}{dV} = \frac{\left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dx dy dz}{dx dy dz} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\text{mais } \vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Rightarrow \boxed{\text{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}}$$

$$\Phi \equiv \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \sum_{j=1}^N \oint_{S_j} \vec{F} \cdot d\vec{s} \xleftarrow{V_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \int_{V_j} \text{div} \vec{F} \equiv \int_V \text{div} \vec{F} dV = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV \text{ - théorème d'Ostrogradski-Gauss}$$

Application : Flux de champ électrique

$$\Phi_E \equiv \oint_S \vec{E} \cdot \vec{N} ds = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{Q_V}{\epsilon_0} \quad \text{représentation intégrale de}$$

théorème de Gauss pour le champ électrique

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon_0} \text{ pour chaque } V$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{représentation différentielle}$$

Rappel :  $\vec{E} = -\nabla V$ ,  $V$  – potentiel de champ électrique

$$\Delta V \equiv \nabla^2 V \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{l'équation de Poisson}$$

\ opérateur  
Laplacien

Dans les régions sans charges :  $\Delta V = 0$  - l'équation de Laplace

A partir de représentation intégrale ou différentielle on peut obtenir la loi de Coulomb.

Exemple :

Loi de Coulomb – hypothèse  $V \propto \frac{1}{r^n}$ ,  $n = ?$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r^n} = -n \frac{1}{r^{n+1}} \frac{x}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r^n} = -n \frac{r^{n+2} - x(n+2)r^{n+1} \frac{x}{r}}{(r^{n+2})^2} = -n \frac{1 - (n+2) \frac{x^2}{r^2}}{r^{n+2}}$$

$$\Rightarrow \Delta \frac{1}{r^n} = -n \frac{3 - (n+2)}{r^{n+2}} ;$$

pour que  $\Delta \frac{1}{r^n} = 0$  il faut  $n = 0$  ou  $1$

$n = 1$  – loi de Coulomb

$n = 0$  –  $V = \text{cte}$ ,  $E = 0$

Problème :  
dans le théorème d'Ostrogradski-Gauss F – continue

si

$F_z$  discontinue (e.g. charge surfacique sur le plan x-y) :

$$F_z(x, y, z + dz) \approx F(x, y, z) + J(F_z) + dz \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

(J – saut de  $F_z$ )

$$F_z(x, y, z) dx dy - F_z(x, y, z - dz) dx dy \approx J(F_z) dx dy$$

mais  $J(E_z) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{J(E) dy dz}{dv} = \frac{\rho}{\epsilon_0 dz} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$$

( $\rho_s$  est la charge dans une couche dz)

La mathématique plus sophistiqué :

Charge surfacique

$$E_z = \pm \frac{\rho}{2\epsilon_0} = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} + \frac{\rho}{\epsilon_0} \theta(z) \quad \theta(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1, & z > 0 \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \theta'(z) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \delta(z) \equiv \frac{\rho_s}{\epsilon_0} ;$$

$\delta(z)$  - fonction de Dirac

## L'énergie potentielle électrostatique d'une distribution de charges

Def.  $W$  est l'énergie nécessaire pour apporter des charges situées à l'infinité aux positions associées au système physique étudié (l'énergie propre)

$$1\text{-ème charge : } W_{(1)} = W_{11} = 0$$

$$2\text{-ème charge : } W_{(2)} = W_{21} = q_2 V_1(\vec{r}_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}}$$

$$3\text{-ème charge : } W_{(3)} = W_{31} + W_{32} = q_3 [V_2(\vec{r}_3) + V_1(\vec{r}_3)]$$

.....

$$N\text{-ème charge : } W_{(j)} = \sum_{i=1}^{j-1} W_{ji}$$

Totale :

$$W = \sum_j \sum_{i < j} W_{ji}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_j \left( \sum_{i < j} W_{ji} + W_{ij} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \sum_i W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

$V_i$  est le potentiel créé par toutes les autres charges dans la position de la  $i$ -ème

Distribution **continue** :  $W = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}} \rho V d\mathfrak{R}$  où  $\mathfrak{R}$  est la région des

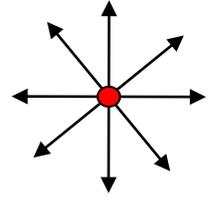
charges (volume, surface, ligne)

## Discontinuité de champ

Dans une région **sans charges** E et V sont **continus** (pourquoi ?)

1. Charge **ponctuelle** : E et V – singuliers ( $\rightarrow \infty$ )

$$E \propto \frac{1}{r^2}, \quad V \propto \frac{1}{r}$$



2. Charge **linéique** :  $E \propto \frac{1}{r}$  : singulier



$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow V = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + C : \text{singularité logarithmique}$$

Remarque 1 :  $C \neq 0$  car à l'infini il y a des charges

Remarque 2 : E et V ont la même singularité pour des charges linéiques non-uniformes et des lignes arbitraires

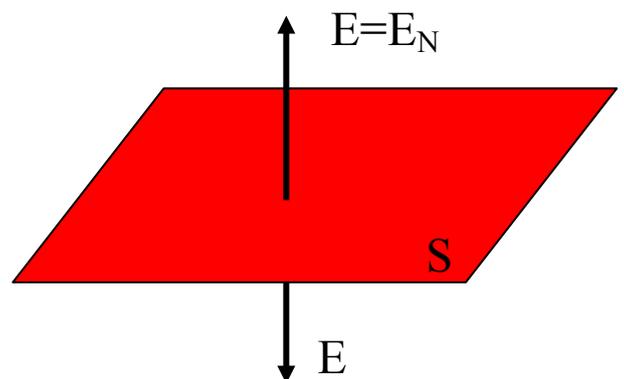
3. Charge **surfaccique** :

Exemple 1 :

Plan chargé uniformément

$$E_T \equiv E_x = 0 \Rightarrow E_T \text{ continu}$$

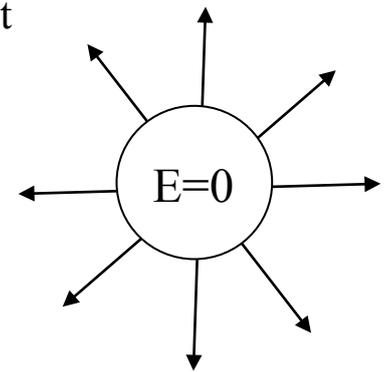
$$E_N \equiv E_y = \begin{cases} +\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}, & y > 0 \\ -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}, & y < 0 \end{cases}$$



$$\Delta E_N \equiv E_N^+ - E_N^- = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

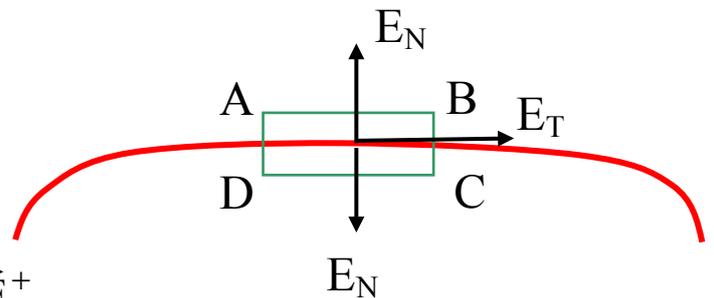
$$V = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} y$$

!  $V(y \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \mp\infty$  et n'est pas nul – la convention Coulombien ne marche pas (il y a des charges à l'infini)

Exemple 2 : Surface sphérique chargée uniformémentA l'intérieur :  $E_N = E_T = 0$ A l'extérieur :  $E_T = 0$ ,  $E_N = E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}$ Donc  $\Delta E_N = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  et  $\Delta E_T = 0$ Cas général :

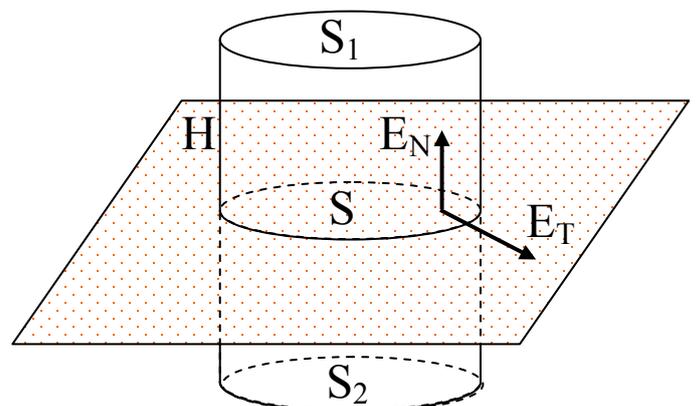
$$W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = 0$$

Si  $AB$  et  $CD \rightarrow 0$ ,  $\vec{E}(A) \rightarrow \vec{E}(B) = \vec{E}^+$   
 $\vec{E}(C) \rightarrow \vec{E}(D) = \vec{E}^-$

mais aussi  $W_{BC} + W_{DA} = 0$ , car  $BC$  et  $AD$  sont antiparallèles.

Donc

$$E_T^+ AB - E_T^- DC = 0, \text{ donc } \Delta E_T = 0.$$

Pour  $E_N$  :Théorème de Gauss :  $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{\text{cylindre}} = \frac{\rho_s S}{\epsilon_0}$ 1.  $\Phi_{\text{cylindre}} \rightarrow 0$  si  $H \rightarrow 0$ 2.  $\Phi_1 \rightarrow E_N^+ S$ 3.  $\Phi_2 \rightarrow -E_N^- S$ Donc  $\Delta E_N = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$ 

## Type de matériaux

Conducteurs, isolants, semi-conducteurs, diélectriques, piézoélectriques, diamagnétiques, ferromagnétiques, etc.

En gros :

**conducteurs** : ceux qui sont capables de conduire l'électricité, d'avoir un courant électrique

**isolants** : qui ne peuvent pas

courant électrique – mouvement des charges dans une direction, donc il faut des charges libres : la **propriété** des conducteurs est d'avoir des charges **libres**

isolant : toutes charges sont liées

abstractions :

1. Conducteur absolu (ayant conductivité infinie) – résistance zéro ;  
Quantité des charges libres – infinie
2. Isolant absolu – pas de charges libres

Remarques :

1. Les deux peuvent être chargés ; dans les conducteurs les charges supplémentaires sont aussi libres, dans les isolants elles sont fixées.
2. Pour la majorité des conducteurs des charges libres sont des électrons, mais il y a des conducteurs ioniques (les électrolytes, les conducteurs ioniques solides, le plasma)
3. L'isolant peut être polarisé (dipôles permanents et induits)

Semi-conducteurs :

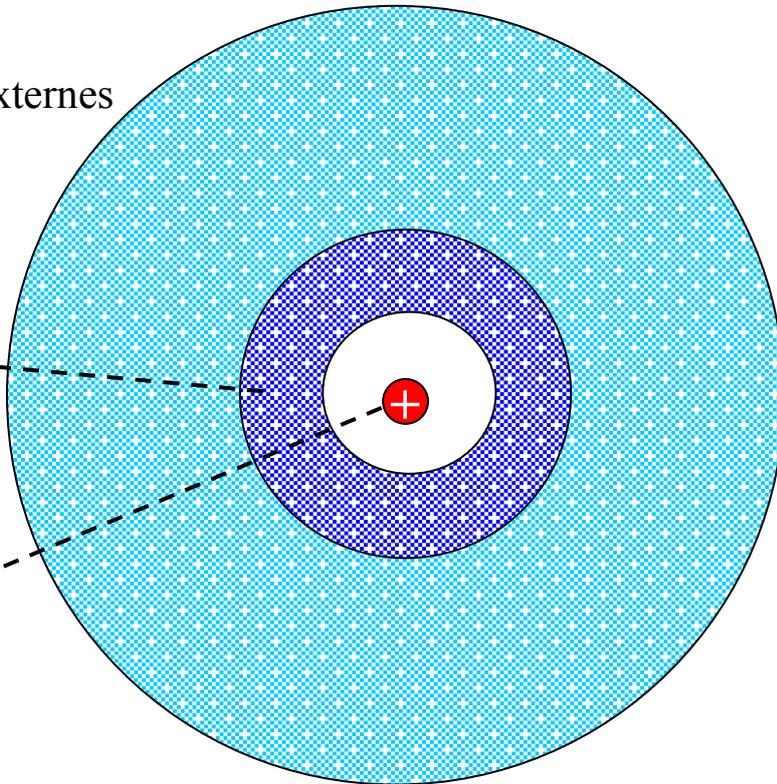
## Structure atomique et moléculaire

Atome :

électrons externes

électrons internes

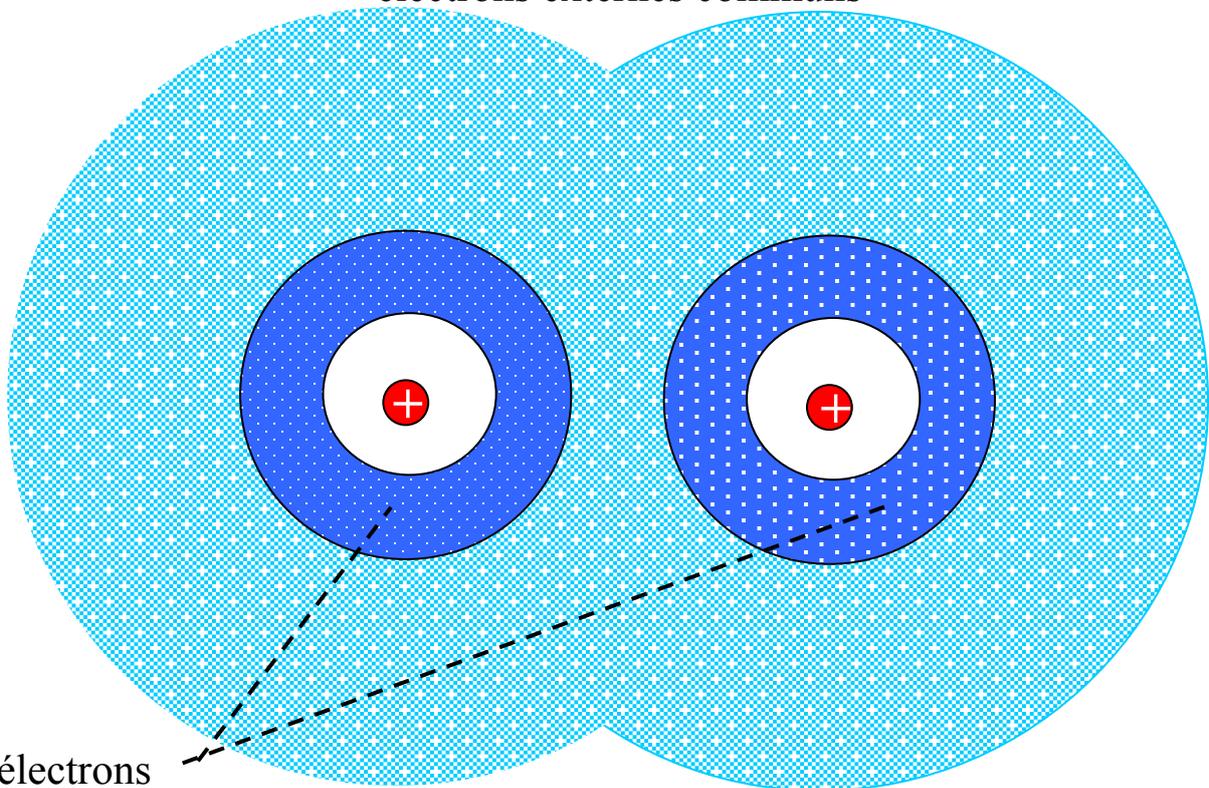
noyau



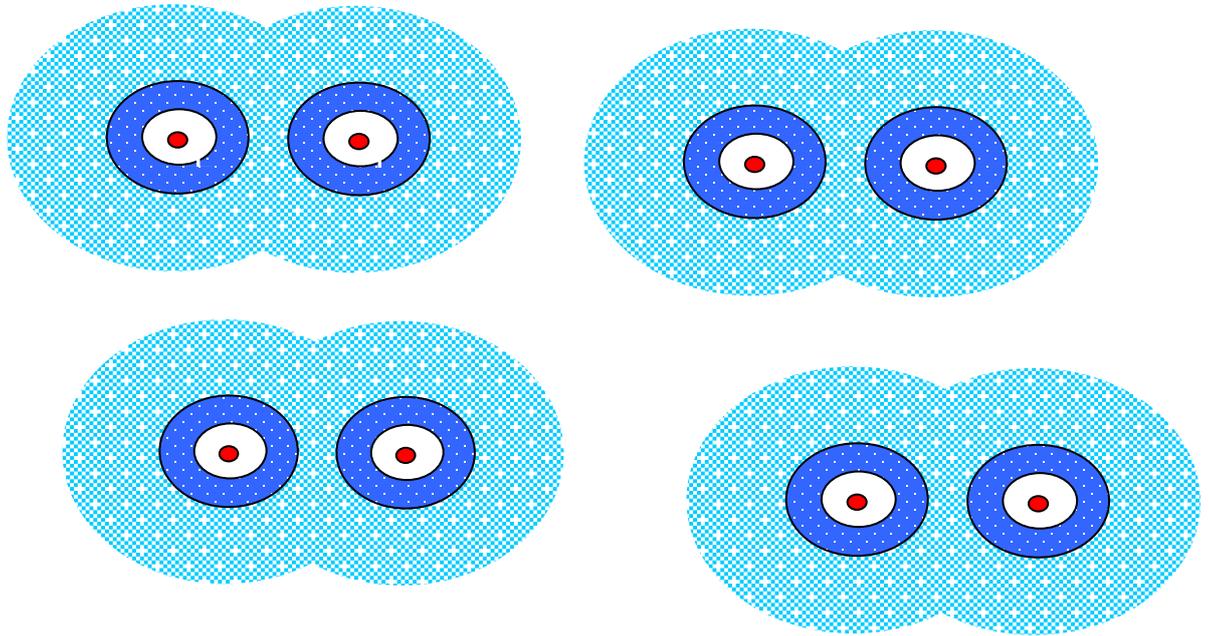
Molécule :

électrons externes communs

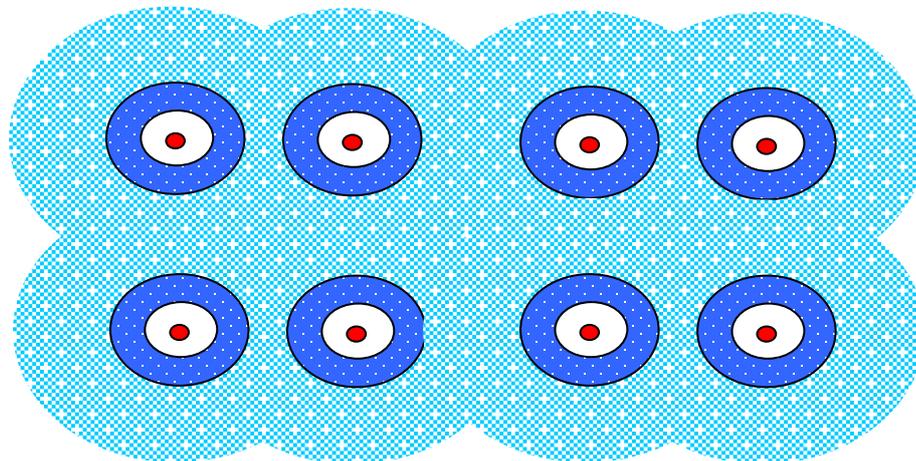
électrons internes



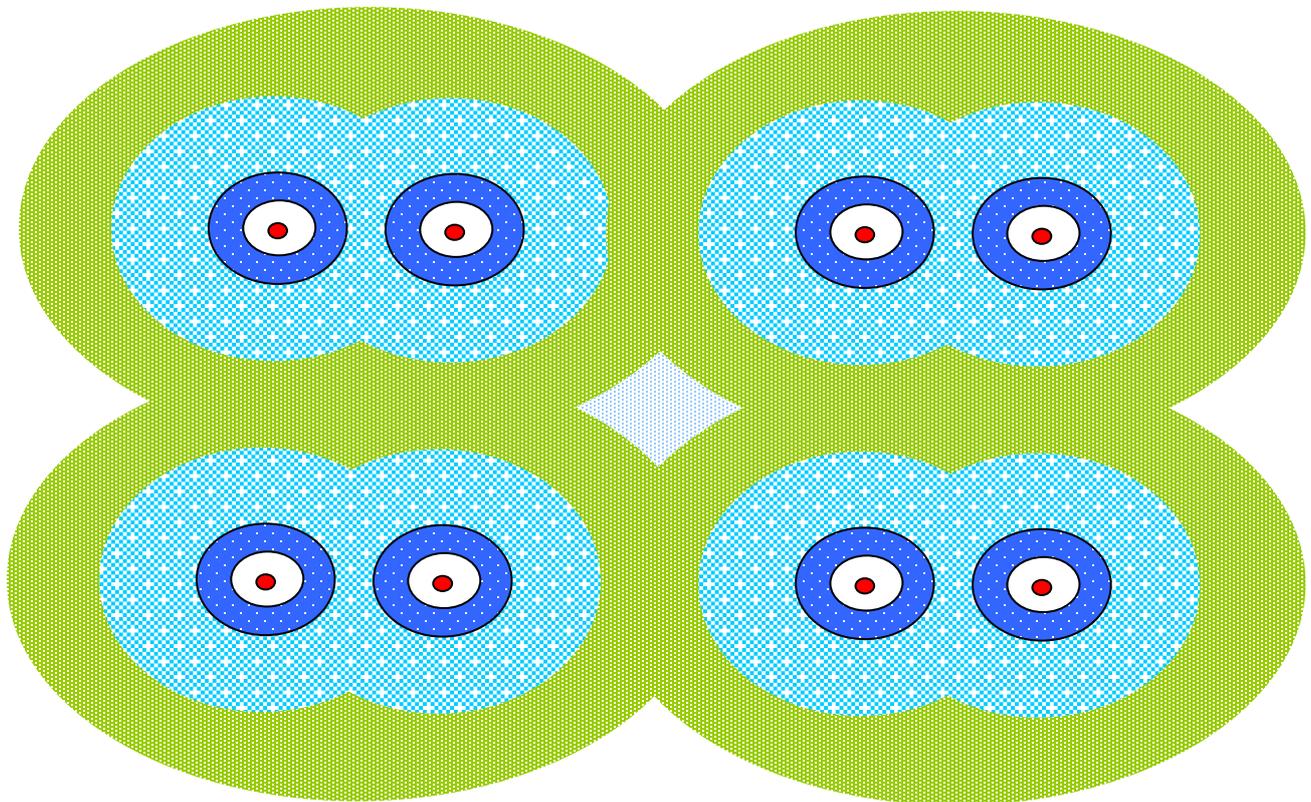
Matériau **diélectrique** : les électrons externes sont liés aux molécules séparées



**Conducteurs** : une partie des électrons externes sont partagés entre les 'molécules' (atomes) et sont communs au corps entier



**Semiconducteurs** : une partie des électrons externes en état d'excitation peuvent devenir communs au corps entier. Dans un état moins excité : comme les diélectriques



La bande énergétique d'états liés : **bande d'états liés (bande de valance)**

La bande énergétique d'états communs : bande **conductrice**

L'énergie minimale nécessaire de transférer un électron d'une bande à l'autre : **bande interdite**  $E_c$ .

Pour les métaux :  $E_c = 0$

Pour les diélectriques :  $E_c = 7 - 20$  eV

Pour les semiconducteurs :  $E_c = 0.5 - 5$  eV

(rappel : ça va dire qu'un électron doit être soumis au potentiel  $V = E_c/e$ )

**Remarque** : Cette énergie est différente à l'énergie **d'ionisation** nécessaire pour ejecter un électron de l'atome complètement : dans la bande conductrice l'électron reste lié aux atomes

Exemple : l'électron dans l'état énergétique le plus bas de l'atome d'hydrogène ( $r = 0.053$  nm) : le champ de la force électrostatique est  $5 \times 10^{11}$  V/m !

