

Etude des systèmes échantillonnés

Cours

Distributions échantillonnage et
Transformée de Fourier

Julien Marot

Il existe différentes façons de définir parfaitement une fonction : l'équation différentielle, les diverses transformées, etc. On introduit ici la théorie des distributions, qui fournit un cadre commun aux transformées de Laplace et de Fourier, mais qui permet aussi de considérer le processus d'échantillonnage d'un signal.

1 Introduction aux distributions et au Delta de Dirac

La détermination indirecte d'une fonction ϕ peut passer par exemple par une équation différentielle : $\frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi = C$. C'est une définition simple de fonctions qui peuvent être compliquées. Une autre façon de déterminer indirectement une fonction est de prendre sa transformée de Laplace ou de Fourier. On unifie les deux transformées en montrant qu'elles peuvent s'exprimer sous la forme d'une distribution, si on les considère pour un p donné (pour la transformée de Laplace) ou pour un ω donné (pour la transformée de Fourier).

1.1 Distributions

Théorie des distributions : Heaviside 1894, Poincaré 1912, fonction de Dirac 1926, et enfin Schwartz 1950. L'objectif est de généraliser la notion de fonction pour garder la possibilité d'appliquer des opérations telles la dérivation et la convolution à des objets particuliers (par exemple des fonctions non dérivables au sens classique).

Soit ϕ une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et T une distribution. ϕ est appelée fonction test. La distribution T transforme ϕ en un scalaire : $\phi(x) \mapsto T(\phi) \in \mathbb{R}$.

Exemple de distribution célèbre :

$$\delta(\phi) = \phi(0)$$

1.1.1 Distributions régulières

On évalue habituellement une fonction en calculant sa valeur en un point. Toutefois cette méthode fait jouer un rôle considérable aux irrégularités (discontinuités par exemple) de la fonction. L'idée sous-jacente à la théorie des distributions est qu'il existe un meilleur procédé d'évaluation : calculer une moyenne des valeurs de la fonction dans un domaine donné. Dans ce cas-là les irrégularités sont pondérées avec les valeurs moins marginales prises par la fonction.

Une distribution T est dite régulière s'il existe une *fonction* d telle que :

$T_d = \int_{-\infty}^{+\infty} d(x)\phi(x)dx$ Une distribution "régulière" T_d est donc définie via une fonction d . On remarque que T_d est une moyenne de ϕ pondérée par d .

La fonction d est dite auxiliaire. Elle permet, si elle est bien choisie, d'extraire des caractéristiques pertinentes d'une fonction.

Exemples de distributions régulières

Soit ξ la fonction de Schwartz :

$$\xi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & \text{si } |x| < 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1)$$

Soit γ la version normalisée de la fonction de Schwartz :

$$\gamma(x) = \frac{\xi(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(u)du} \quad (2)$$

Soit (γ_n) la suite de Dirac associée à γ : $\gamma_n = n\gamma(nx)$. Alors la suite T_{γ_n} converge vers δ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int n\gamma(nx)\phi(x)dx = \phi(0).$$

Soit *sinc* la fonction sinus cardinal. Soit $(sinc_n)$ la suite de Dirac associée à *sinc* : $sinc_n = n * sinc(nx)$. Alors la suite T_{sinc_n} converge vers δ .

1.1.2 Distributions singulières

les distributions qui ne sont pas régulières sont singulières. Par abus de notation, δ est parfois présentée à la façon des distributions régulières :

$$T_\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)$$

— la fonction delta de Dirac $d(x) = \delta(x)$.

— la fonction de Heaviside : $d(x) = H(x) = 0$ pour $x < 0$, $H(x) = 1$ pour $x > 0$.

Dans le premier cas on pondère la fonction ϕ par 1 en 0, et par 0 partout ailleurs. Dans le second cas on calcule la moyenne sur \mathbb{R}^{+*} .

δ est la dérivée de H .