Pour l'air sec :  $3 \times 10^6$  V/m = 30 kV/cm

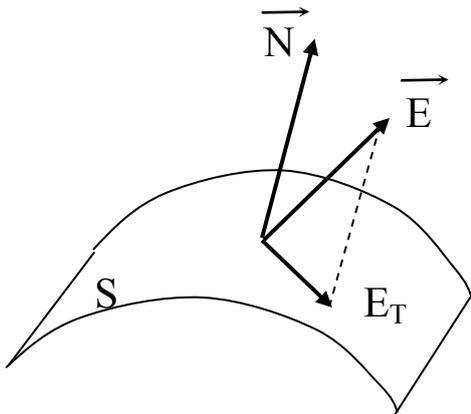
Les diélectriques peuvent être polarisés dans un champ électrique externe, on en a déjà parlé, et le résultat est la création des dipôles électriques caractérisés par ses moments dipolaires  $\vec{p} = \vec{p}_0 + \alpha \vec{E}$ , sauf quelques exceptions,  $\vec{p}_0 = 0$ .

## Conducteurs dans champ électrostatique

### I. La surface S de conducteur : équipotentielle ( $V = \text{cte}$ )

Explication :  $V = \text{cte}$  sur  $S_V \Leftrightarrow \vec{E} \perp S_V$  (pas de travail fait en déplacement à travers le champ)

Si S n'est pas équipotentielle,  
 $\Leftrightarrow \vec{E}_T \neq 0$  (la composante tangente de champ).



$$\vec{E}_T \neq 0 \Rightarrow \vec{F}_T = e\vec{E}_T$$

$\Longrightarrow$  déplacement de charges libres ;  
redistribution de charges libres

$\Longrightarrow$  création d'un nouveau champ  
par des charges redistribuées jusqu'à

$\Longrightarrow$  la compensation de  $\vec{E}_T \Rightarrow \vec{E}_T = 0$  sur S

$\Longrightarrow$  S est équipotentielle en équilibre

II. A l'intérieur :  $\vec{E} = 0$  (si non, champ va exercer une force sur les charges libres)

Conséquences :

1. Courant électrique
2. Corona décharge
3. Cages électrostatiques (cages de Faraday)

## Cage électrostatique

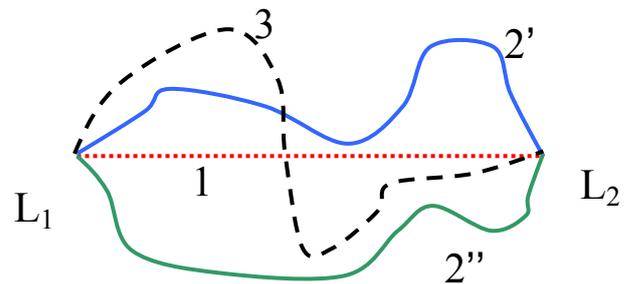
$S_{\text{metal}}$  : équipotentielle – aussi vrai pour une surface intérieure.

Sur  $S_{\text{int}}$  fermée  $V = \text{cte}$ . Si  $Q_{\text{int}} = 0$   $V_{\text{volume interne}} = \text{cte}$  aussi

**Théorème** : soit une fonction  $f$  continue et bornée dans une région  $P$  bornée et constante sur les limites  $L$  de  $P \implies f = \text{cte}$  sur  $P$  ou  $f$  a l'extremum dans  $P$  :

Ou

- 1)  $f = \text{cte}$ , ou
- 2)  $f$  a le maximum ( $2'$ )  
ou le minimum ( $2''$ )
- 3) ou les deux



On a vu que dans l'extremum de  $V$  il y a des charges

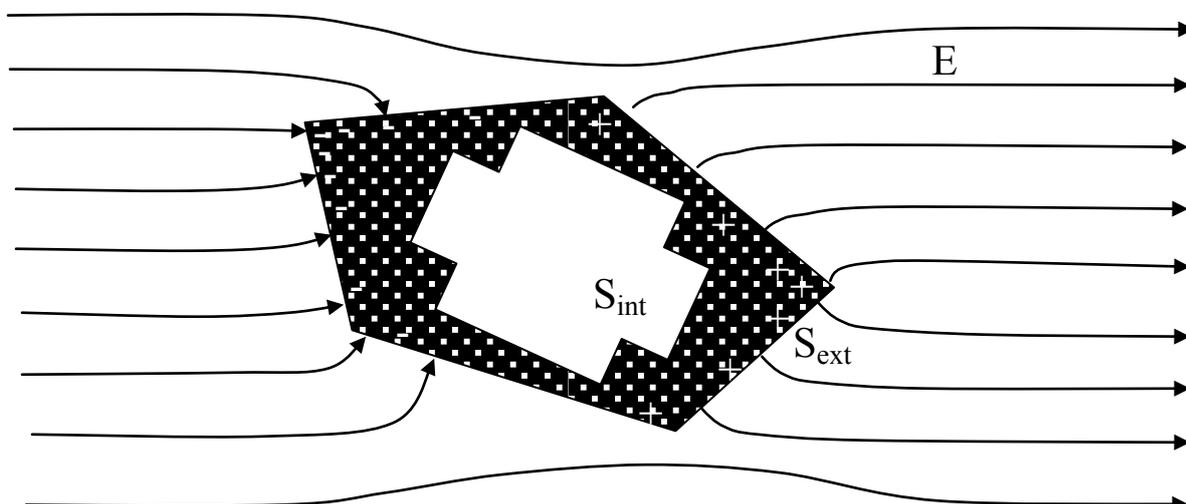
$\implies V = \text{cte}$  a l'interieur  $\implies E = 0$

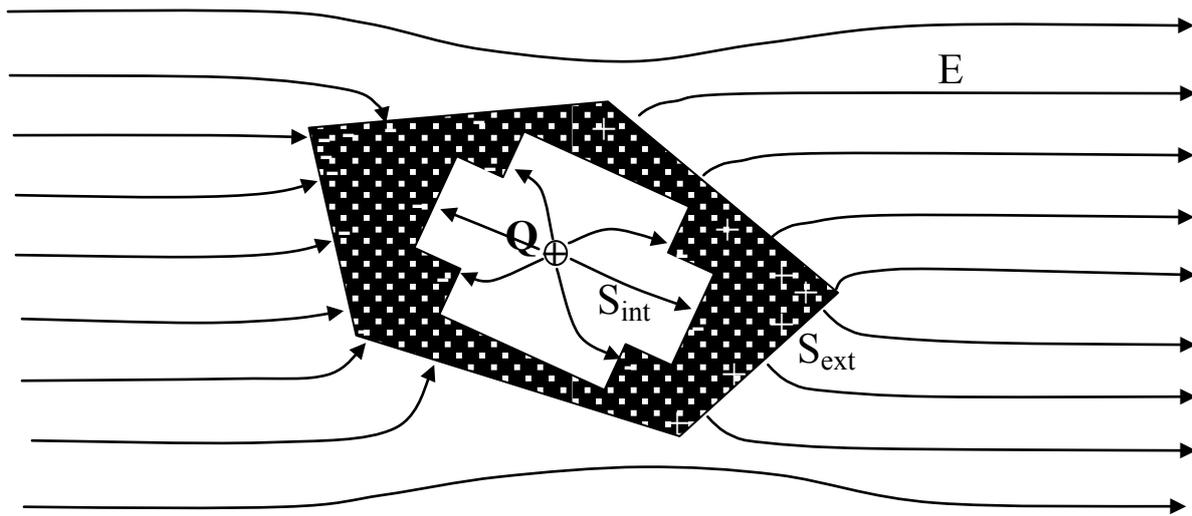
I. Le champ externe ne pénètre pas dans une cavité interne d'un conducteur (on est protégé)

II. Il n'y a pas de charges sur  $S_{\text{int}}$  :  $E_{\text{int}} = 0$ ,  $E_{\text{conducteur}} = 0$ ,

$$\Delta E_N = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \implies \rho_s = 0$$

III. Charge  $Q$  à l'interieur  $\implies$  charge  $-Q$  sur  $S_{\text{int}}$   $\longleftarrow$  (th. Gauss)





## Corona décharge

V de sphère :  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$  ,  $R$  plus petit  $\implies$   $V$  plus grand

Mais  $V = \text{cte}$  pour deux conducteurs en contact ; en fait la relation est :

$R$  plus petit  $\implies$   $q$  plus petite.

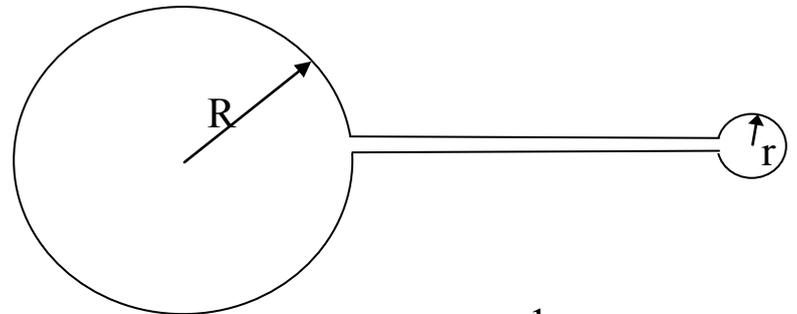
Mais :  $E = -\frac{V}{R}$  , donc  $R$  plus petit  $\implies$   $E$  plus grand pour  $V = \text{cte}$ .

Au voisinage d'une partie pointue d'objet – le champ est plus fort.

Exemple :

$$E_r = E_R \frac{R}{r} = -\frac{V}{r}$$

et  $V$  ne dépend que de  $R$ ,  
si  $r \ll R$



Mathématique :  $S_{\text{cond.}} = S(V) = \text{cte}$  ;  $\nabla^2 V = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$  ;  $\nabla^2 S \propto \frac{1}{R_{\text{courbure}}}$

$$\implies \rho_s \propto \frac{1}{R_{\text{courbure}}}$$

Application : **paratonnerre**

grande sphère – la Terre

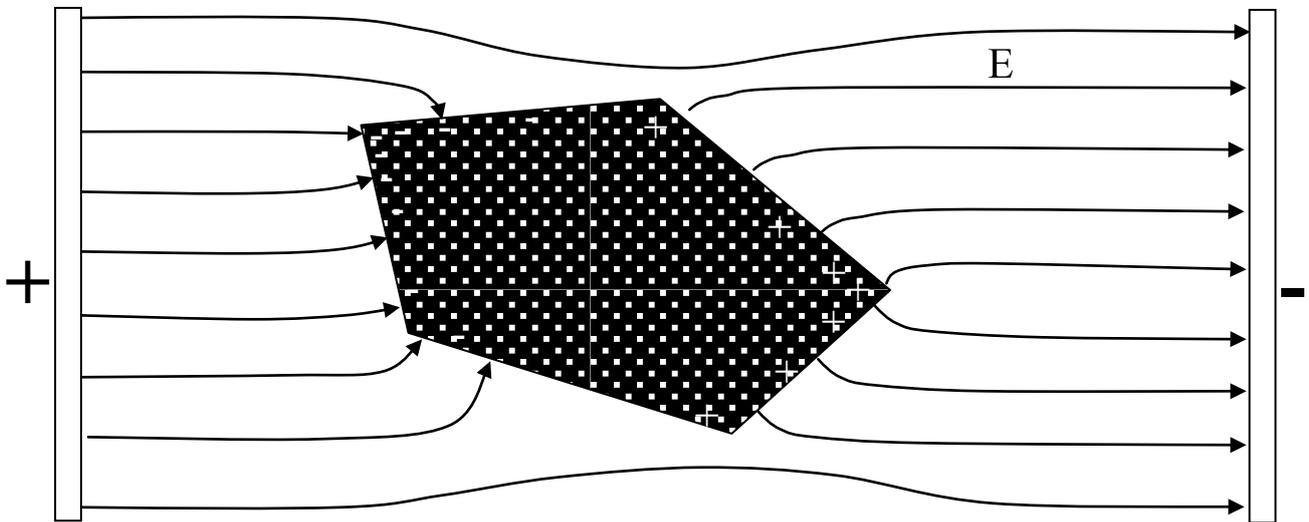
Attn. Le paratonnerre n'est pas fait pour attirer les éclairs mais pour réduire le potentiel localement :

$V$  fort  $\implies$  micro-décharges dans l'air autour

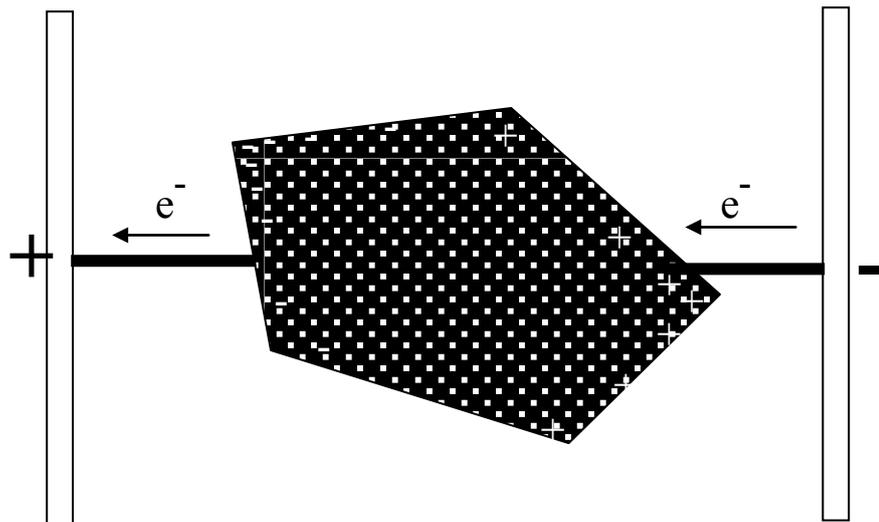
ions+ : libérés, |  
électrons attirés  $\implies$  la différence de potentiel local diminue

## Courant électrique

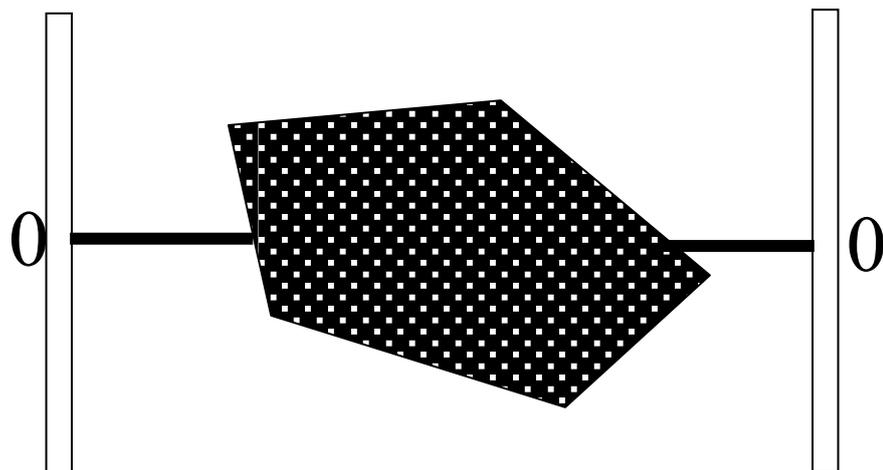
Conducteur dans un champ électrique  $\implies$  mouvement des charges libres  $\implies$  équilibre (champ intérieur nul)



Conducteur  
branché :  
courant



Conducteur branché en équilibre : la différence de potentiel est annulée



Pour préserver le courant il faut préserver la différence  $V$  (**source** de  $V$  cte, e.g. prise électrique).

Remarque : avec l'alternance de signe de potentiel ce n'est pas nécessaire de transférer les électrons le long du circuit entier

Si  $V = \text{cte}$ , la force électrique sur chaque électron  $\vec{F} = -eV$  va accélérer l'électrons avec accélération constante  $\implies$  la vitesse  $\vec{v}$  monte sans limite. En fait – ce n'est pas possible – il y a d'autres forces, des collisions, etc.

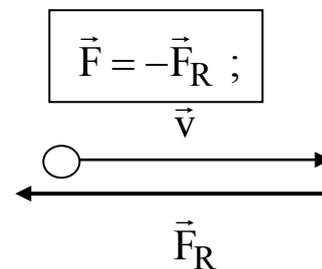
Equilibre dynamique : les forces en équilibre,  $\vec{v} = \text{cte}$ .

Approche phénoménologique :

force **électrique**  $F$  et force de **résistivité**  $F_R$  :

1)  $\vec{v} = 0 \implies \vec{F}_R = 0$

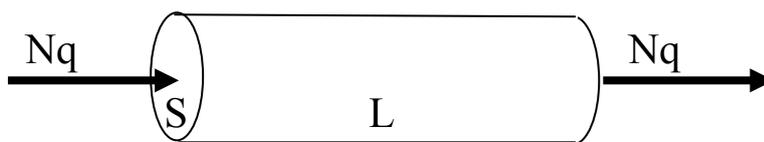
2)  $\vec{F}_R$  et  $\vec{v}$  : antiparallèles



Hypothèse la plus simple :

$$\vec{F}_R = -\tilde{\rho}\vec{v}, \quad \tilde{\rho} \geq 0.$$

**Courant électrique**  $I$  : la quantité de charge passant par seconde en direction  $\vec{L}$  à travers une surface  $S$



$$\vec{I} = NqS_{\perp} \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = NqS_{\perp} \vec{v}, \quad N - \text{nombre de charges } q \text{ par volume}$$

[A] (1 Amper = 1 Coulomb/1 sec)

$$\vec{I} = -NqS_{\perp} \frac{\vec{F}_R}{\tilde{\rho}} = NqS_{\perp} \frac{q\vec{E}}{\tilde{\rho}} = -\frac{Nq^2S_{\perp}}{\tilde{\rho}L} \Delta V,$$

E uniforme :  $(E = \frac{-\Delta V}{L})$

$I$  et  $\Delta V$  antiparallèles, indépendamment du signe de  $q$

$$I = \frac{S_{\perp}}{\rho L} V = \sigma \frac{S_{\perp}}{L} V = \boxed{\frac{1}{R} V}, \quad \text{la loi d'Ohm}$$

$$\rho = \frac{\tilde{\rho}}{Nq^2} \quad - \quad \text{résistivité}, \quad \sigma = \frac{1}{\rho} \quad - \quad \text{conductivité},$$

$$R = \rho \frac{L}{S_{\perp}} \quad \text{résistance}, \quad \frac{1}{R} \quad - \quad \text{admittance}$$

$$R \propto \frac{L}{S} \quad \text{en séries : résistance = la somme des résistances}$$

en parallèle : l'admittance = la somme des admittances

Remarque : Les lois de circuits électriques à partir de lois d'électromagnétisme – pendant les TD

**Densité de courant électrique :**

$$\boxed{\vec{J} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\vec{I}}{S_{\perp}}} = Nq\vec{v} = Nq \frac{\vec{F}_R}{\tilde{\rho}} = Nq \frac{q\vec{E}}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{\rho} \vec{E}, \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$$

Remarque : le courant I représente la forme intégrale de densité de courant à travers d'une surface (par exemple, la section d'un fil) :

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{N}_S dS$$

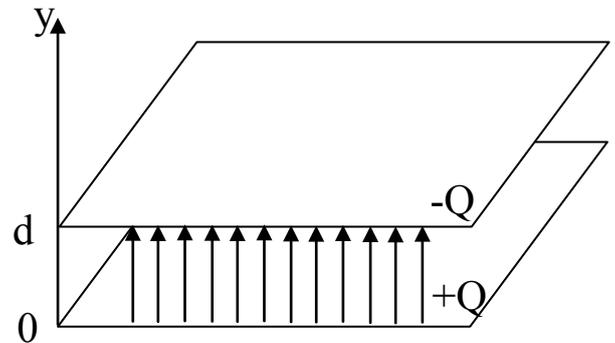
## Condensateurs

2 plans chargés anti-symétriquement (-Q et +Q) créent un champ homogène :

condensateur :

$$\begin{aligned}
 y > d : \quad E &= 0 & V &= 0 \\
 0 < y < d : \quad E &= \frac{\rho S}{\epsilon_0} & V &= \frac{\rho S}{\epsilon_0} (d - y) \\
 y < 0 : \quad E &= 0 & V &= \frac{\rho S}{\epsilon_0} d
 \end{aligned}$$

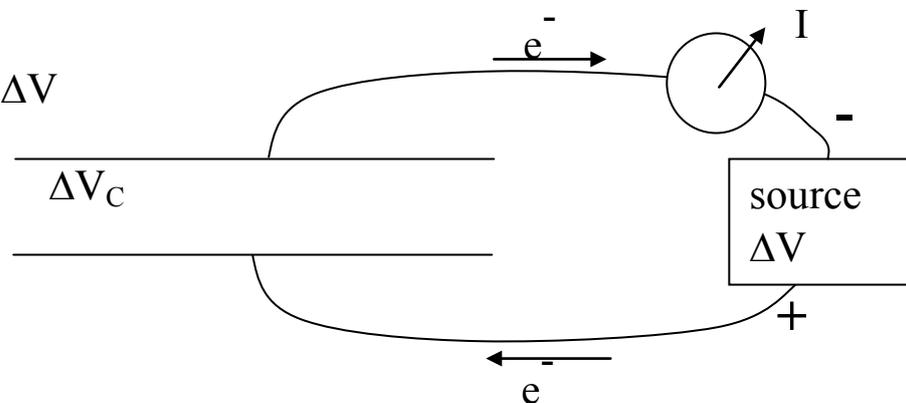
$$\Rightarrow \boxed{\Delta V = \frac{\rho S}{\epsilon_0} d}$$



Questions :

1. Condense quoi ?  $\Rightarrow$  Condense des charges et
2. Pourquoi faire ?  $\Rightarrow$  les préserve (e.g. les mémoires électroniques)
3. Comment ?

$$\Delta V \rightarrow \Delta V_C = \Delta V$$



Si la source est coupée, les charges restent sur les plans, car  $E_{\text{extérieur}} = 0$  ! (en fait, il y a toujours des fuites : l'air n'est pas un isolant parfait, il a des rayons cosmiques dans le vide aussi)

$Q = S\rho_S = \frac{\Delta V \varepsilon_0 S}{d}$  pour  $V = \text{cte}$ ,  $Q \uparrow$  si  $S \uparrow$  ou  $d \downarrow$ . La capacité  $C$  de stocker des charges est mesurée comme

$$C = \frac{Q}{V} \left[ \frac{C}{V} = \text{F} - \text{Farad} \right] \quad \text{condensateur plan : } C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Condensateurs en parallèle : comme si on somme la surface  $C = \sum C_j$

Condensateurs en séries : comme si on somme la distance  $\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_j}$

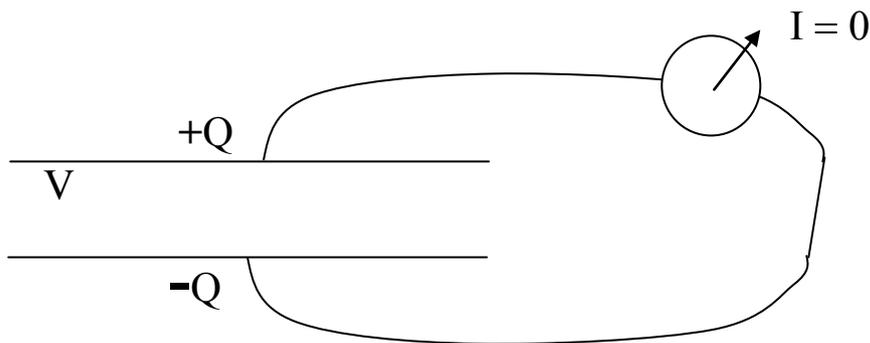
(preuve rigoureuse : TD)

La dernière possibilité pour changer  $C$  :  $\varepsilon_0$

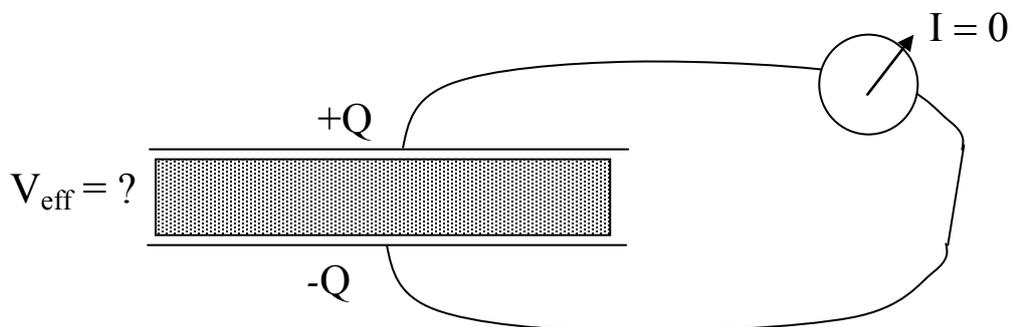
## Diélectriques dans champ électrostatique

Observation **expérimentale** :

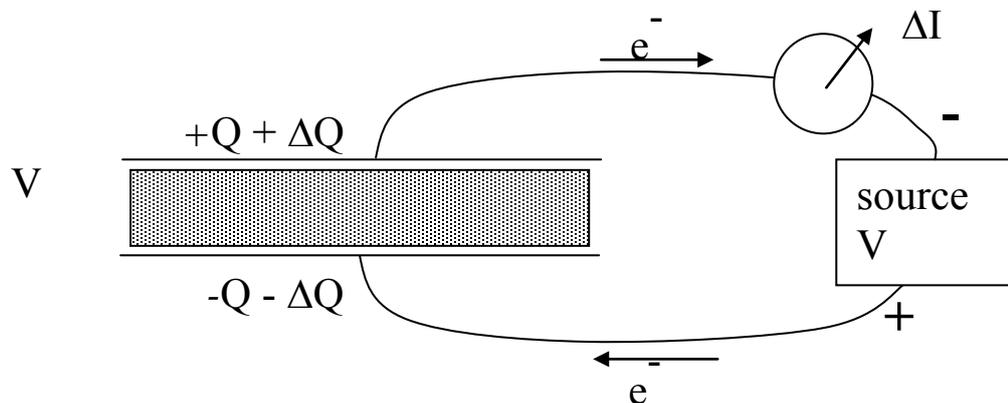
Un diélectrique placé dans un condensateur : le potentiel diminue



Insertion de diélectrique :  $Q$  ne change pas (pas de courant,  $E_{\text{ext.}} = 0$ )



Branchement de la même source :  $\Delta I$  supplémentaire  $\implies \Delta Q$



$$\Delta V = V - V_{\text{eff}} = \frac{\Delta Q}{\epsilon_0 S} d \implies C_{\text{eff}} = \frac{Q_1}{V_1} > C$$

Comment  $C \left( = \frac{\epsilon_0 S}{d} \right)$  a changé ( $S = \text{cte}$ ,  $d = \text{cte}$ ) ?

Il reste  $\epsilon_0$  !

Def. **constante diélectrique** (permittivité relative) statique (freq. 0)

$$\epsilon_r = \frac{V}{V_{\text{eff}}} \implies C_{\text{eff}} = \epsilon C$$

Comme si

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

l'air  $\epsilon_r = 1.00059$

l'eau  $\epsilon_r = 78.3$

Pourquoi ?

**Rappel :** 1) il n'y a pas des charges libres  
2) peuvent être polarisés

Les atomes et les molécules ont des charges positives et négatives. Un champ externe 'tire' les charges différentes dans les directions opposées, les forces intramoléculaire s'opposent, en l'équilibre nouveau les centres de charges positives et négatives sont déplacés et un dipôle induit est créé, proportionnel au champ externe. La constante de proportionnalité  $\alpha$  s'appelle **polarisabilité** de milieu.

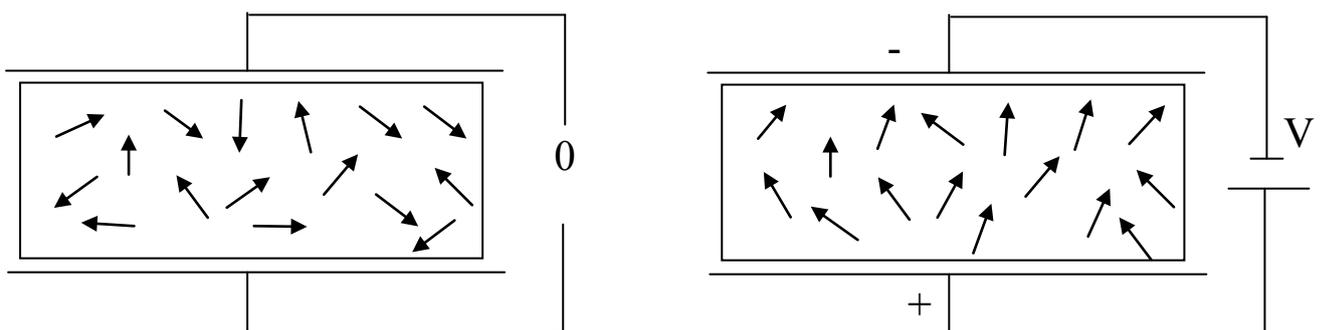
Si  $\vec{p}_0 \neq 0$  (l'eau) : deux cas en absence de champ externe

- **désordre** chaotique (liquides, milieux amorphes, polycristaux)  $\vec{p}_{0, \text{total}} = 0$
- **ordre** partiel : segnetoélectriques – cristaux ayant un dipôle naturel

Dans champ externe : deux cas

- les dipôles permanents ne bougent pas :  $\vec{p}_{0, \text{total}} = \text{cte}$
- les dipôles sont alignés partiellement parallèlement au

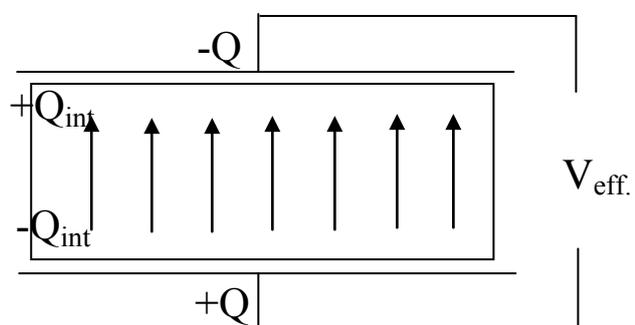
$$\vec{E}_{\text{externe}} \Rightarrow \vec{p}_{\text{moyen}} = \vec{p}_0 + \alpha \vec{E}_{\text{externe}}$$



Dans le volume : les charges négatives et positives se compensent

Sur la surface : excédent des charges  $Q_{\text{interne}} \propto |\vec{p}_{\text{moyen}}| = \alpha E_{\text{externe}}$

Equivalent macroscopique :



le moment dipolaire induit //  $\vec{E} \Rightarrow Q_{\text{int}}$  a le signe opposé à Q

$$Q_{\text{effective}} = Q - Q_{\text{int.}} \Rightarrow V_{\text{effectif}} = \frac{Q_{\text{effective}} d}{\epsilon_0 S} < V$$

la capacité avec diélectrique :  $C_{\text{diél.}} = \frac{Q}{V_{\text{eff.}}} > C$

### Relation entre $\alpha$ et $\epsilon_r$ :

Pour préserver  $V = \text{cte}$ , la source ajoute  $Q_{\text{int.}}$  à Q

$$\Rightarrow C_{\text{diél.}} = \frac{Q + Q_{\text{int.}}}{V} = \frac{Q + Q_{\text{int.}}}{Q/C} = \left(1 + \frac{Q_{\text{int.}}}{Q}\right) C \equiv \epsilon_r C$$

$p_{\text{diél.}} = Q_{\text{int.}} d$  et  $p_{\text{diél.}} = N \alpha E$ , N – nombre total de dipôles

$$Q_{\text{int.}} = \frac{N}{d} \alpha E \Rightarrow \epsilon_r = 1 + \frac{Q_{\text{int.}}}{Q} = 1 + \frac{\frac{N}{d} \alpha E}{\epsilon_0 S E} = 1 + \frac{N \alpha}{S d \epsilon_0}$$

$$\epsilon_r = 1 + \frac{N_0 \alpha}{\epsilon_0}, \quad \left| \begin{array}{l} N_0 = \frac{N}{S d} - \text{densité volumique de dipôles} \geq 0 \\ \alpha > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \epsilon_r \geq 1$$

$N_0 \alpha = \chi_e$  - susceptibilité électrique ,

$\vec{P} = \chi_e \vec{E}$  - vecteur de polarisation

**Conception** : si la loi de Coulomb est mesurée dans un milieu avec

$$\epsilon_r \neq 1 \Rightarrow F \rightarrow \frac{1}{\epsilon_r} F \Leftrightarrow \epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

**Champ supplémentaire** :  $\Delta E = E_{\text{eff}} - E = \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1\right) E = \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} E$

$\Delta E$  est linéairement proportionnel au E et a le signe opposé

## Force magnétique

Aimants naturels, magnétisation par induction, démagnétisation par choc ou température, etc.

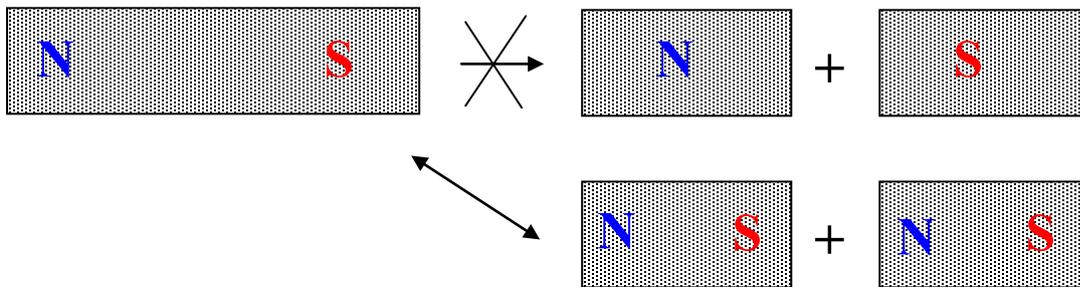
### Propriétés :

**similarités** avec la force électrique

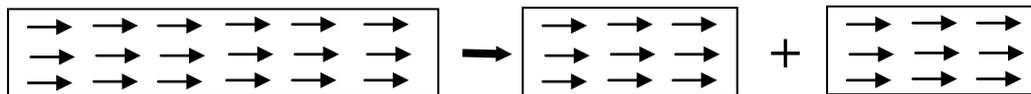
1. Il y a 2 types de pôles
2. Les pôles opposés s'attirent, les pôles similaires se repoussent

### différence

3. Ils n'existent qu'en paires



Comme des dipôles électrostatiques :



différence :

en divisant progressivement le dipôle électrostatique, on arrive à séparer les charge électriques ; pour les aimants – personne n'est encore arrivé à séparer les pôles magnétiques.

**Hypothèse** : le dipôle magnétique est l'élément fondamental magnétique (d'Ampère)

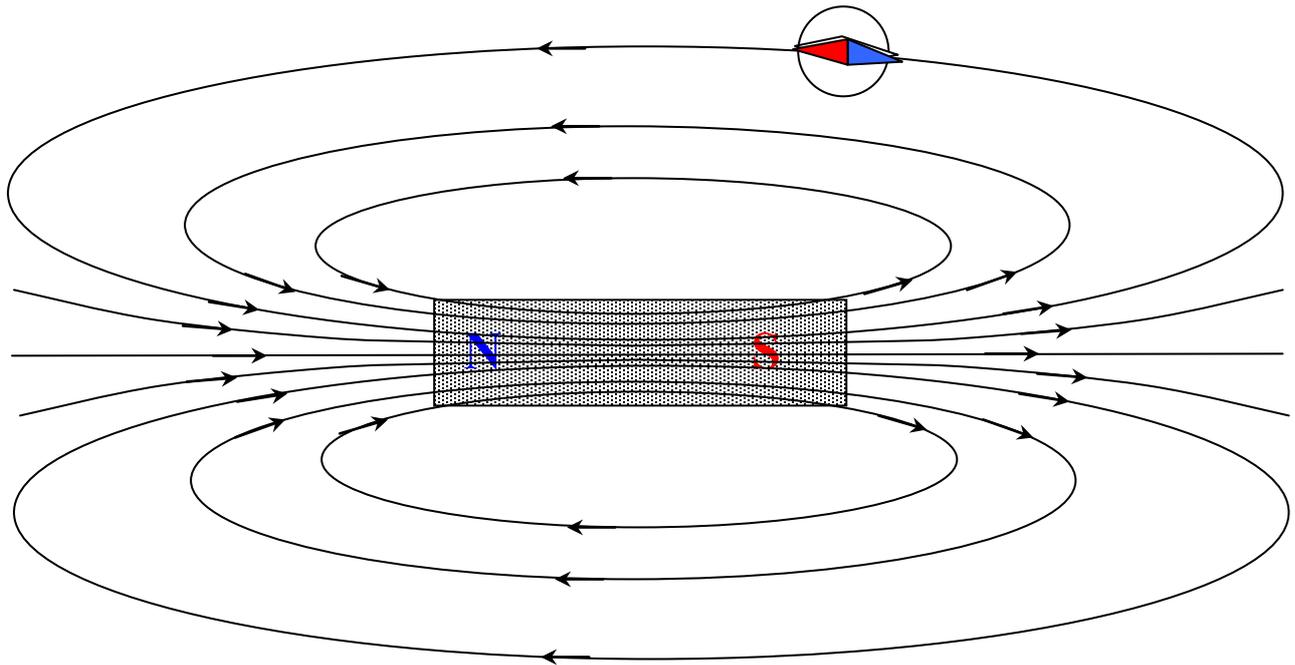
+ propriétés : la force s'exerce à distance, sans contact direct ;

la conception de champ magnétique qui est le porteur de la force (à vérifier qu'on peut bien définir les caractéristiques de champ qui ne dépendent pas de 'détecteur' mais seulement de la source)

**champ magnétique** : vecteur  $\mathbf{B} // \mathbf{F}_{\text{magn.}}$  et normalisé correctement  
(pour être indépendant de détecteurs)

comment **mesurer** : avec détecteurs qui ne modifient pas le champ,  
e.g., petits aimants 'passifs'

**présentation** : avec la carte de lignes tangentiels à la force  
(attn. pas de charges séparées : pas de début et fin de lignes)

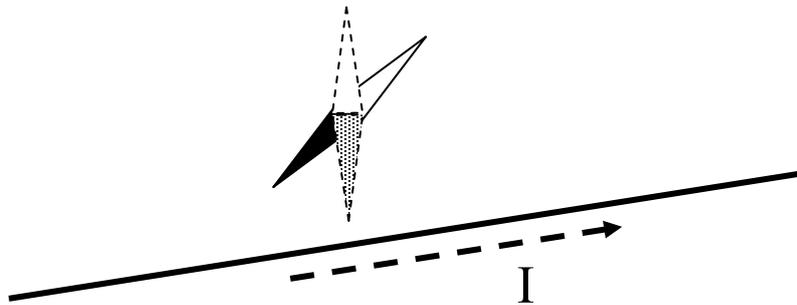


On peut continuer l'étude du champ magnétique séparément du champ électrique, mais les liens sont si importants, qu'il est préférable de les étudier **ensemble**.

1600 William Gilbert : « De Magnète »

## 220 ans - rien

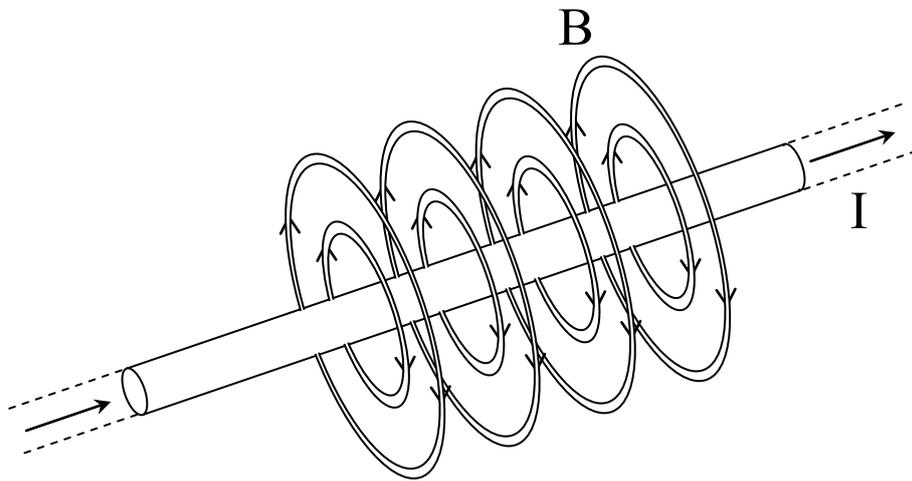
1819 H. Oersted (danois) trouva par hasard (pendant le cours) que le courant électrique dévie l'aiguille aimantée d'une boussole :



Faits expérimentaux :

1. Le courant électrique crée une force sur l'aimant. Sans courant – aucune force
2. Charges sans mouvements : pas de champ magnétique ; champ magnétique n'exerce pas de force sur les charges au repos
3. La force est perpendiculaire à la direction du courant
4. La force est proportionnelle à la magnitude de courant et à la puissance de l'aimant
5. Le principe de l'action et de la réaction nécessite que l'aimant exerce la même force (direction opposée) sur les charges de courant et le courant diminue (travail fait pour tourner l'aiguille diminue la vitesse des charges)

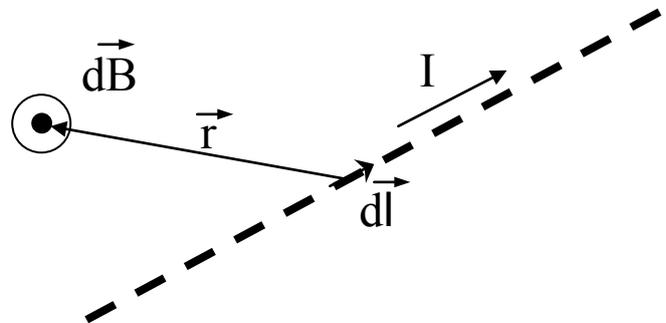
**Conclusion** : le courant électrique crée un champ magnétique et le champ magnétique exerce une force sur les charges en mouvement



1820 : Jean Baptiste Biot et Félix Savart – mesure quantitative

**Loi de Biot et Savart** (champ magnétique créée par un segment de courant) :

$$\vec{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \vec{d}\vec{\ell} \wedge \frac{\hat{\vec{r}}}{r^2}$$



(correspond à la loi de Coulomb)

1.  $B \perp d\ell, r$  (la triade  $d\ell, r, B$  est directe – règle du bonhomme d'Ampère ou règle du tire-bouchon de Maxwell)
2.  $B \sim I$
3.  $B \sim 1/r^2$
4.  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  : perméabilité magnétique du vide

$B$  [T – Tesla] :  $1\text{T} = 1\text{N}/(1\text{A} \cdot 1\text{m})$  ; pourquoi – plus tard !  
 $1\text{G (Gauss)} = 10^{-4} \text{T}$

Pourquoi  $B \not\parallel F$  (peut-on définir  $B$  comme  $F/qqch$  ?)

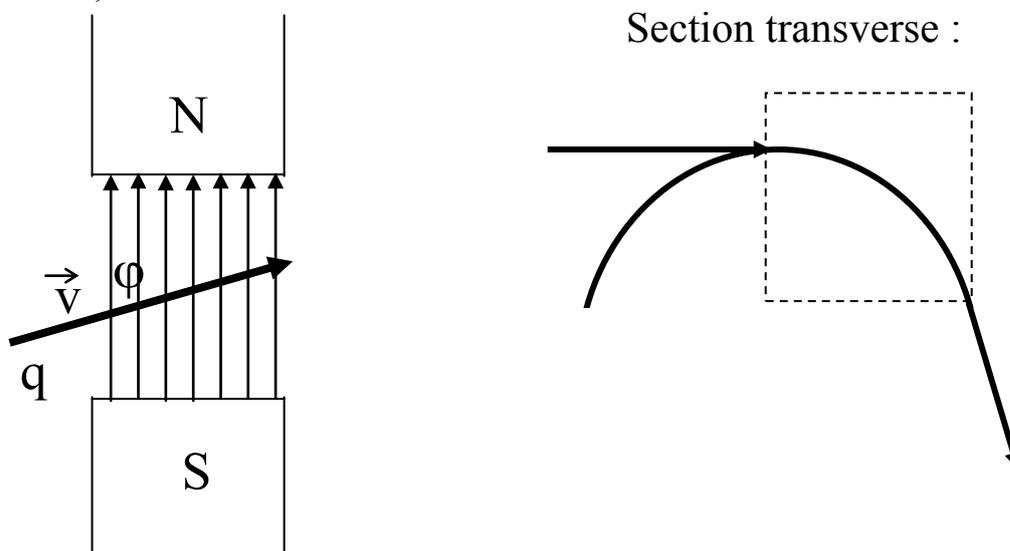
(en fait,  $B \parallel F$  entre les aimants et les aimants sont équivalents aux dipôles magnétiques)

Il faut définir la force magnétique exercée sur des charges en mouvement (elle existe dû au principe de l'action et de la réaction)

## Force sur une charge en mouvement dans un champ magnétique

**Expérience** par la pensée :

Mouvement de charges dans B homogène (créé par deux grands aimants) :



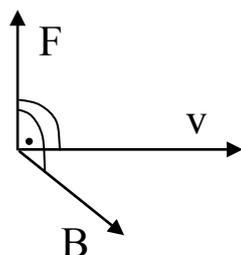
Observations :

1. Dans la région du champ la trajectoire tourne en cercle ayant une courbure constante dans le plan transverse de B.
2. La vitesse reste inchangée en module.
3. La courbure est proportionnelle à q, B, v et  $\sin\phi$  (si  $v \parallel B$  : pas d'influence)
4.  $S \longleftrightarrow N$  : la courbure change de signe

Conclusions :

La charge est soumise à une force  $F \perp v$  et B,  $F = 0$  si  $v \parallel B$ ,  
 $F \sim v, B, q$  :

$$\vec{F}_{\text{mag.}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$



prenons ça comme def. du champ magnétique ; donne des unités :

$$[B] = [F]/([q][v]) = \text{N}/(\text{Cms}^{-1}) = \text{NA}^{-1}\text{m}^{-1}$$

## La force de Lorentz

(champ magnétique et champ électrique)

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{elec.}} + \vec{F}_{\text{mag.}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Répetons la question : Peut-on définir B comme  $\vec{B} = \frac{\vec{F}_{\text{mag.}}}{qqch.}$  ?

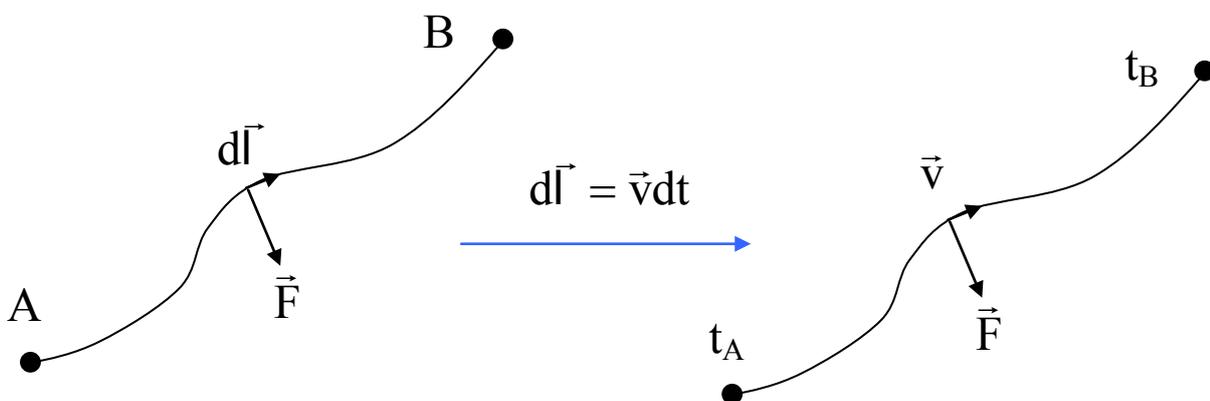
La conception de champ nécessite que le champ soit déterminé indépendamment de l'objet d'essai, donc de v.