1.2 Distributions et dérivées

Soit f dérivable sur \mathbb{R} sauf en $x = a$ où elle admet une discontinuité de première espèce. en notant $\sigma = f(a^+) - f(a^-)$ (amplitude du saut en a), et en supposant $f'(a^+)$ et $f'(a^-)$ finis, on a $T'_f = T_{f'} + \sigma\delta_a$.

Exemple pour la distribution de Heaviside : $T'_H = T_{H'} + \sigma\delta = \delta$.

1.3 Distributions singulières et Delta de Dirac

Ce sont des distributions singulières que l'on utilise pour échantillonner un signal.

- Delta de Dirac $\delta(t)$: c'est la dérivée du Heaviside au sens des distributions.

- Delta de Dirac décalé de n échantillons :

$d_n(t) = \delta(t - n)$: qui donne la valeur de ϕ à l'échantillon n .

- Peigne de Dirac :

$d(t) = w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n)$. Permet de sélectionner des valeurs régulièrement espacées d'une fonction. La fonction est déterminée par ses échantillons.

1.4 Distributions pour l'étude des signaux temporels

On note que le fait d'échantillonner un signal revient à le multiplier par un peigne de Dirac : $f^*(t) = f(t)w(t)$. Attention, on ne prend pas l'intégrale du produit, sinon on retrouve la définition d'une distribution, à savoir qu'une distribution transforme une fonction en un scalaire.

- Fonction auxiliaire pour obtenir des coefficients : $d_n(t)$ avec plusieurs valeurs de n . Par exemple une fonction ϕ continue sur $[0, T]$ est complètement déterminée par ses coefficients de Fourier complexes $c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} d_n(t)\phi(t)dt$ où $d_n(t) = \frac{1}{T}\exp(-2i\pi nt/T)$ sur $[0, T]$ et 0 ailleurs.

- Fonction auxiliaire pour passer dans un domaine transformé : $d(t) = H(t)\exp(-pt)$ donne la transformée de Laplace, qui définit parfaitement la fonction $\phi(t)$; $d(t) = e^{-i\omega t}$ donne la transformée de Fourier.

On se concentre dans la suite sur les transformées de Fourier, de Laplace, et en z .

2 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier a pour propriété de mettre en valeur les composantes spectrales d'un signal. Les fonctions 'test' à étudier sont maintenant notées $f(t)$. Il s'agira par exemple d'un signal sinusoïdal de pulsation ω_0 par exemple doit conduire à un spectre comprenant deux éléments, en $-\omega_0$ et $+\omega_0$. La transformée de Fourier est obtenue à partir de la transformée de Laplace bilatérale comme suit.

2.1 Transformée de Fourier des signaux continus

2.1.1 Définition

Considérons la transformée de Laplace bilatérale d'une fonction f :

$$\mathcal{L}_f(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (3)$$

où p est un nombre complexe. On peut poser $p = \alpha + i\omega$.

La transformée de Fourier est définie par :

$$F(\omega) = \mathcal{F}_f(\omega) = \mathcal{L}_f(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4)$$

et la transformée de Fourier inverse par :

$$f(t) = \mathcal{F}_F^{-1}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (5)$$

2.1.2 Exemple du cosinus

On souhaite montrer que la transformée de Fourier d'un cosinus donne le spectre que l'on attend pour un cosinus, *i.e.* deux deltas de Dirac, centrés en $-\omega_0$ et ω_0 car c'est ce qu'on obtient en physique.

On pose $f(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$

On souhaite vérifier que la transformée de Fourier de $f(t)$ donne deux Diracs, centrés en ω_0 et $-\omega_0$. Pour cela, on calcule la transformée de Fourier inverse de $\delta(\omega - \omega_0)$:

$$\mathcal{F}_{\delta(\omega - \omega_0)}^{-1}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0)e^{i\omega t} d\omega \quad (6)$$

Or $\delta(\omega - \omega_0)e^{i\omega t} = \delta(\omega - \omega_0)e^{i\omega_0 t}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0)e^{i\omega_0 t} d\omega = e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0) d\omega = e^{i\omega_0 t} \quad (7)$$