1.  $\vec{F} \perp \vec{v}$
  2.  $F \sim v$
  3.  $\vec{F} \propto \vec{v} \langle \text{operation} \rangle \vec{B}$
- $\left. \begin{array}{l} \text{1. } \vec{F} \perp \vec{v} \\ \text{2. } F \sim v \\ \text{3. } \vec{F} \propto \vec{v} \langle \text{operation} \rangle \vec{B} \end{array} \right\} \Longrightarrow \langle \text{operation} \rangle = \text{produit vectoriel}$

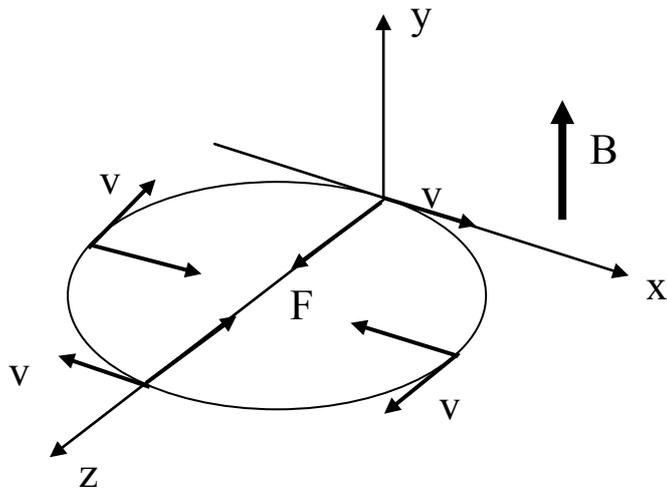
Attn.  $\vec{F}_{\text{mag.}}$  ne fait pas de travail sur les charges libres :

$$W_{BA} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{t(A)}^{t(B)} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} dt = \int_{t(A)}^{t(B)} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \equiv 0 \quad \text{car } \vec{F}_{\text{mag.}} \perp \vec{v}$$

Notre expérience a montré que  $v = \text{cte} \implies W \text{ cinétique} = \text{cte.}$



## Mouvement cyclotron



$E = 0$ ,  $B$  uniforme,

$$\text{I. } v \perp B$$

trajectoire: cercle

$$F_{\text{mag.}} = qvB = \frac{mv^2}{R}$$

$$R = \frac{mv}{qB} \quad \text{rayon cyclotron ;}$$

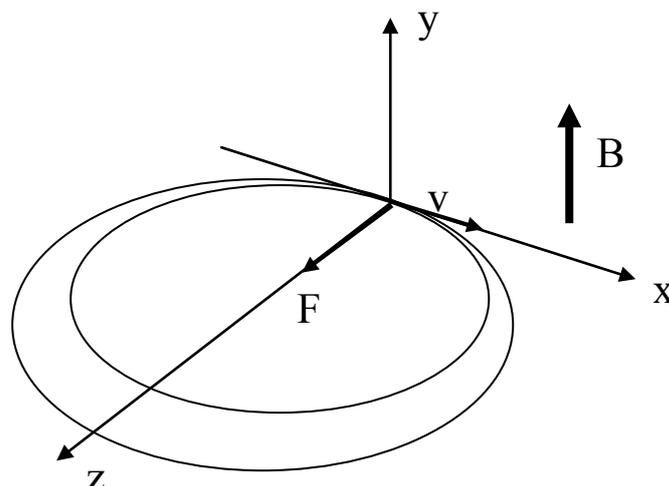
$$\text{fréquence: } f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{qB}{2\pi m} \quad (\text{ne dépend pas de } R !)$$

1. Sers à mesurer le rapport  $q/m$

2. La même charge et masse différente (e.g. isotopes ionisés)  
 $R$  et  $f$  différent

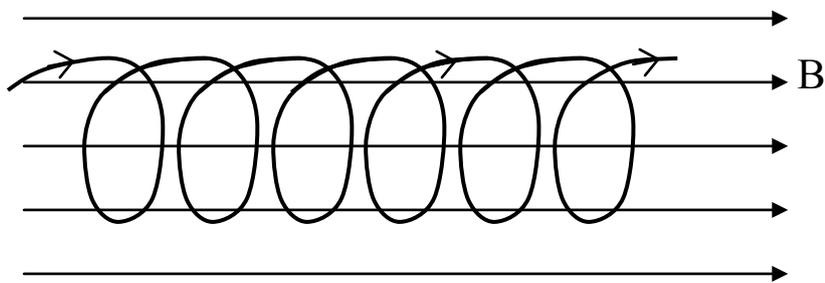
-  $R$  différent : les isotopes différents peuvent être capturés dans les régions différentes (séparation d'isotopes)

-  $f$  peut être mesurée par effets résonants : détermination du contenu isotopique



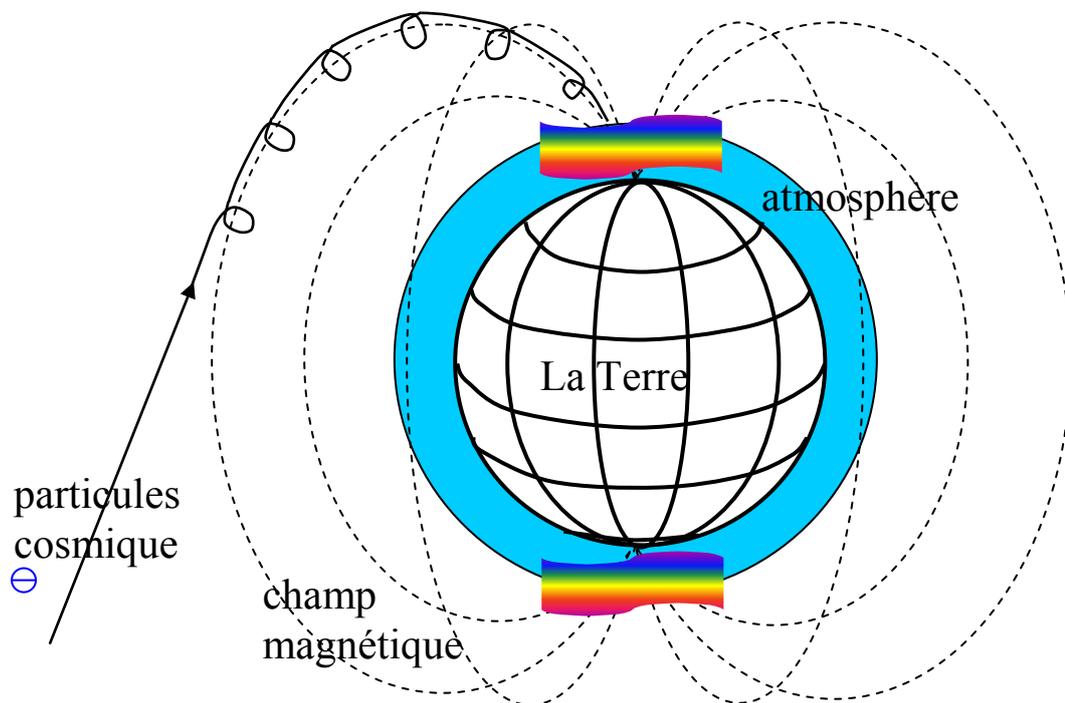
$$\text{II. } \vec{v} = v_{\perp} + v_{\parallel}$$

$\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow v_{\parallel} = \text{cte}$  ; dans plan transverse : mouvement circulaire



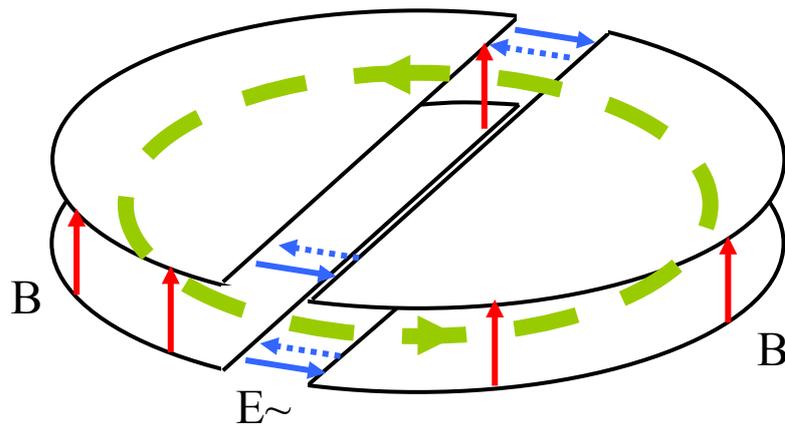
Exemples:

### 1. Aurore boréale



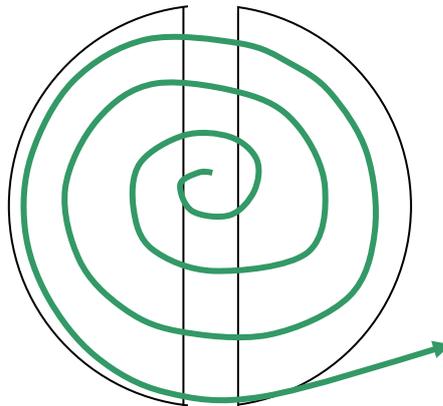
Les particules cosmiques sont capturées par le champ magnétique et se 'glissent' en parallèle de  $B$  jusqu'aux pôles. En entrant dans l'atmosphère, elles ionisent l'air  $\Rightarrow$  aurore boréale

### 3. Cyclotrons :



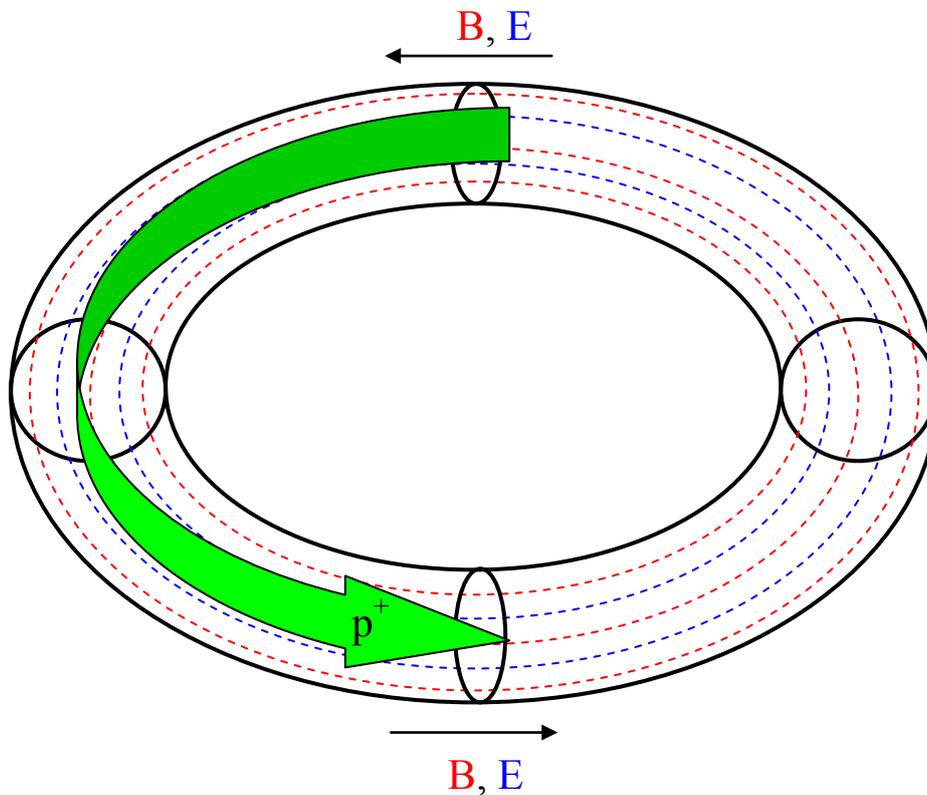
Deux cages semicylindriques métalliques avec potentiel électrique alterné pour accélérer les particules chargées quand ils passent les bouches.

Le champ magnétique homogène pour faire tourner la trajectoire en une spire :



Avec l'accélération la masse augmente (l'effet de la relativité) - nécessite le changement de la fréquence du E ou de la magnitude de B (ou les deux) - synchrotrons

L'autre possibilité – les champ magnétique et électrique en parallèle du faisceau (B est plus fort en approchant les murs de la chambre) :



E accélère les protons en augmentant  $v_{//}$  .  $v_{\perp}$  est modifié par B de façon que les particules restent toujours à l'intérieur.

## Loi de Laplace

(force d'un champ magnétique externe sur un élément de courant)

B externe exerce une force F (donnée par l'expression de Lorentz) sur chaque charge q d'un élément de courant  $I d\vec{\ell}$  :

$$d\vec{F}_q = q \vec{v} \times \vec{B} ;$$

$$\Rightarrow d\vec{F} = dQ \vec{v} \times \vec{B} \quad (dQ \text{ charge totale mobile dans } d\vec{\ell})$$

$$\text{mais } Id\vec{\ell} = \frac{dQ}{dt} d\vec{\ell} = dQ \vec{v} \quad \Rightarrow \boxed{d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}}$$

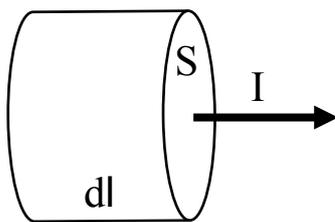
$$\text{fil droit, champ uniforme : } \Rightarrow \vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

Conséquences :

1. Chaque segment L d'un fil est 'tiré' par une force  $F \perp (B \text{ et } L)$  ;
2.  $F \sim B, I, L, \sin\langle L, B \rangle$

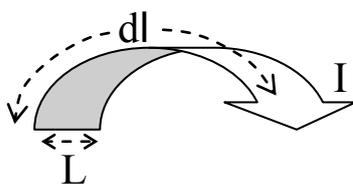
Densité de courant et loi de Laplace :

$$\text{Charges volumiques : } dQ = \rho dV ; \quad \vec{J} \equiv \frac{\vec{I}}{S} = \frac{Id\vec{\ell}}{Sd\ell} = \frac{Id\vec{\ell}}{dV}$$



$$\Rightarrow d\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} dV$$

$$\text{Charges surfaciques : } dQ = \rho_s dS ; \quad \vec{J}_s \equiv \frac{\vec{I}}{L} = \frac{Id\vec{\ell}}{Ld\ell} = \frac{Id\vec{\ell}}{dS}$$



$$\Rightarrow d\vec{F} = \vec{J}_s \times \vec{B} dS$$

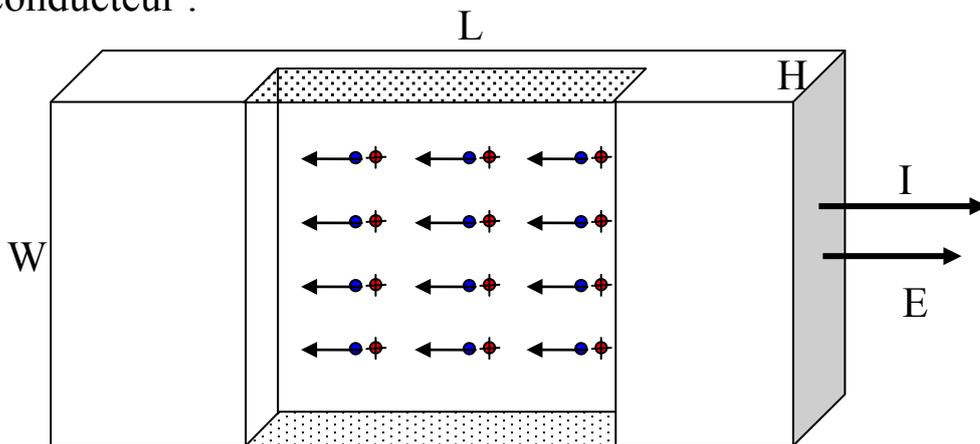
## Effet Hall

On a étudié :

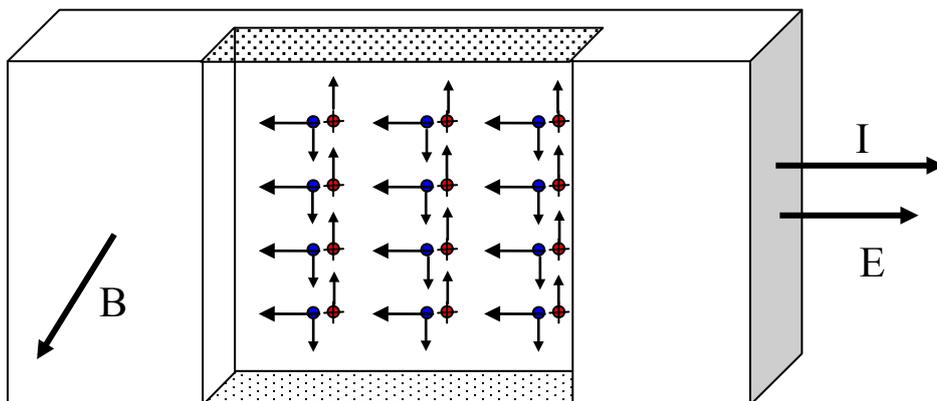
1. Charges libres dans champ externe uniforme
2. Élément du courant dans champ externe uniforme

Maintenant : charges libres formant le courant (e.g. métaux, plasma)

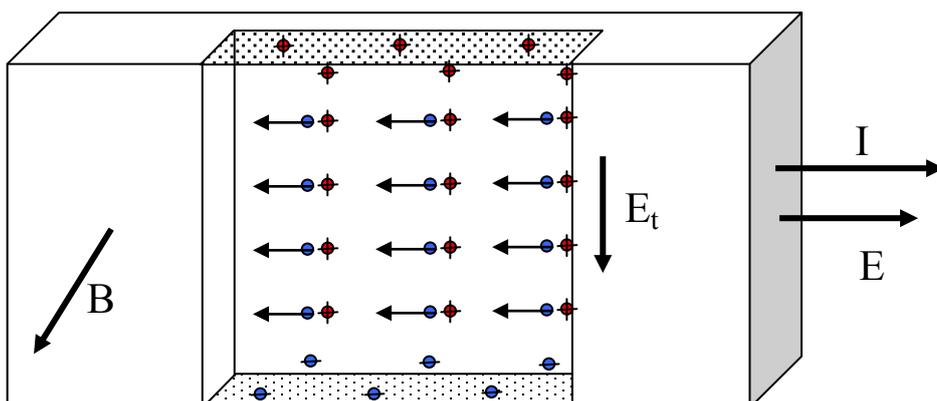
e.g. conducteur :



dans champ magnétique : force transverse ( $\vec{F}_t = q\vec{v} \times \vec{B}$ )



Déplacement de charges négatives vers le 'bas', l'excès de charges négatives en 'bas' et de charges positives en 'haut' crée un potentiel transversale et un champ  $\vec{E}_t$



En équilibre  $\vec{E}_t = \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow E_t = v B$

$$J = N_0 q v \quad (\text{densité de courant})$$

$$\Rightarrow E_t = \frac{1}{N_0 q} J B$$

$$E_t = \frac{U_t}{W} ; J = \frac{I}{S} = \frac{I}{WH}, \quad \Rightarrow U_t = \frac{1}{N_0 q H} I B$$

$$K = \frac{1}{N_0 q} - \text{coefficient de Hall, spécifique pour chaque matériau}$$

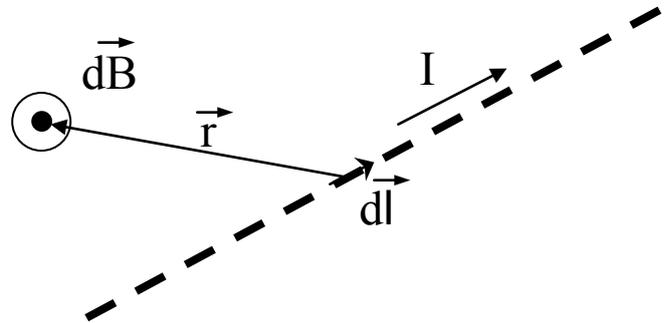
le signe de K donne le signe de porteurs de courant.

Dans beaucoup de métaux  $N_0 \sim$  nombre d'atomes, donc presque chaque atome donne un électron libre.

## Champ créé par une charge en mouvement

**Rappel :** Loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$



mais, par définition :

$$I d\vec{\ell} = \frac{dQ}{dt} d\vec{\ell} = dQ \vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Q \vec{v} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}}$$

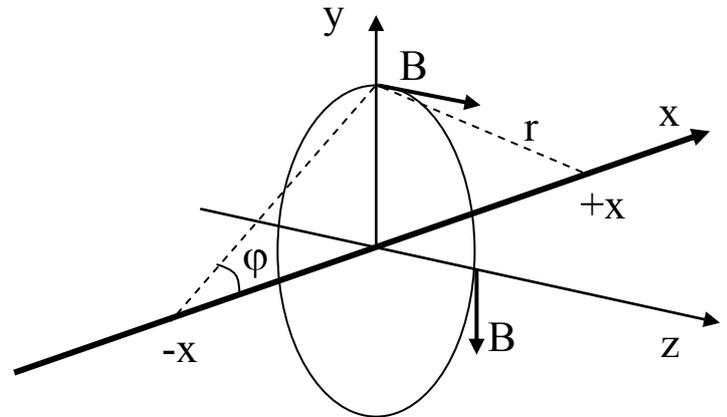
## Champ créé par une ligne de courant

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \int d\vec{B}$$

$$1) \vec{B} \perp d\vec{\ell} \equiv dx \Rightarrow B_x = 0$$

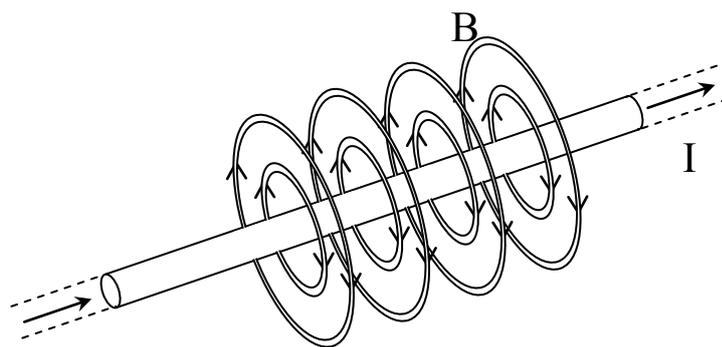
$$2) dB_y(-x) = -dB_y(x) \Rightarrow B_y = 0$$



$$B_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sin \varphi(x)}{r^3(x)} dx = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi}{(y_0 / \sin \varphi)^3} \frac{y_0 d\varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{\mu_0 I}{4\pi y_0} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi y_0}$$

$$\left( r = \frac{y_0}{\sin \varphi}; \quad x = -\frac{y_0}{\operatorname{tg} \varphi} \Rightarrow dx = \frac{y_0}{\sin^2 \varphi} \right)$$

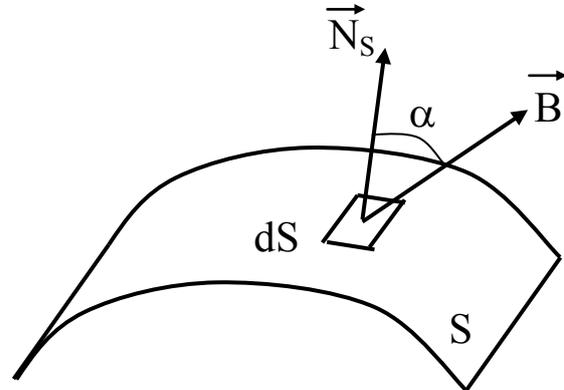


Question : pour les calculs de E le théorème de Gauss était très utile.  
Est-ce que il n'existe pas qqch. pour B ?

### Flux de champ magnétique

$$\text{def. } d\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{N}_S dS = B dS \cos \alpha$$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \vec{N}_S dS$$

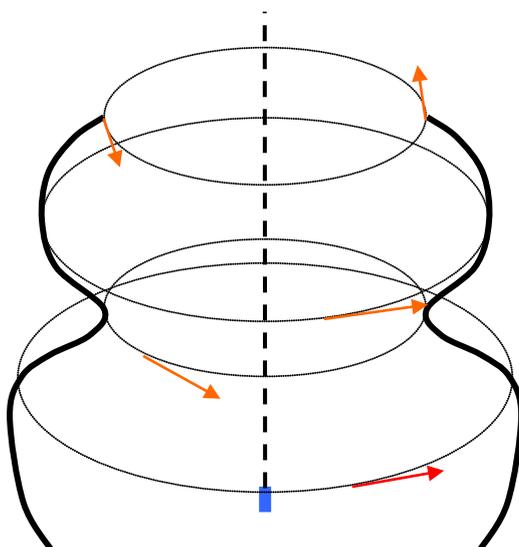


L'analogie du théorème de Gauss existe :

$$\Phi_B \equiv \oint_S \vec{B} \cdot \vec{N}_S dS = 0$$

B a la même dépendance de r comme E, mais la direction de B est différente.

Exemple : un élément de courant et une surface de rotation



B tangential à S partout

$$\vec{B} \cdot \vec{N}_S \equiv 0$$



$$\Phi_B = 0$$

## Preuve générale : **théorème d'Ostrogradski Gauss**

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV \quad \text{- théorème d'Ostrogradski-Gauss}$$

Application : Flux de champ magnétique

Champ créé en  $r$  par une charge placée en origine se déplace à une

vitesse  $v$  : 
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Q \vec{v} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{v} \wedge \vec{r} \frac{1}{r^3} \right) = -\frac{Q\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{r} \frac{1}{r^3} \wedge \vec{v} \right)$$

$$= -\frac{Q\mu_0}{4\pi} \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{r} \frac{1}{r^3} \right) \cdot \vec{v} ; v \text{ ne dépend pas du point d'observation ;}$$

$$\text{en plus, } \operatorname{rot} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\Phi_B \equiv \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0 \quad \text{représentation intégrale du}$$

théorème de Gauss pour le champ magnétique

### Théorème du flux – présentation différentielle

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

représentation intégrale du théorème de Gauss pour le champ magnétique

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

représentation différentielle

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

représentation intégrale du théorème de Gauss pour le champ électrique

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon_0} \quad \text{pour chaque } V$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

représentation différentielle

L'importance : les représentations différentielles sont la moitié des équations de Maxwell.

## Dipôle magnétique

Qu'est-ce qu'il s'est passé avec des aimants ?

**Hypothèse d'Ampère** : le magnétisme dans la matière est dû au moyen d'une multitude de petits anneaux de courants électriques distribués à l'intérieur de la substance. Pour l'instant on n'a pas trouvé de monopoles magnétiques.

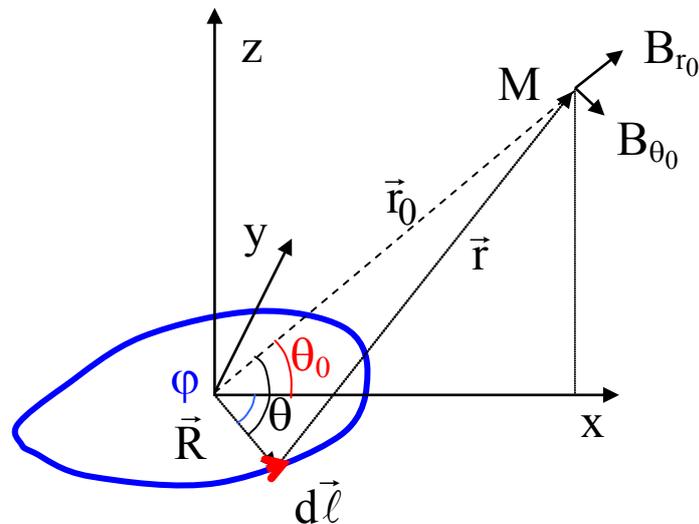
Champ magnétique d'une spire de courant à grande distance :

$$M \in (x, z)$$

$$L \in (x, y)$$

$$r \gg R,$$

$$\cos \theta = \cos \theta_0 \cos \varphi$$



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} d\vec{\ell} \wedge \vec{r} \quad (\text{loi de Biot-Savart})$$

$$r = \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 \cos \theta},$$

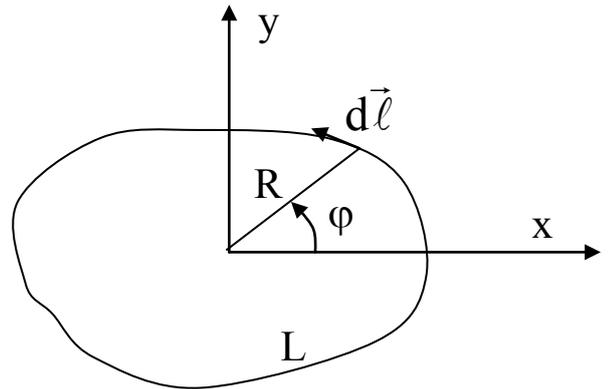
$$\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{R} = \vec{r}_0 - \vec{R}_0 R, \quad \left( \vec{R}_0 = \frac{\vec{R}}{R} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{-\vec{R}_0 r^3 - \vec{r} \frac{3}{2} r (2R - 2r_0 \cos \theta)}{r^6} \Bigg|_{R=0} = -\frac{\vec{R}_0}{r_0^3} + 3 \frac{\vec{r}_0}{r_0^4} \cos \theta$$

$$\frac{\vec{r}}{r^3} \approx \frac{\vec{r}_0}{r_0^3} + R \left( -\frac{\vec{R}_0}{r_0^3} + 3 \frac{\vec{r}_0}{r_0^4} \cos \theta \right) = \frac{\vec{r}_0}{r_0^3} + 3 \frac{\vec{r}_0}{r_0^4} R \cos \theta - \frac{\vec{R}}{r_0^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \left( \oint_L d\vec{\ell} \right) \wedge \frac{\vec{r}_0}{r_0^3} + 3 \left( \oint_L d\vec{\ell} R \cos \theta \right) \wedge \frac{\vec{r}_0}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^3} \oint_L d\vec{\ell} \wedge \vec{R} \right]$$

$$\begin{aligned} \oint_L d\vec{\ell} R \cos \theta &= \cos \theta_0 \oint_L d\vec{\ell} R \cos \varphi \\ R \cos \varphi &= x_L \\ d\vec{\ell}_x &= dx_L \\ d\vec{\ell}_y &= dy_L \\ d\vec{\ell}_z &= 0 \end{aligned}$$



$$\cos \theta_0 \left( \oint_L d\vec{\ell} R \cos \varphi \right)_x = -\cos \theta_0 \oint_L x_L dx = 0$$

$$\cos \theta_0 \left( \oint_L d\vec{\ell} R \cos \varphi \right)_y = \cos \theta_0 \oint_L x_L dy = \cos \theta_0 S$$

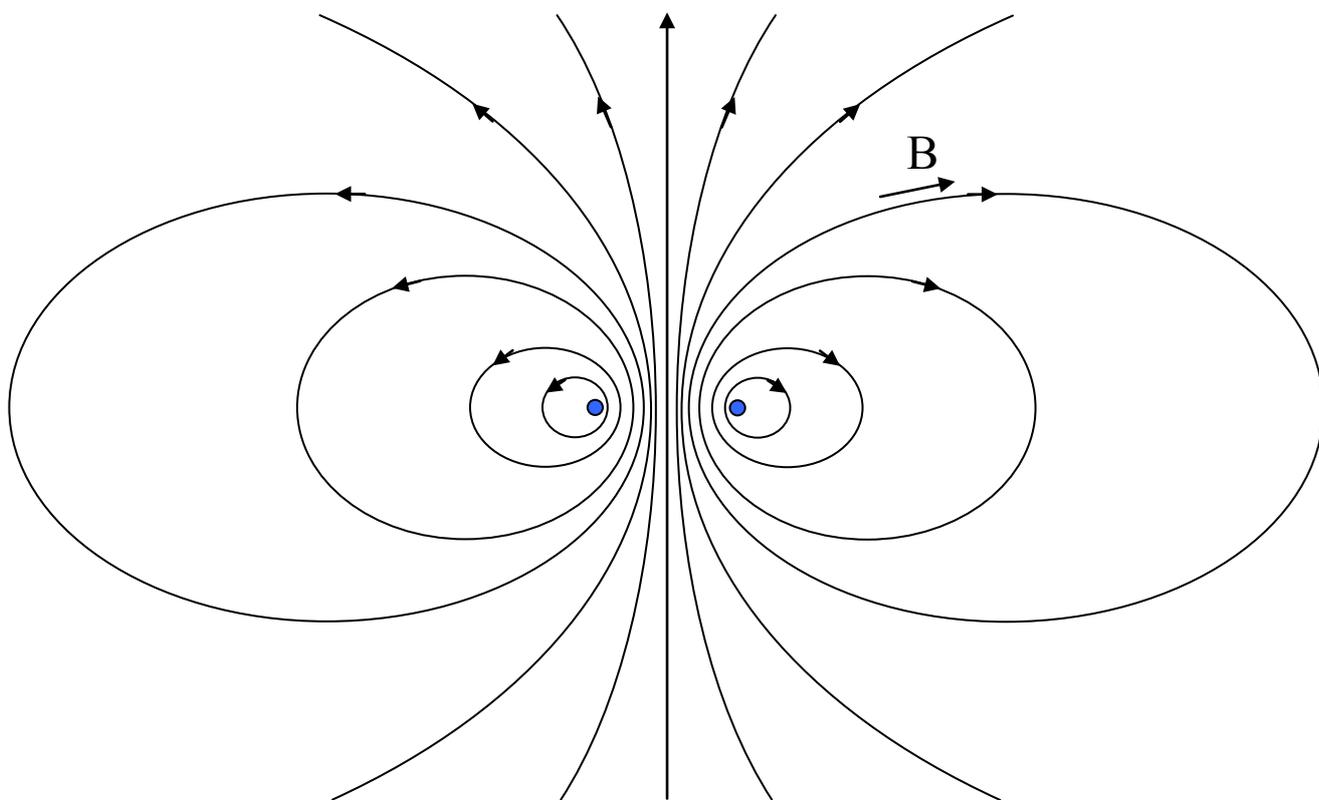
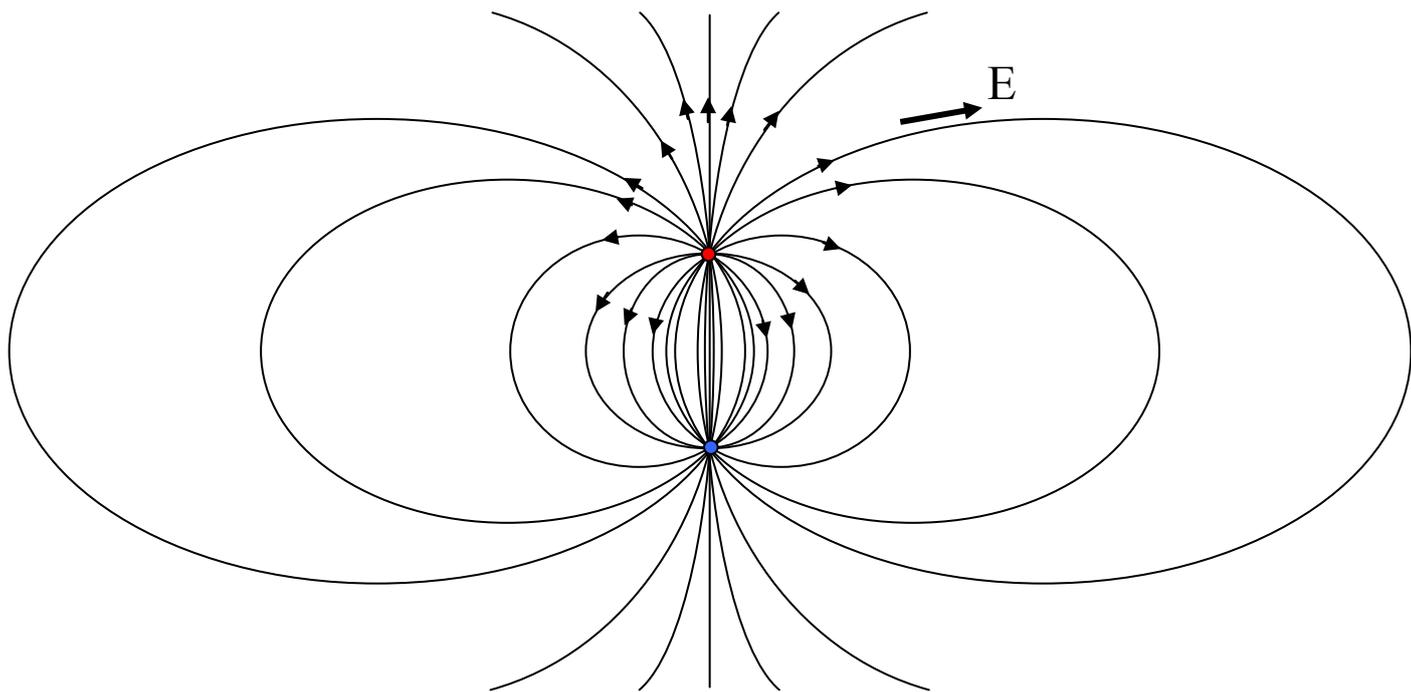
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I S}{2\pi r_0^3} \vec{N} + 3 \frac{\mu_0 I S}{4\pi r_0^4} \cos \theta_0 (\vec{y}_0 \wedge \vec{r}_0) = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi r_0^3} + 3 \frac{\mu_0}{4\pi r_0^5} (\vec{m} \wedge \vec{r}_0) \wedge \vec{r}_0$$

$\vec{m} = I\vec{S}$  - moment dipolaire magnétique

coordonnées sphériques :

$$B_r = \frac{\mu_0 m}{2\pi r_0^3} \sin \theta_0, \quad B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r_0^3} \cos \theta_0$$

même comme le dipôle électrique



## Force d'un champ externe sur un dipôle magnétique

1. Force résultante :

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = I \oint_L d\vec{r} \wedge \vec{B}$$

Si l'axe z est choisi parallèle à  $\vec{m}$ , on peut démontrer (TD), que :

$$F_x = m_z \frac{\partial B_x}{\partial z}, \quad F_y = m_z \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad F_z = m_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad \text{ou}$$

$$\vec{F} = \nabla \vec{B} \cdot \vec{m} \quad (\text{dipôle électrique : } \vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E})$$

2. Moment de torsion :

$$d\vec{T} = \vec{r} \wedge d\vec{F} = I \vec{r} \wedge (d\vec{r} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{T} = I \oint_L \vec{r} \wedge (d\vec{r} \wedge \vec{B}) = I \oint_L \left[ d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) + \vec{B} (d\vec{r} \cdot \vec{r}) \right]$$

$$\begin{aligned} (d\vec{r} \times \vec{r}) \times \vec{B} &= \vec{r} (d\vec{r} \cdot \vec{B}) - d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) \\ &= \vec{r} (d\vec{r} \cdot \vec{B}) + d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) + \vec{r} (\vec{r} \cdot d\vec{B}) - \vec{r} (\vec{r} \cdot d\vec{B}) - 2d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) \\ &= d[\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B})] - \vec{r} (\vec{r} \cdot d\vec{B}) - 2d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{T} &= \frac{I}{2} \oint_L 2d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) + I \oint_L \vec{B} (d\vec{r} \cdot \vec{r}) \\
&= -\frac{I}{2} \left[ \oint_L (d\vec{r} \wedge \vec{r}) \times \vec{B} + \cancel{\oint_L d[\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B})]} - \oint_L \vec{r} (\vec{r} \cdot d\vec{B}) \right] + I \oint_L \vec{B} (d\vec{r} \cdot \vec{r}) \\
&\approx -\frac{I}{2} \left( \oint_L d\vec{r} \wedge \vec{r} \right) \times \vec{B} + I \vec{B} \frac{1}{2} \cancel{\oint_L d(\vec{r} \cdot \vec{r})} = I \vec{S} \wedge \vec{B}
\end{aligned}$$

$$\vec{T} = \vec{m} \wedge \vec{B} \quad (\text{dipôle électrique } \vec{T} = \vec{p} \wedge \vec{E})$$

Conclusions :

1. Si le moment du dipôle magnétique est parallèle à B, pas de torsion
2. La force générale  $\sim \text{Grad } B$  (et pas à B)
3. Le champ du dipôle – comme le champ d'un aimant

## Interactions magnétiques

Pour l'instant :

### I. Champ :

1. Champ créé par une charge en mouvement

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \vec{v} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

2. Champ créé par un élément de courant :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \text{ (Biot-Savart)}$$

3. Champ de fil droit  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi d} \vec{I} \wedge \frac{\hat{d}}{d}$  (d – distance de fil)

4. Champ de boucle de courant : dipôle magnétique

### II. Force magnétique sur

1. Charge

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \text{ (partie magnétique de la force de Lorentz)}$$

effet Hall, mouvement cyclotron

2. Élément de courant :  $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \wedge \vec{B}$  - loi de Laplace

3. Fil droit :  $\vec{F} = I\vec{L} \wedge \vec{B}$

4. Dipôle magnétique :  $\vec{F} = \nabla \vec{B} \cdot \vec{m}$  (force résultante)

$$\vec{T} = \vec{m} \wedge \vec{B} \text{ (moment de torsion)}$$

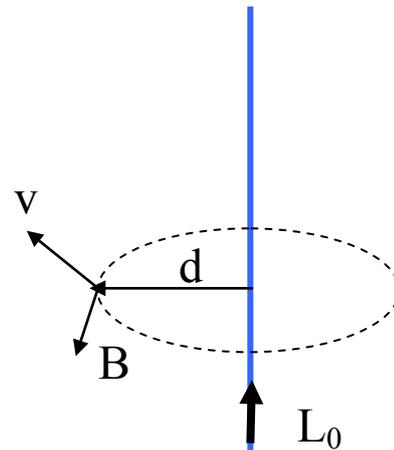
Maintenant :

### III. Interactions entre les 'éléments' magnétiques

1. Force sur une charge en mouvement exercée par une ligne droite de courant

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi d} \vec{I} \wedge \frac{\hat{d}}{d}$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi d} qI\vec{v} \wedge \left( \vec{L}_0 \wedge \frac{\hat{d}}{d} \right)$$



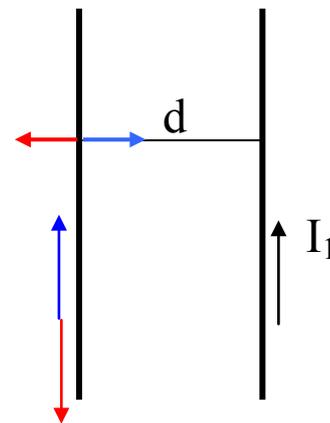
Pour  $v$  – parallèle à  $I$  :

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi d} qIv\hat{d} \text{ - force de l'attraction ou de la répulsion par la ligne}$$

2. Force entre deux lignes de courant parallèle :

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 q_2 v_2 \hat{d} = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 I_2 L_2 \hat{d}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{F}}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 I_2 \hat{d}$$



e.g. courant  $I = 50$  A,  $d = 1$  cm :

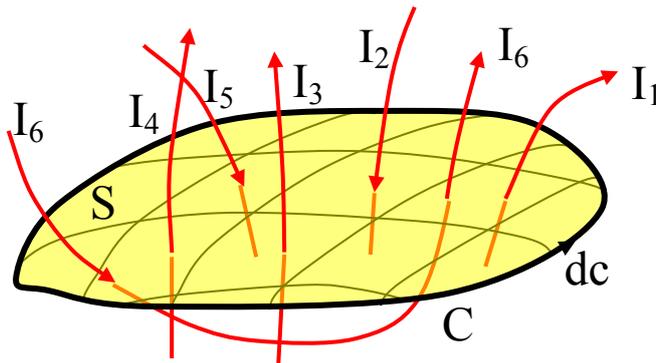
$$F/m = 4\pi 10^{-7} \cdot 50 \cdot 50 / 2\pi 10^{-2} \text{ N/m} = 0.05 \text{ N/m}$$

Courants co-directionnels : attraction  
 contre-directionnels : répulsion  
 (les mesures faites par Ampère)

## Théorème d'Ampère

Circulation de champ magnétique est égale à la somme des

courants multipliée par  $\mu_0$  :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 \sum_{\text{encadrés par } C} I$$


Remarques :

### 1. Les contributions

$$\text{de } I_{1,3,4} > 0$$

$$\text{de } I_{2,5} < 0$$

$$\text{de } I_6 = 0$$

### 2. Le théorème ne dépend pas de S (C – contour de S)

3. Il joue le même rôle pour calculer le champ magnétique que le théorème de Gauss pour le champ électrique

4. Il représente la forme intégrale de la quatrième équation de Maxwell (cas statique)

Démonstration :

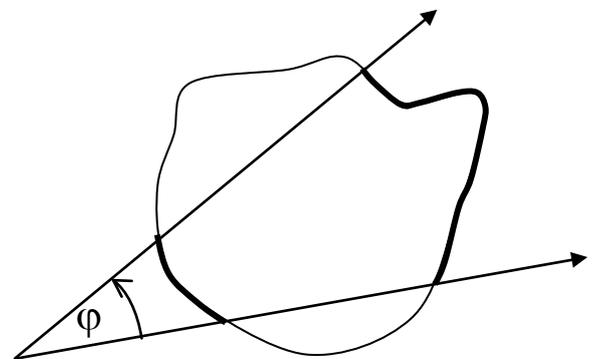
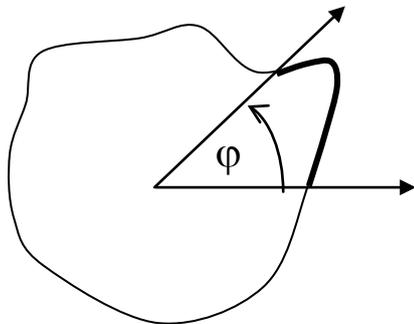
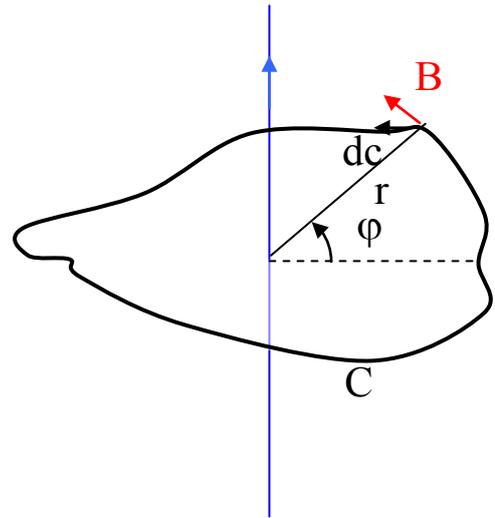
1. Une ligne de courant droite :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \oint_C B dc_B = \oint_C B r d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C \frac{1}{r} r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C d\varphi$$

$$\oint_C d\varphi = \begin{cases} 2\pi & \text{- la prolongation de } d\ell \text{ traverse } C \\ 0 & \text{- la prolongation de } d\ell \text{ ne traverse pas } C \end{cases}$$



Remarque : car  $B \perp I$  et  $B \perp r$ ,

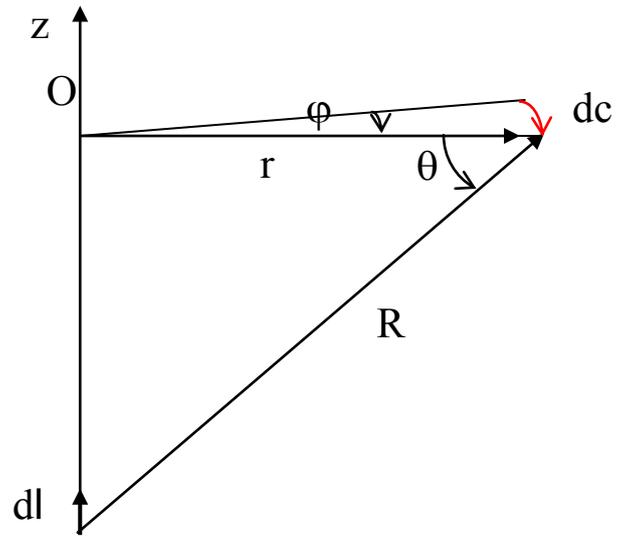
$\Rightarrow dc_B = r d\varphi$  pour chaque C (circulaire ou non, plat ou non)

2. Cas général (ou presque – Ampère utilisa trois expériences)

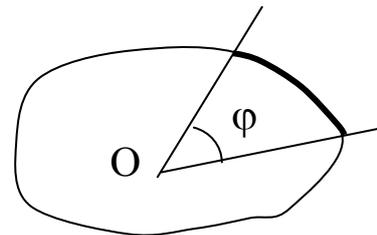
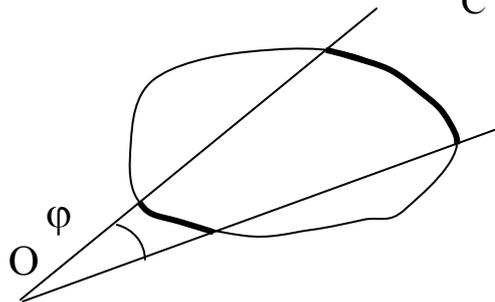
$$dB_{dl} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^3} R \cos \theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{rd\theta}{\cos^2 \theta} \frac{\cos^3 \theta}{r^3} \frac{r}{\cos \theta} \cos \theta$$

$$\left( \begin{array}{l} \frac{z}{r} = \text{tg} \theta \Rightarrow dz = dl = \frac{rd\theta}{\cos^2 \theta} \\ R = \frac{r}{\cos \theta} \end{array} \right)$$



$$\Rightarrow dB_{dl} = \frac{\mu_0 I \cos \theta}{4\pi r} d\theta \Rightarrow \oint_C dB_{dl} dc_B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{\cos \theta}{r} d\theta r d\phi$$



O – à l'extérieur- le contour est passé 2 fois dans les directions opposées :  $\oint_C d\phi = 0$ .

O – à l'intérieur :  $\oint_C d\phi = 2\pi$

$$\Rightarrow \oint_C dB_{dl} dc_B = \frac{\mu_0 I}{2} \int_0 \cos \theta d\theta$$

$$\oint_C dB dc_B = \mu_0 I \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d \sin \theta = \mu_0 I$$

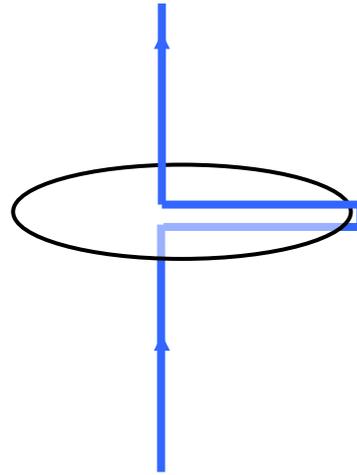
$$= 0$$

O – à l'intérieur

O – à l'extérieur

### 3. Cas plus général

(e. g. la preuve ne marche pas pour le courant suivant :)



Si on considère un seul segment,  
les résultats sont différents :  
prenons une ligne pour  $z < 0$  (ou  $> 0$ )

$$\int_{z < 0} \cos \theta d\theta = 1 \text{ et non } 2$$

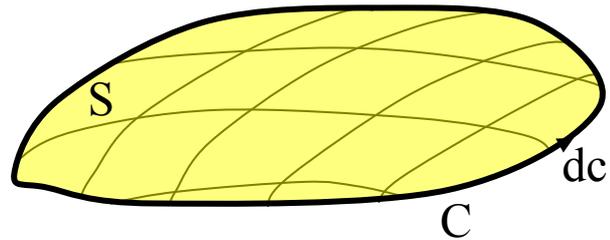
Question : Un segment – existe-t-il ?

Oui : une ligne entre les deux sphères chargées

Mais ce cas n'est pas statique – on verra plus tard

**Théorème de Stokes :**

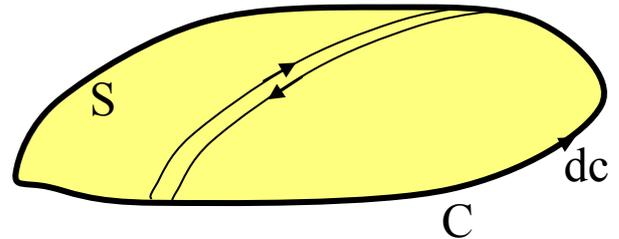
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{c} = \int_{S_C} \text{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$



preuve (comme le théorème d'Ostrogradski-Gauss) :

**S – divisée en deux :**

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{c} = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{c} + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{c}$$



(les contribution des parties internes s'annulent)

**S – divisée en N parties :**

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{c} = \sum_{j=1}^N \oint_{C_j} \vec{F} \cdot d\vec{c} = \sum_{j=1}^N \frac{\oint_{C_j} \vec{F} \cdot d\vec{c}}{S_j} S_j$$

espérons que la limite suivante existe et appelons cette limite rotationnel de  $\vec{F}$  ( $\text{rot} \vec{F}$ ) :

$$\text{rot} \vec{F} \cdot \hat{N} = \lim_{S_j \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_j} \vec{F} \cdot d\vec{c}}{S_j}$$

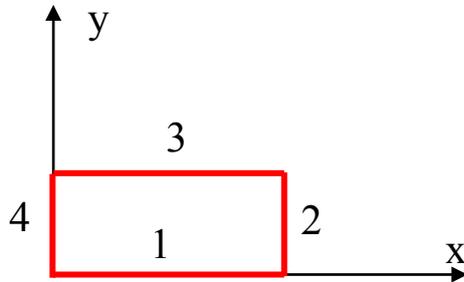
Par exemple :  $(\text{rot} \vec{F})_x = \text{rot} \vec{F} \cdot \hat{x}$ , etc.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{c} = \lim_{S_j \rightarrow 0} \sum_j S_j \frac{\oint_{C_j} \vec{F} \cdot d\vec{c}}{S_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{S_j \rightarrow 0} S_j \lim_{S_j \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_j} \vec{F} \cdot d\vec{c}}{S_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{S_j \rightarrow 0} S_j (\text{rot} \vec{F} \cdot \hat{N}_S) = \int_S \text{rot} \vec{F} \cdot \hat{N}_S ds$$

## L'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes

Boucle rectangulaire avec  $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{z}}$  :



$$\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{c}} = \int_1 F_x dx + \int_2 F_y dy + \int_3 F_x dx + \int_4 F_y dy$$

$$\int_1 F_x dx + \int_3 F_x dx \approx \int_x^{x+\Delta x} \left[ F_x(x, y) + \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial x} x \right] dx$$

$$+ \int_{x+\Delta x}^x \left[ F_x(x, y + \Delta y) + \frac{\partial F_x(x, y + \Delta y)}{\partial x} x \right] dx$$

$$\approx \int_x^{x+\Delta x} \left[ F_x(x, y) + \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial x} x \right] dx$$

$$- \int_x^{x+\Delta x} \left[ F_x(x, y) + \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial x} x + \frac{\partial^2 F_x(x, y)}{\partial x \partial y} \Delta y x \right] dx$$

$$\approx - \int_x^{x+\Delta x} \left[ \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} \Delta y \right] dx \approx - \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} \Delta y \Delta x = - \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} \Delta s$$

même :

$$\int_2 F_y dy + \int_4 F_y dy \approx \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta s$$

$$(\text{rot} \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y};$$

$$(\text{rot} \vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x};$$

$$(\text{rot} \vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

Rotationnel de B :

$$\int_{S_C} \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} \stackrel{\text{def.}}{=} \mu_0 \sum_j I_j \stackrel{\text{Ampère}}{=} \mu_0 \int_{S_C} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{pour chaque } S$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}} \quad (\text{J} - \text{densité de courant})$$

Rotationnel de E :

Déjà vu :

$q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{c} = W_{BA}$  - travail pour déplacer q entre A et B ne dépend pas du chemin AB

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{c} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{c} = 0 \quad \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = 0$$

## Les équations principales d'électrostatique et magnétostatique

Forme différentielle :	intégrale :	sens physique :
$\text{rot}\vec{E} = 0$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = 0$	force conservative
$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{VS}}{\epsilon_0}$	conservation de charge
$\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{J}$	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 I_C$	courants stationnaires
$\text{div}\vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$	pas de charge magnétiques

Conséquence pour J :  $\text{div}(\text{rot}B) = 0 \Rightarrow \text{div}\vec{J} = 0$

Valable pour des courants stationnaires (qui ne dépendent pas de

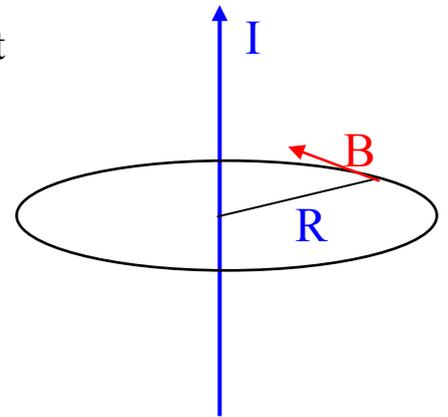
temps) :  $\text{div}\vec{J} = 0 \Leftrightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0$  - flux de courant à travers

d'une surface fermée est nul (si non, on va avoir l'accumulation de charges).

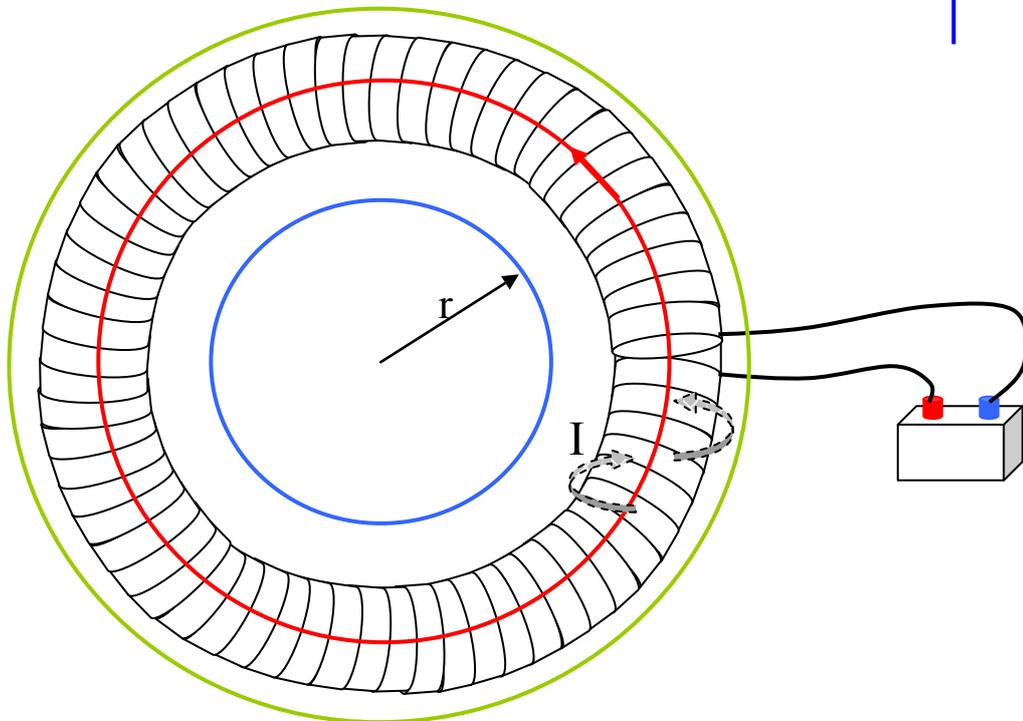
Le théorème d'Ampère joue le même rôle en magnétostatique que le théorème de Gauss en électrostatique (on a vu que le théorème de Gauss pour le champ magnétique n'est pas très utile pour calculer le champ).

**Exemple 1 :** Champ d'une ligne de courant

$$\mu_0 I = \oint_{\text{cerce}} \mathbf{B} d\ell = B 2\pi R \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



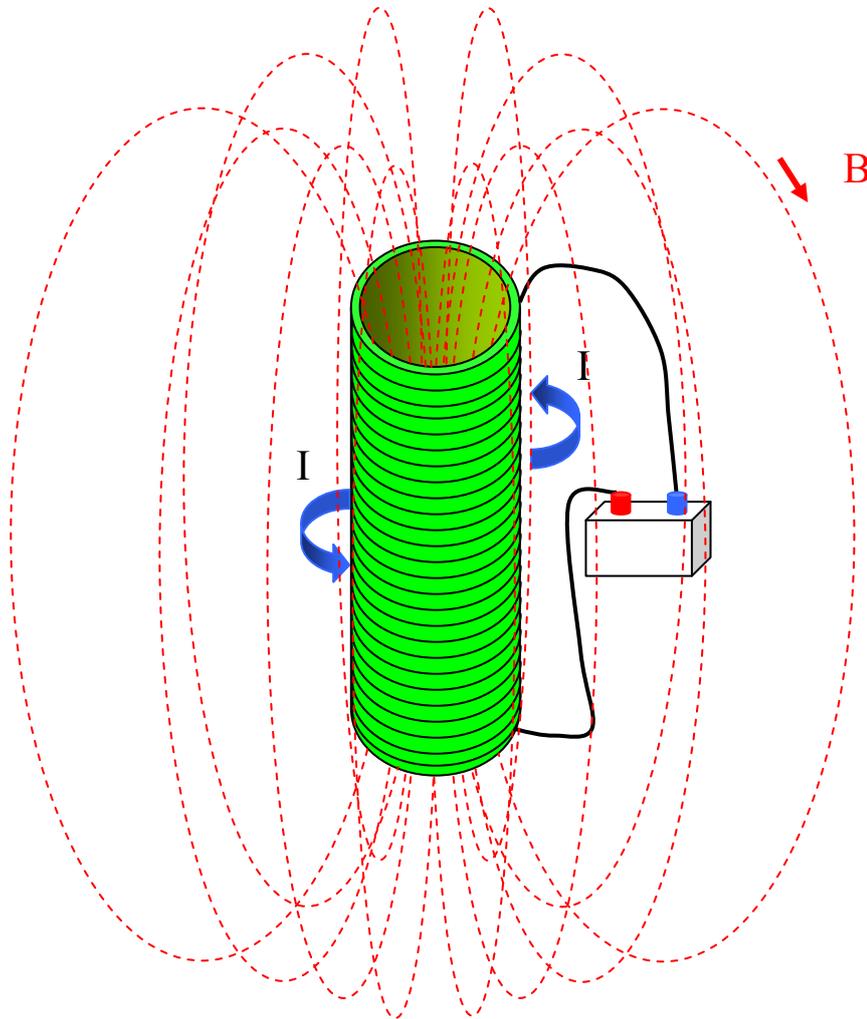
**Exemple 2 :** Tore



$$\left. \begin{array}{l} \text{vert : } \oint_C \mathbf{B} d\ell = 2\pi r B = 0 \\ \text{bleu : } \oint_C \mathbf{B} d\ell = 2\pi r B = 0 \end{array} \right\} \leftarrow \boxed{\Sigma I = 0}$$

$$\text{rouge : } \oint_C \mathbf{B} d\ell = 2\pi r B = \mu_0 I N \Rightarrow B = \mu_0 I \frac{N}{2\pi r} = \mu_0 I \frac{N}{L}$$

### Exemple 3 : Champ d'un solénoïde (bobine cylindrique)

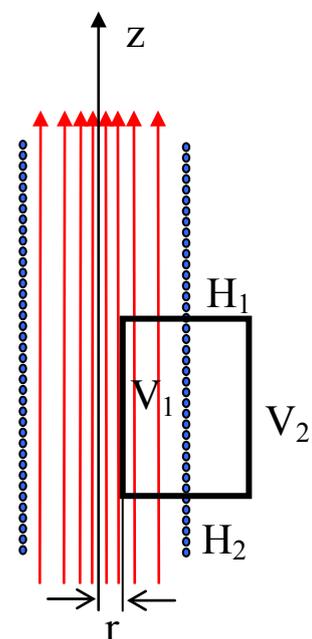


Calculer 'sans calculs' :

$L$  (longueur)  $\gg$  diamètre :

1.  $B$  ne dépend pas de  $z$  loin des bouches :
2. solénoïde = tore ( $r \rightarrow \infty$ )

**champ à l'extérieur 0**



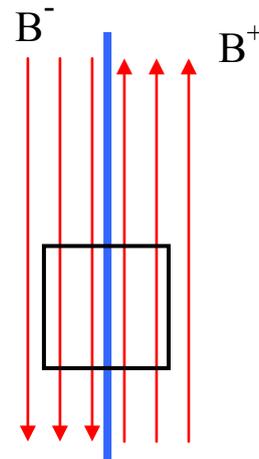
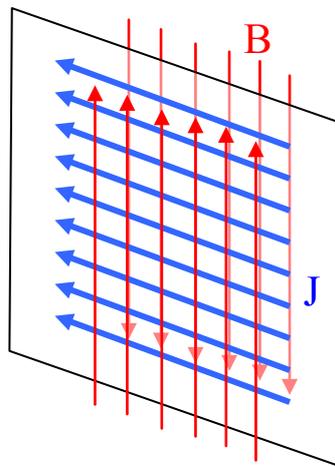
à l'intérieur :

$$\mu_0 IN = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \int_{V_1} B(r)dc + \int_{V_2} 0dc + \int_{H_1} 0dc + \int_{H_2} 0dc$$

$\mu_0 IN = B(r)L$ , mais le résultat ne dépend pas de  $r$

$$B = \mu_0 In, \quad n - \text{densité de tours}$$

**Exemple 4** : Nappe de courant



$$\mu_0 IL = B^+L - B^-L ; \quad \text{symétrie : } |B^+| = |B^-|$$

$$\Rightarrow B^+ = -B^- = \frac{\mu_0 I/L}{2} = \frac{\mu_0 J}{2}$$

## Discontinuité de champ magnétique

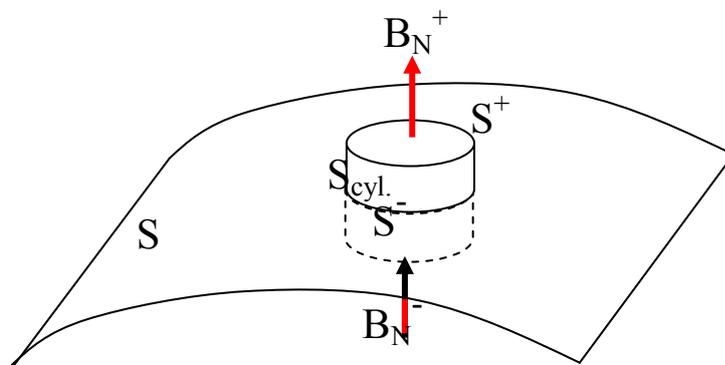
1. Nappe plane avec J uniforme :

$$B_N = 0 \Rightarrow \Delta B_N = 0, \quad \Delta B_T = \mu_0 J \text{ et } \Delta B_T \perp J$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{B}_T = \hat{N}_S \wedge \vec{J}$$

2. Cas général (une surface arbitraire et l'existence d'autres sources)

a)



$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\Sigma^s} \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{S_{cyl}} \vec{B}_T \cdot d\vec{S}_{cyl} + \int_{S^+} B_N^+ dS - \int_{S^-} B_N^- dS \xrightarrow{S_{cyl} \rightarrow 0} \int_{S^\pm} (B_N^+ - B_N^-) dS \end{aligned}$$

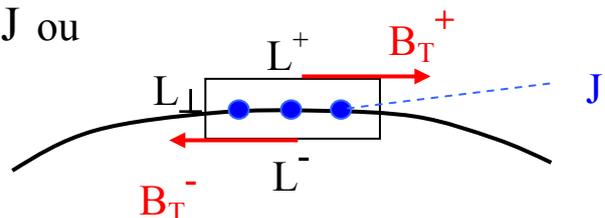
valable pour chaque  $S^\pm \Rightarrow B_N^+ = B_N^-$

b)

$$\mu_0 J L^\pm = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{c} \xrightarrow{L_\perp \rightarrow 0} \int_{L^+} B_T^+ dc - \int_{L^-} B_T^- dc = \int_{L^\pm} (B_T^+ - B_T^-) dc$$

pour chaque  $L^\pm \Rightarrow \Delta B_T = \mu_0 J$  ou

$$\Rightarrow \Delta \vec{B}_T = \mu_0 \hat{N}_S \wedge \vec{J}$$



## Force magnétohydrodynamique

Si  $B_1$  et  $B_2$  sont des valeurs tangentiels du champ magnétique aux deux côtés de surface d'une nappe de courant ayant une densité de courant  $J$  :

$$\text{Champ moyen : } \quad B_{T,\text{moyen}} = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$$

$$\begin{aligned} \text{La force sur } 1\text{m}^2 : \quad F/S &= \frac{1}{2}(B_1 + B_2) J \\ &= \frac{1}{2}(B_1 + B_2) \frac{1}{\mu_0} (B_1 - B_2) = \frac{B_1^2 - B_2^2}{2\mu_0} \end{aligned}$$

Sans champ externe  $|B_1| = |B_2|$  : pas de force.

Dans champ externe  $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{B}_N + \vec{B}_{//j} + \vec{B}_{\perp j}$ , la partie normale à la surface  $\vec{B}_N$  va dévier le courant dans le plan de la nappe, la partie parallèle au courant  $\vec{B}_{//j}$  ne va pas réagir sur le courant et la partie tangentielle de la nappe et perpendiculaire au courant  $\vec{B}_{\perp j}$  va s'ajouter au composants tangentiels du champ créé par le courant de la nappe  $B_1$  et  $B_2$  (qui ont les signes différentes à deux côtés de la nappe) :

$$\frac{F_N}{S} = \frac{(B_1 + B_{\perp j})^2 - (B_1 - B_{\perp j})^2}{2\mu_0} = 2JB_{\perp j}$$

Cette force va dévier le courant en direction perpendiculaire de la nappe.

## Potentiel vecteur

Pour le champ électrique on a introduit le potentiel :

$$V = \int_{\text{Volume}} \frac{\rho_v}{4\pi r} dv$$

et le champ électrique est égal au gradient  $V$  :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V.$$

Pour le champ magnétique ça ne marche pas, car  $\text{rot}B \neq 0$  est  $\nabla \wedge (\nabla U) = 0, \forall U$  ( $\vec{\nabla}$  est parallèle à  $\vec{\nabla}U$ ).

On peut introduire une fonction vectorielle, appelée **potentiel vecteur** :

$$A : \vec{B} = \text{rot}\vec{A}.$$

La deuxième équation pour  $B$  ( $\nabla \cdot B = 0$ ) est automatiquement satisfaite pour  $A$ .

Comme le potentiel électrique,  $A$  est défini à une fonction près :  
Si

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\varphi \Rightarrow B \text{ reste le même.}$$

Au lieu d'ajouter  $\text{grad}\varphi$ , on est libre de choisir différemment  $\text{div}A$  :

$$\text{div}\vec{A}' = \text{div}\vec{A} + \nabla^2\varphi \Rightarrow \text{pour chaque } A \text{ on peut choisir } \varphi :$$

$$\nabla^2\varphi = -\text{div}\vec{A} \Rightarrow \text{div}\vec{A}' = 0 \text{ sans changement de rot}A.$$

En magnétostatique la meilleur choix est  $\text{div}\vec{A} = 0$  (on verra immédiatement pourquoi).

Détermination de  $\vec{A}$  :

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$

$$\Rightarrow \text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \mu_0\vec{J} \text{ est-ce que cette équation est plus utile ?}$$

Utilisons  $\text{div}\vec{A} = 0$  :

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J}$$

Ca représente 3 équations de Poisson pour les trois composants de  $\vec{A}$  :

$$\nabla^2 A_{x,y,z} = -\mu_0 J_{x,y,z}$$

**Rappel** pour le potentiel électrique :  $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  avec solution

ayant la forme :

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{volume de toutes les charges}} \frac{\rho(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{|\vec{r} - \vec{\tilde{r}}|} d\tilde{v}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{volume de tous les courants}} \frac{\vec{J}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{|\vec{r} - \vec{\tilde{r}}|} d\tilde{v}$$

???

$$\text{div}\vec{A} = 0$$

$$\begin{aligned}
\nabla(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_J} \nabla(\vec{r}) \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{v}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_J} \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla(\vec{r}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{v}' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_J} \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{v}' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_J} \left\{ \left[ \nabla(\vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') \right] \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} d\vec{v}' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_J} \nabla(\vec{r}') \cdot \left[ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] d\vec{v}' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{s}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}
\end{aligned}$$

div J = 0

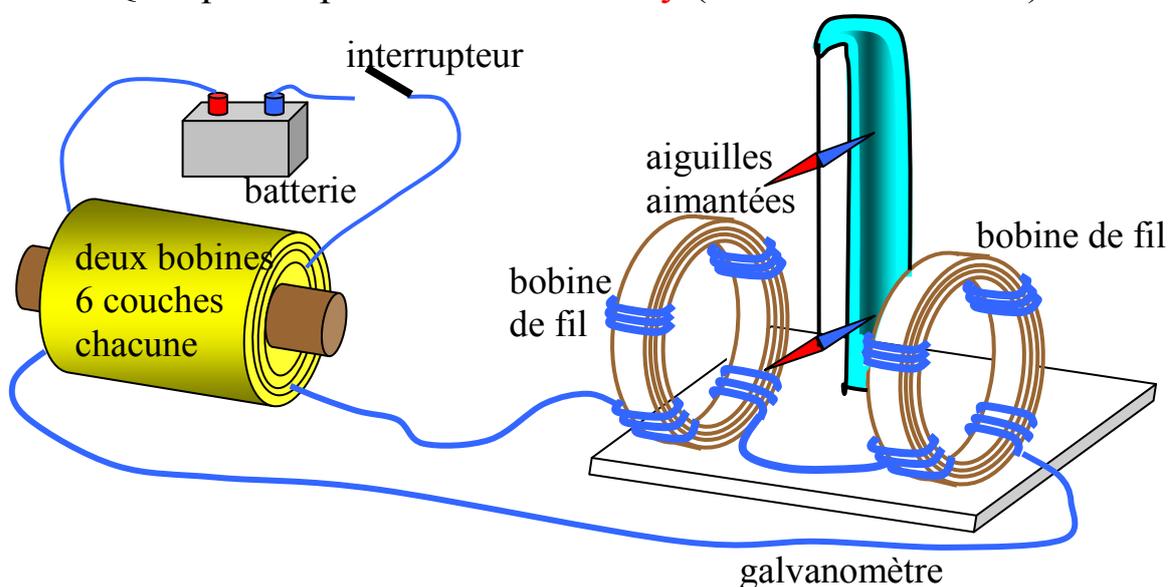
$$\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{s}(\vec{r}') = 0 \text{ pour les courant stationnaires.}$$

## L'induction électromagnétique

1. Un fil avec un courant constant produit un champ magnétique constant.
2. Un fil avec un courant constant placé dans un champ magnétique constant est soumis à une force perpendiculaire au courant.

Question : est-ce que le champ magnétique peut créer un courant électrique ?

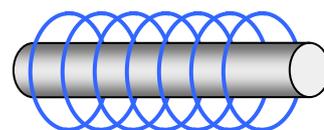
- I. Quelques expériences de **Faraday** (entre 1831 et 1839) :



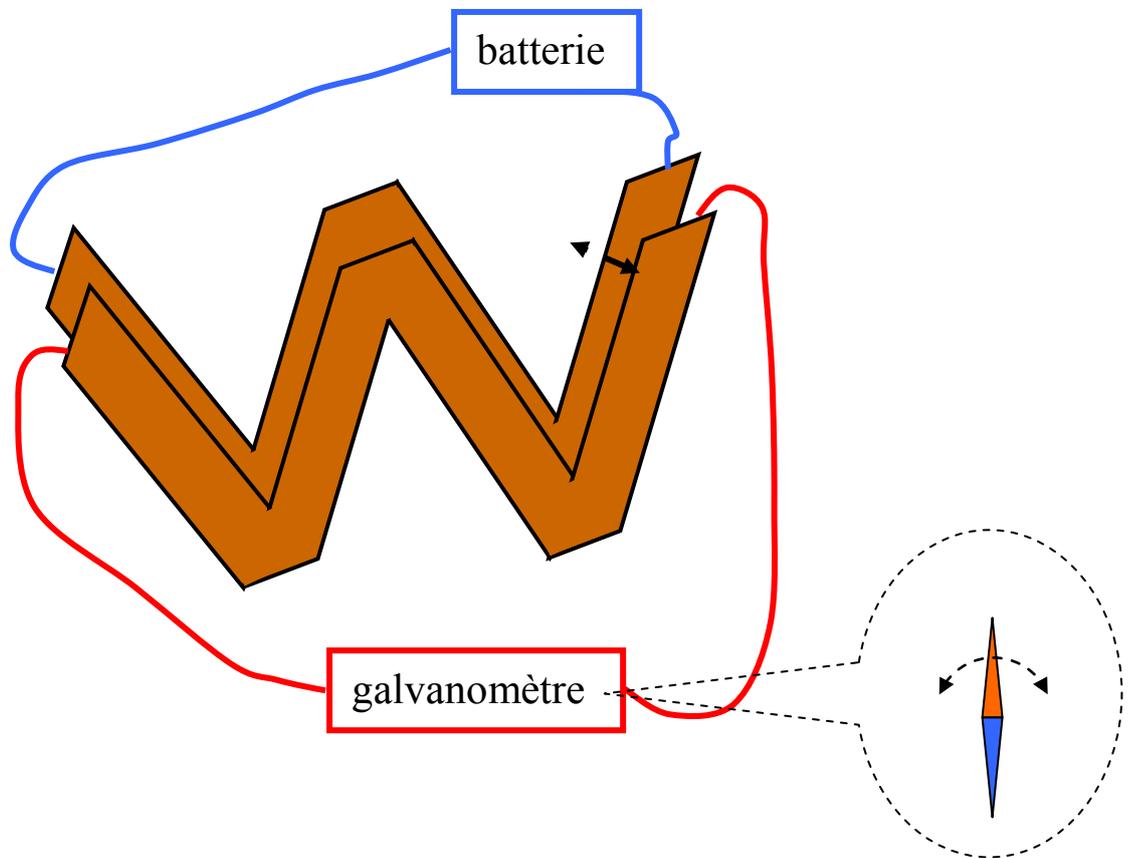
Deux aiguilles – la première pour compenser l'influence du champ magnétique terrestre. La déviation de la deuxième mesure le champ magnétique créé, donc le courant induit.

Interrupteur branché ou non – pas de déviation. Seulement pendant le branchement et de débranchement l'aiguille bouge.

Pour mesurer plus précisément ce mouvement Faraday remplaça le galvanomètre par un autre détecteur qui 'écrivait' les changements de courant - une bobine et une tige d'acier non-aimanté : le courant induit amène la tige dans un sens ou l'autre.



Deuxième expérience : deux plaques de cuivre ; en rapprochant et écartant les plaques l'aiguille de galvanomètre vibre



Conclusions :

Le courant électrique est induit :

- a) par changement de courant inducteur
- b) par mouvement relatif des fils

Quand les fils s'approchent, le courant induit est opposé au courant inducteur.

Explication :

Mouvement de charges dans un champ magnétique crée une force sur des charges

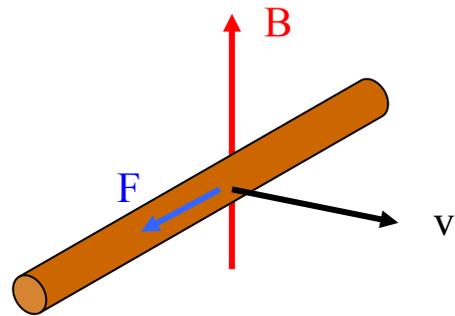
**Exemple 1** : Tige conductrice en mouvement dans un champ magnétique uniforme

Les charges libres sont soumises à une force

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

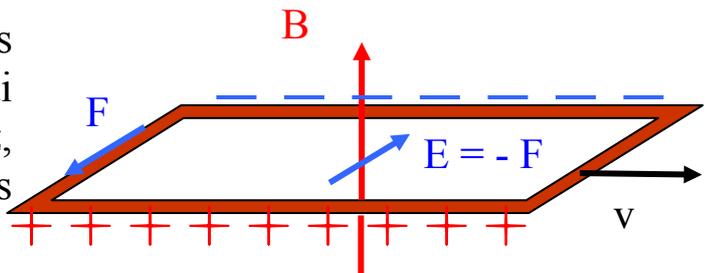
Elles se déplacent en direction de la force et un champ électrique est créé. En équilibre

$$q\vec{E} = -\vec{F}.$$



Pour étudier les courants, regardons une **boucle en mouvement inertiel dans un champ uniforme** :

La redistribution des charges crée un champ électrique qui compense la force de Lorentz, le mouvement de charges relatif à la boucle est arrêté.



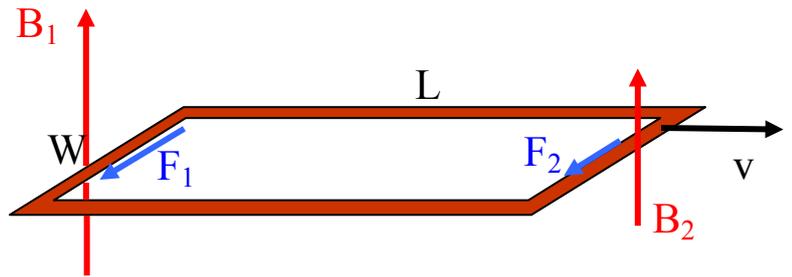
(La boucle doit inclure les détecteurs)

Conclusion : mouvement dans un champ magnétique uniforme ne crée pas de courant.

**Exemple 2** : Un contour rectangulaire en mouvement inertiel dans un champ magnétique non-uniforme

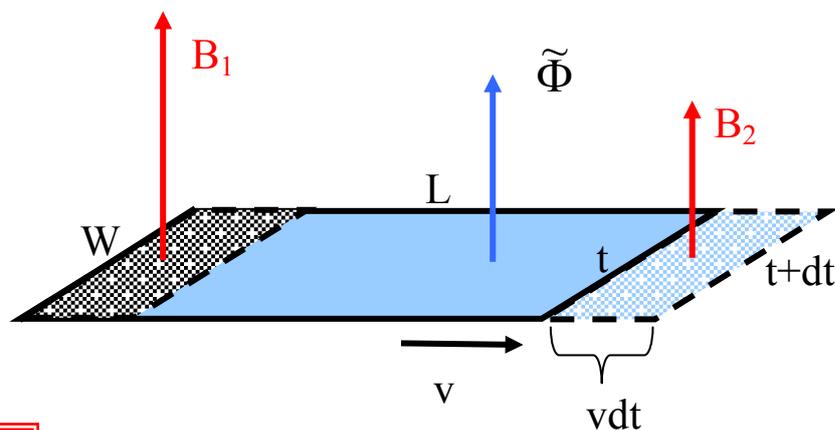
$$B_1 > B_2 \Rightarrow F_1 > F_2$$

La différence des forces crée un courant électrique (aussi en équilibre !)



Force électromotrice : le travail par unité de charge

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{q} \mathbf{F} \cdot \Delta \ell = v(B_1 - B_2)W = \frac{v dt}{dt} (B_1 - B_2)W \\ &= \frac{B_1 W dL - B_2 W dL}{dt} = -\frac{\tilde{\Phi}_2 - \tilde{\Phi}_1}{dt} = -\frac{\tilde{\Phi}_2 + \tilde{\Phi} - \tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}}{dt} \\ &= -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{dt} = -\frac{\Phi(t+dt) - \Phi(t)}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} \end{aligned}$$

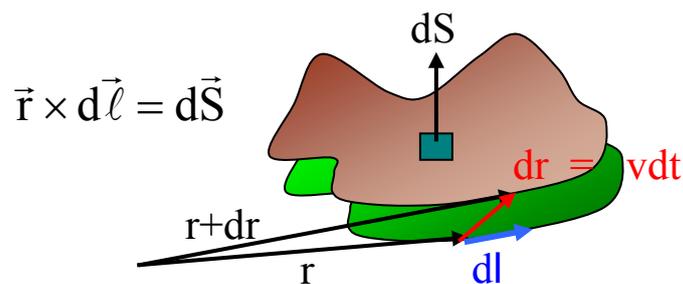


$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{S_c} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

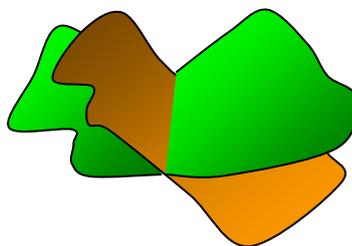
$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_c} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

**Exemple 3** : un contour arbitraire dans un champ stationnaire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} &= \frac{1}{q} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = - \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{v} \wedge d\vec{\ell}) \\
&\stackrel{\text{B-stationnaire}}{=} - \frac{1}{dt} \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{v} dt \wedge d\vec{\ell}) = - \frac{1}{dt} \oint_C \vec{B} \cdot [(\vec{r} + d\vec{r} - \vec{r}) \wedge d\vec{\ell}] \\
&= - \frac{1}{dt} \oint_C \vec{B} \cdot [(\vec{r} + d\vec{r}) \wedge d\vec{\ell}] + \frac{1}{dt} \oint_C \vec{B} \cdot [\vec{r} \wedge d\vec{\ell}] \\
&= - \frac{1}{dt} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{S}(t + dt) + \frac{1}{dt} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{S}(t) = - \frac{\Phi(t + dt) - \Phi(t)}{dt} = - \frac{d\Phi}{dt}
\end{aligned}$$

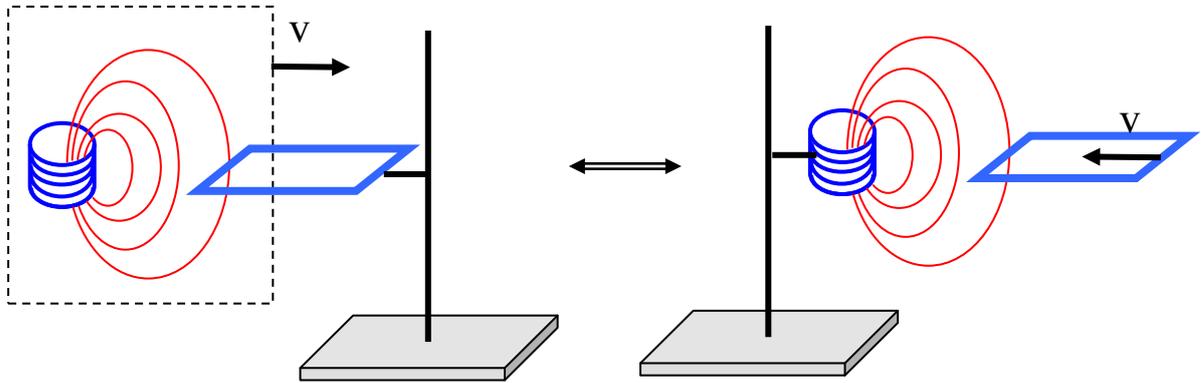


Remarque : l'équation est valable aussi pour la déformation du contour, pas seulement pour son déplacement



**Exemple 4** : Une boucle stationnaire avec la source du champ en mouvement

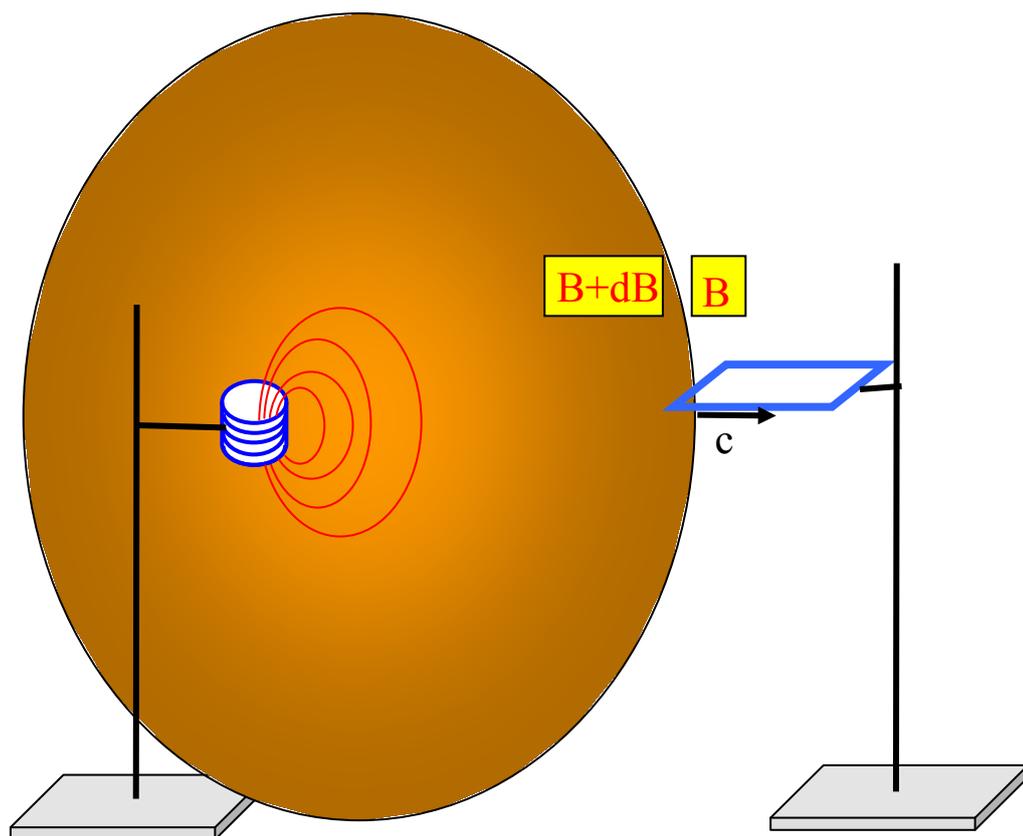
Principe d'équivalence des systèmes inertiels  $\Rightarrow$  même résultat



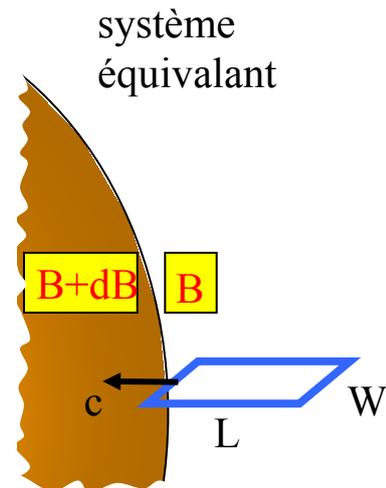
**Exemple 5** : La source et la boucle stationnaires, le champ changeant

Réponse **instantanée** – pas de courant induit

**Relativité restreinte** : le changement se propage avec la vitesse  $c$  :



$$\begin{aligned} \text{moment } t : B \\ t + dt : B + dB \\ \mathbb{E} &= (B_1 - B_2)cW = -dBcW \\ &= -d(BLW)/dt = -d\Phi/dt \end{aligned}$$



Règle la plus générale (la loi **de l'induction électromagnétique**) :

$$\mathbb{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Si la force électromotrice s'applique dans un circuit, elle crée un courant électrique, qui crée un champ magnétique ayant la direction opposée au changement qui l'induit. Cette règle s'appelle loi de Lenz. Cette loi exprime la loi générale de la nature que chaque système a la tendance de s'opposer au changement.

On a déjà démontré, qu'à partir de la loi d'induction :

$$\boxed{\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

une (la première) des équations de Maxwell

(en électrostatique  $\text{rot}\vec{E} = 0$ )

Remarque importante : cette loi est aussi valable si il n'y a pas de circuits est de charges !

## Inductance mutuelle

Prenons deux circuits  $C_1$  et  $C_2$  ayant une géométrie fixée. Si le circuit  $C_1$  est alimenté avec un courant  $I_1$ , le flux  $\Phi_{21}$  du champ magnétique  $B_1$ , créée par  $C_1$ , à travers de  $C_2$  est proportionnel au  $I_1$  :

$$\Phi_{21} = M_{21}I_1.$$

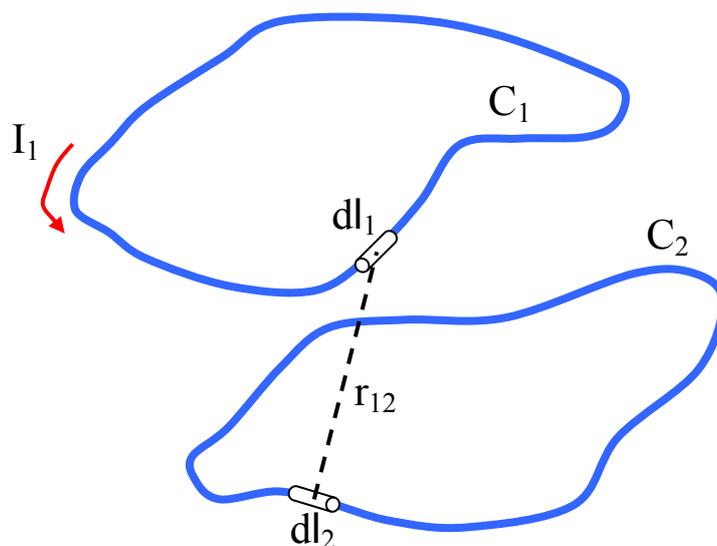
Soit la variation de  $I_1$  est lente. Si non, les points différents de  $C_2$  recevraient dans un moment fixé l'information différente de  $I_1$ , car cette information se propage avec la vitesse de la lumière  $c$ .

$$\frac{dI_1}{dt} \frac{L_2}{c} \ll I_1, \text{ ou } L_2 \text{ est la longueur de } C_2.$$

Dans ce cas, la force électromotrice induite dans  $C_2$  est donnée par :

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}.$$

$M_{21}$  – coefficient d'inductance mutuelle



Propriété :  $M_{21} = M_{12}$ .

La preuve :

$$\Phi_{21} = \oint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int_{C_2} \text{rot} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = \int_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = \int_{C_2} \left( \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1}{r_{21}} \right) \cdot d\vec{\ell}_2$$

$$\Rightarrow M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_2} \left( \int_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1}{r_{21}} \right) \cdot d\vec{\ell}_2 \quad \text{et} \quad M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \left( \int_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_2}{r_{12}} \right) \cdot d\vec{\ell}_1$$

mais  $r_{21} = r_{12} \implies M_{21} = M_{12}$

## Courant de déplacement

**Problème I** : déjà

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$

$$\text{div}\vec{J} = 0 \quad - \text{magnétostatique (mouvement stationnaire de charges : } \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0)$$

Si les charges peuvent changer la densité ?

Conservation de charges :

$$\oint_{S_V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial Q_V}{\partial t} \quad (\text{signe moins, parce que } J \text{ est dirigé vers l'extérieur})$$

$$\begin{aligned} \oint_{S_V} \vec{J} \cdot d\vec{S} &= \int_V \text{div}\vec{J} dV \\ \frac{\partial Q_V}{\partial t} &= \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV \quad \text{pour } \forall V \Rightarrow \text{div}\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \end{aligned}$$

contradiction

$$\text{mais, } \text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{J} \Rightarrow \mu_0\text{div}\vec{J} = \text{div}(\text{rot}\vec{B}) \equiv 0$$

**Problème II :**

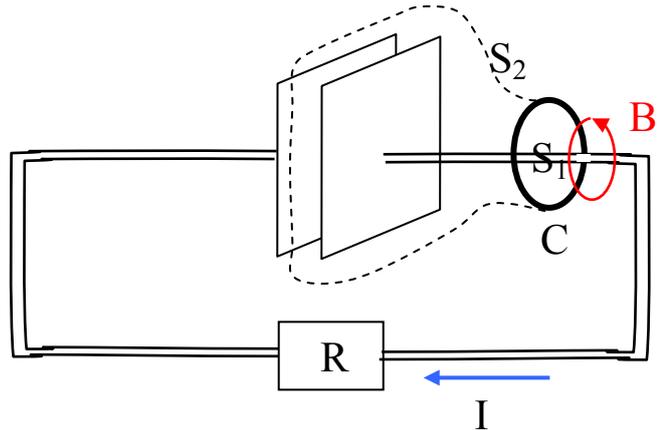
Théorème d'Ampère :  $\int_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_{\in S_C} I$  pour chaque S

Soit un condensateur chargé. Fermons le circuit par une résistance et appliquons le théorème d'Ampère pour une courbe C autour de fil.

Sur  $S_1$  :

$$2\pi R_C B = \mu_0 I(t)$$

mais on peut utiliser la surface  $S_2$  qui passe entre les plaques où  $I = 0$ .



Remarque : on a déjà discuté qu'on ne peut pas utiliser le théorème d'Ampère pour les segments ouverts et c'est le cas !

Maxwell (1865) ajouta au courant des charges un autre courant  $\vec{J}_d$ , appelé 'courant de déplacement' :

$$\vec{J} \rightarrow \vec{J} + \vec{J}_d : \quad \vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

et l'équation pour  $\text{rot} \vec{B} \Rightarrow \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

Questions :

1. Pourquoi exactement ce terme ?
2. Pourquoi Faraday ne l'a-t-il pas découvert ?
3. Quels sont les conséquences ?

Pourquoi  $+\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  ?

Conservation de la charge  $\Rightarrow \operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Mais  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow 0 = \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{J} + \epsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \operatorname{div} \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

et si  $\vec{J} \rightarrow \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  1) la charge est conservée

2)  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B}) = 0$  est satisfaite.

**Conséquence I :** Un champ électrique en train de varier induit un champ magnétique.

Pourquoi Faraday ne l'a-t-il pas découvert ?

Retournons au condensateur :

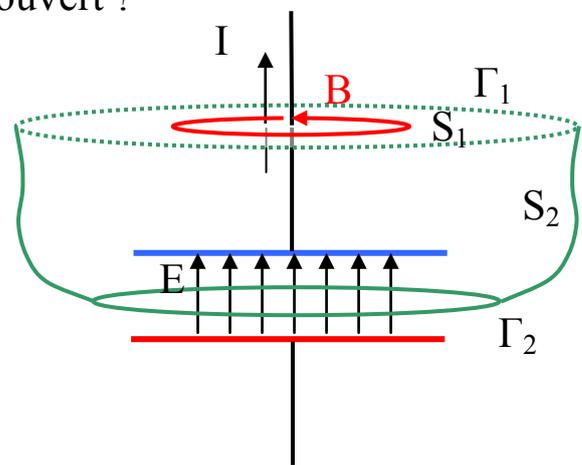
$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi R_{\Gamma_1} B$$

$$S_1 : 2\pi R_{\Gamma_1} B = \mu_0 I$$

$$S_2 : 2\pi R_{\Gamma_1} B = \oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_2} \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \mu_0 \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_1+S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{1}{\epsilon_0} = \mu_0 I$$

même résultat en mesurant  $I$  ou  $\partial E / \partial t$



En fait, la seule raison est que le courant de déplacement n'affecte pas l'équation responsable pour l'induction  $\text{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ .

Si  $\partial\vec{E}/\partial t$  est obtenu par le changement de courant, son effet direct, donne par la deuxième partie de l'équation  $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$  est bien masquée par la première partie.

Pour détecter directement l'influence de la deuxième partie il faut ou

- 1) que la variation de champ électrique se produit pendant le temps que met la lumière pour traverser l'appareil, ou
- 2) qu'il n'y a pas de courant des charges (e.g., les ondes dans le vide, détectées 20 ans plus tard (1888) par Hertz

### Conséquence II :

Les équations de Maxwell :

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{l'équation d'induction}$$

$$\text{rot}\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J} \quad \text{le théorème d'Ampère + la contribution de Maxwell}$$

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{la conservation de la charge et la loi de Coulomb}$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad \text{l'absence de charges magnétiques}$$

**Conséquence III : Les ondes électromagnétiques.**

Sans charges et courants :

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{rot}\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{div}\vec{E} = 0 \qquad \text{div}\vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \vec{B}) = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

rien que l'équation de propagation d'onde dans le temps et l'espace

e.g. **une** solution – l'onde plane monochromatique :

$$\vec{E} = \vec{z}_0 E_0 \sin(kx - \omega t) ; \quad k - \text{fréquence spatiale (nombre d'onde),}$$

$\omega - \text{fréquence temporelle circulaire}$

Observations :

**1.**  $k^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2$ , mais  $\frac{\omega}{k} = v$  - la vitesse de propagation de l'onde. Maxwell nota que numériquement pour la vitesse de la lumière :

$$c = v = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

et conclut que **la lumière est une onde électromagnétique**

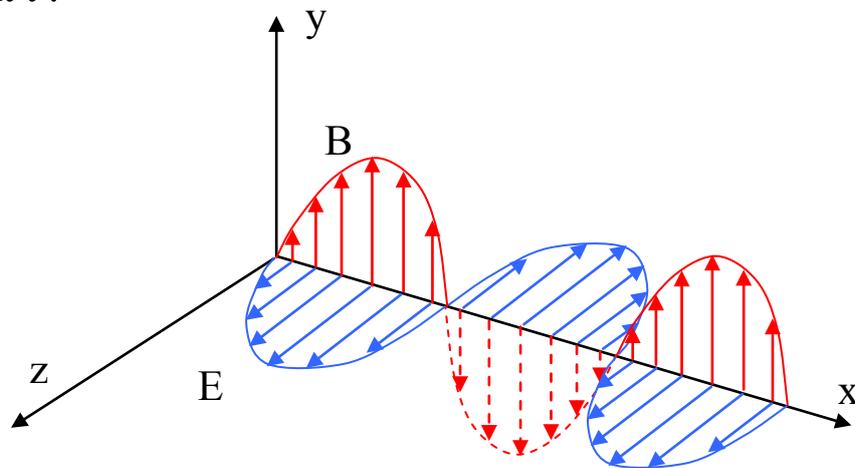
$$2. \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{y}_0 k \cos(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{y}_0 \frac{k}{\omega} \sin(kx - \omega t) = \vec{y}_0 B_0 \cos(kx - \omega t)$$

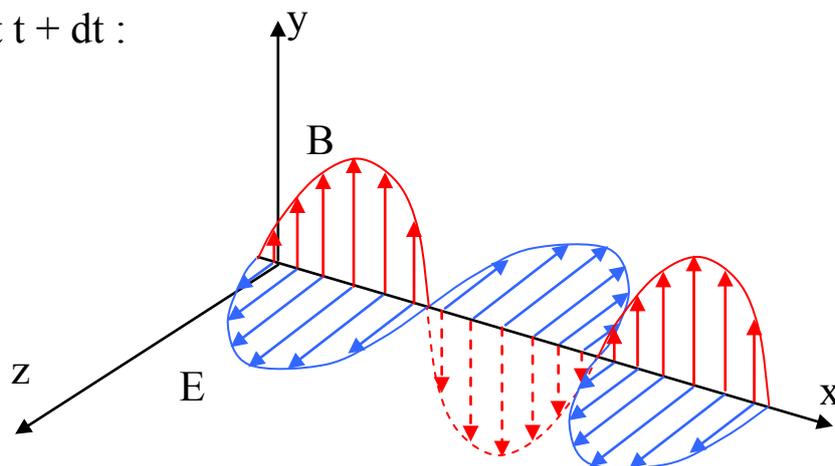
avec  $cB_0 = E_0$ ,

donc l'onde électromagnétique est une onde transversale : E et B sont perpendiculaires à la direction de propagation.

moment  $t$  :



moment  $t + dt$  :



## Propriétés magnétiques des matériaux

Rappel :

force résultante sur un dipôle magnétique :  $\vec{F} = \nabla \vec{B} \cdot \vec{m}$

( $\vec{m} = I\vec{S}$  - moment dipolaire magnétique)

moment de torsion :  $\vec{T} = \vec{m} \wedge \vec{B}$

Dans électrostatique :  
 moment dipolaire électrique  $\begin{cases} \text{permanent} \\ \text{induit} \end{cases}$

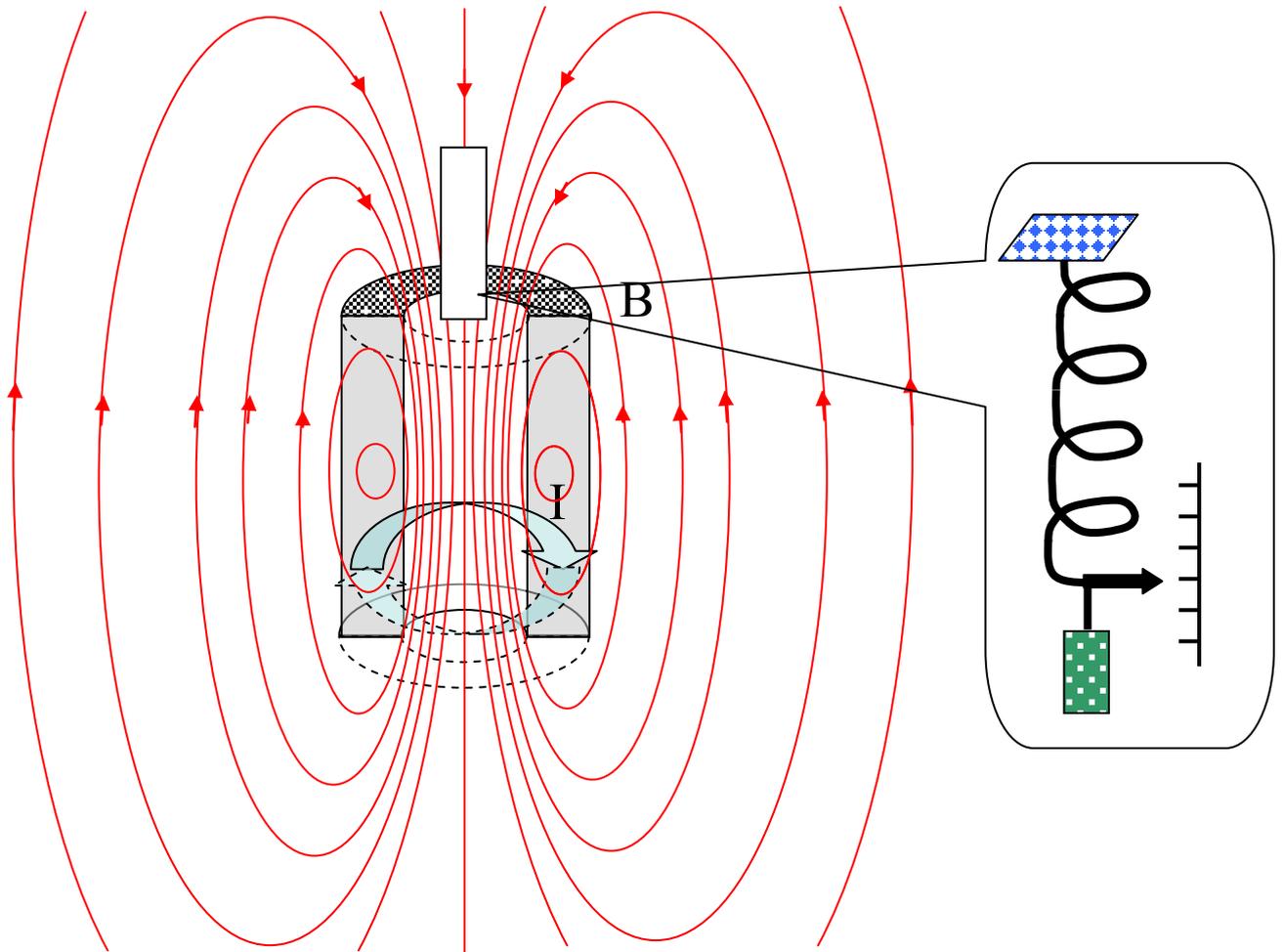
Le moment permanent est tourné dans la direction de E,  
 le moment induit est induit dans la direction de E.

- 1) le champ induit interne diminue le champ externe
- 2) les diélectriques et les conducteurs (neutres) sont retirés dans la direction d'augmentation du module du champ électrique

$$\vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E}, \quad \vec{p}_{\text{moyen}} \propto \vec{E}$$

Champ magnétique ?

Solénoïde – spire de courant, ou boucles multiples coaxiales, ou nappe cylindrique de courant (identiques) :



Observations :

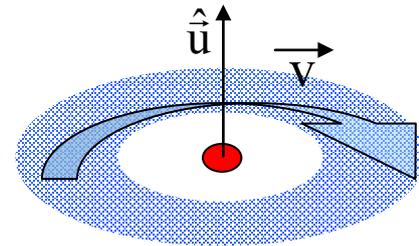
1. Objet placé dans le milieu ( $B$  plus fort) - pas de force (champ uniforme ou équilibre instable)
2. La force est plus forte près des bouts ( $\nabla B$  plus grand)
3. Trois types de réaction :
  - répulsion (eau, cuivre, diamant ... **diamagnétiques**)
  - attraction (sodium, aluminium, oxygène liquide ... **paramagnétiques**)
  - forte attraction :  $10^4$  fois plus forte (fer, magnétite - **ferromagnétiques**)
4. La direction ne dépend pas de la direction du courant
5.  $F \propto B$  pour les ferromagnétiques  
 $F \propto B^2$  pour les dia- et paramagnétiques

Explication :

1. Diamagnétisme – création de dipôles induits
2. Paramagnétisme – réorientation de dipôles existants
3. Ferromagnétisme – l'existence de grand nombre de dipôles non-compensés

Les électrons dans les atomes et les molécules – comme boucle de courant

$$\vec{m} = I\vec{S} = -\frac{ev}{2\pi R} \pi R^2 \hat{u} = -\frac{evR}{2} \hat{u}$$



moment orbital :

$$\vec{L} = m_e v R \hat{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

$-\frac{e}{2m_e}$  - facteur gyromagnétique (magnétomécanique) orbital

L'électron possède un autre moment cinétique – le **spin**

$$\vec{L}_{\text{spin}} = \frac{h}{4\pi} \quad \text{ou } h \text{ est la constante de Planck.}$$

Le moment magnétique associé :

$$\vec{m}_{\text{spin}} = -\frac{e}{m_e} \vec{L}_{\text{spin}} = -\frac{eh}{4\pi m_e} \quad (\text{le facteur gyromagnétique est } 2 \text{ fois plus grand)}$$

Dans le champ magnétique externe  $B$  le spin et le moment orbital magnétique doivent s'orienter dans la direction de  $B$  (dipôles magnétiques). Ca va créer une force d'attraction – **paramagnétisme**.

L'agitation thermique et les forces moléculaires tendent de désorienter le rangement d'une façon chaotique. Le résultat est que le champ magnétique induit est proportionnel au  $B$  et inversement proportionnel à la température  $T$ .

Mais les lois de la mécanique quantique exigent que les électrons sont groupés par paires, avec le spin et le moment orbital dans chaque paire en direction opposés. Ça annule complètement l'effet paramagnétique dans les molécules qui regroupent des électrons par paires.

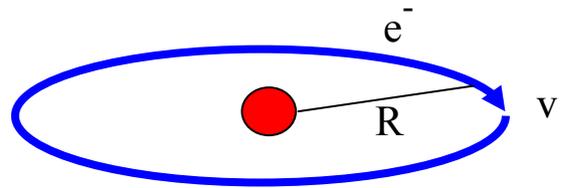
Quelques molécules seulement contiennent un nombre **d'électrons impairs**.

Quelques atomes (e.g. fer) contiennent électrons **avec spin non apparié**.

Les conducteurs ayant les **électrons libres** ont un comportement paramagnétique.

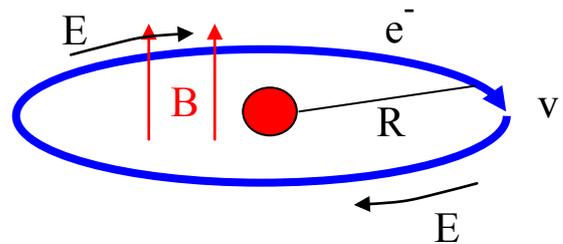
Et le **diamagnétisme** ?

Un électron pour  $B_{\text{externe}} = 0$  :



Augmentation du champ magnétique  $B$  doit créer un champ électrique (l'induction de Faraday) :

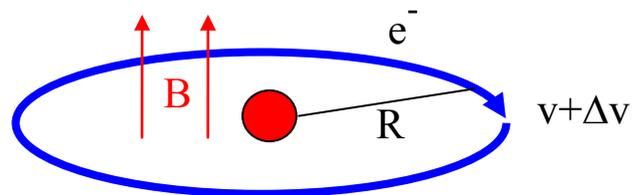
$$\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi R E = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$



$E$  doit accélérer la charge :

$$m_e \frac{dv}{dt} = -eE = \frac{eR}{2} \frac{dB}{dt}$$

$$\Delta v = \frac{eR}{2m_e} \Delta B$$



Les vitesses des électrons vont changer :  $\pm v \rightarrow \pm v + \Delta v$ . Ça va être équivalent à un changement de la vitesse angulaire

$$\Delta\omega = \frac{\Delta v}{R} = \frac{e}{2m_e} B \quad (\text{appelée fréquence de Larmor}).$$

Le changement de moment dipolaire magnétique :

$$\Delta\vec{m} = \frac{-eR}{2} \Delta v = -\frac{e^2 R^2}{2m_e} \Delta\vec{B}$$

est dans la direction opposée au changement de  $B$ , indépendamment du signe de charge et de la direction de rotation (loi de Lenz).

Donc, aussi pour les électrons appairés le champ uniforme externe  $B$  va créer un moment magnétique opposé au  $B$  (et proportionnel au  $B$ ). Ça va créer une force de répulsion – le **diamagnétisme**.

Question : la vitesse a changé, le rayon non – qu'est-ce qu'il se passe avec l'équilibre des forces ?

$$\text{Sans B : } \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{m_e v^2}{R}$$

$$\text{Avec B : } \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} + e(v + \Delta v)B \stackrel{?}{=} \frac{m_e (v + \Delta v)^2}{R}$$

En négligeant  $(\Delta v)^2$

$$\Delta v = \frac{eR}{2m_e} B$$

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} + e v \frac{2m_e}{eR} \Delta v \approx \frac{m_e v^2}{R} + 2 \frac{m_e v \Delta v}{R} \quad \text{OK}$$

## Le ferromagnétisme :

Paramagnétisme extrême : les calculs très simples à partir des mesures de la magnitude d'effet et l'équation

$$\Delta\vec{m} = \frac{-eR}{2}\Delta v = -\frac{e^2R^2}{2m_e}\Delta\vec{B}$$

montre que le ferromagnétisme inclue entre 1 et 2 électrons par atome. En fait, ces sont les effets quantiques : certains états de matériaux ferromagnétiques sont plus probables (l'énergie plus bas) si tous les spins et moments magnétiques d'électrons non appairés sont alignés – alignement spontané.

Les domaines macroscopiques (les dimensions dépendent de la température) ont le moment magnétique non nul. Ces domaines sont alignés facilement en parallèle au champ magnétique externe.

## Champ H, susceptibilité et perméabilité magnétique

Le moment magnétique total par unité de volume :  
 $M$  – polarisation magnétique ou aimantation

Par analogie avec le champ électrique ( $P = \chi_e E$ ) on peut introduire la susceptibilité magnétique  $\chi_m$  :  $M = \chi_m B$ , mais habituellement on utilise un autre vecteur  $H$  :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \text{ - champ H, ou champ magnétique ;}$$

$B$  – induction magnétique

Pourquoi ?

A l'extérieur d'un milieu magnétique  $H \sim B$ . A l'intérieur,  $H$  exprime le champ magnétique créé par les courants libres et par les sources externes, hors des sources magnétiques internes, créées par les courants liés :

$$\vec{J}_{\text{total}} = \vec{J}_{\text{liés}} + \vec{J}_{\text{libres}}, \text{ rot } \vec{M} = \vec{J}_{\text{liés}} \Rightarrow \text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{libres}}$$

En fait, dans l'expérience physique, on s'intéresse au champ créé par les courants libres, qui sont variés et mesurés.

Dans les cas statiques l'analogie avec  $E$  et plus prononcée pour  $H$  que pour  $B$  :

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{libres}} = 0 \text{ sans courants libres même pour les milieux magnétisés et non-magnétisés.}$$

$$\text{div } \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \text{div } \vec{H} = -\text{div } \vec{M} \begin{cases} = 0 & \text{Sans aimantation} \\ \neq 0 & \text{Avec aimantation} \\ & \text{('charges' magnétique)} \end{cases}$$

Par analogie avec  $E$ , ou le vecteur de polarisation de milieu  $P = \chi_e E$  :

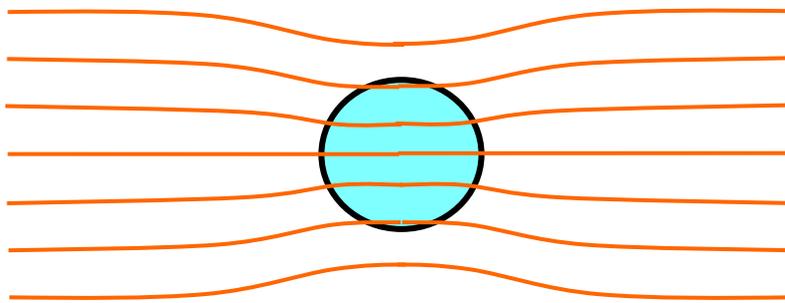
susceptibilité magnétique  $\chi_m$  :  $M = \chi_m H$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H} \text{ avec}$$

$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$  - perméabilité magnétique

Paramagnétiques :  $\mu > \mu_0$  (pour les diélectriques toujours  $\epsilon \geq \epsilon_0$ )

Dans un champ externe uniforme les lignes du champ sont attirées :



Diamagnétiques :  $\mu < \mu_0$

Dans un champ externe uniforme les lignes du champ sont repoussées :