Donc :

$$\mathcal{F}_{\delta(\omega - \omega_0)}^{-1}(t) = e^{i\omega_0 t} \quad (8)$$

En prenant la TF des membres de droite et de gauche de l'équation (8) on obtient : $\delta(\omega - \omega_0) = \mathcal{F}_{e^{i\omega_0 t}}(\omega)$ et donc :

$$\mathcal{F}_{e^{i\omega_0 t}}(\omega) = \delta(\omega - \omega_0) \quad (9)$$

On remarque que $\mathcal{F}_f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2}(A + B)$ avec :

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt \quad (10)$$

et

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt \quad (11)$$

D'après Eq. (9) A est la transformée de Fourier de $e^{i\omega_0 t}$: $A = \delta(\omega - \omega_0)$.

En remplaçant $-\omega_0$ par $+\omega_0$, on obtient $B = \delta(\omega + \omega_0)$.

Finalement la transformée de Fourier du cosinus est :

$$\mathcal{F}_{\cos(\omega_0 t)}(\omega) = \frac{1}{2}(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \quad (12)$$

On obtient bien deux Dirac à deux pulsations opposées.

2.2 Transformée de Fourier de signaux échantillonnés

Considérons un signal discret $f^*(t)$. C'est le produit d'une fonction f et d'un peigne de Dirac :

$$f^*(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \quad (13)$$

$$\mathcal{F}_{f^*}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) e^{-i\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e) e^{-i\omega nT_e} \quad (14)$$

On peut aussi poser $\omega = 2\pi\nu$, on obtient :

$$\mathcal{F}_{f^*}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e) e^{-2i\pi\nu nT_e} \quad (15)$$

On peut obtenir une expression plus concrète si l'on admet deux résultats :

- a) On admet que $\mathcal{F}_{w_{T_e}(t)}(\omega) = \frac{1}{T_e} w_{\frac{1}{T_e}}(\omega)$ (la transformée de Fourier d'un peigne est un peigne).
- b) Convolver une fonction par un Dirac revient à la décaler.

La transformée de Fourier du produit de deux fonctions continues $f(t)g(t)$ est la convolution des deux transformées de Fourier :

$$\mathcal{F}_{fg}(\omega) = \mathcal{F}_f(\omega) * \mathcal{F}_g(\omega)$$

On applique cela à la définition de la fonction échantillonnée :

$$f^*(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = f(t) w_{T_e}(t) \text{ où } w_{T_e}(t) \text{ est le peigne de Dirac.}$$

Donc $\mathcal{F}_{f^*}(\omega) = \mathcal{F}_{f(t)w_{T_e}(t)}(\omega) = \mathcal{F}_f(\omega) * \mathcal{F}_{w_{T_e}(t)}(\omega)$

Donc : $\mathcal{F}_{f^*}(\omega) = \mathcal{F}_f(\omega) * \left(\frac{1}{T_e} w_{\frac{1}{T_e}}(\omega)\right)$.

Convolver par un dirac revient à décaler une fonction. D'où l'apparition d'une infinité de spectres décalés dans le spectre du signal discret.

2.3 Théorème de Shannon

Considérons un signal discret $f^*(t)$. On admettra :

La transformée de Fourier d'un Dirac centré en a est un Dirac centré en $1/a$.

En prenant la transformée de Fourier de l'équation (13), on obtient :

$$\mathcal{F}_{f^*}(f) = \mathcal{F}_f(f) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nF_e) \quad (16)$$

Convolver par un Dirac revient à décaler donc on a une infinité de fonctions décalées.

Le schéma montre qu'il y a recouvrement si F_e est mal choisie. D'où le théorème de Shannon.

3 Transformée de Laplace et en z de signaux discrets

On peut montrer que la transformée de Fourier d'un signal discret est la transformée en z prise en $|z| = 1$, *i.e.* sur le cercle unité.

Considérons un signal discret $f^*(t)$ (voir Eq. (13)).

Considérons la transformée de Laplace bilatérale d'un signal discret :

$$\mathcal{L}_{f^*}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) e^{-pt} dt \quad (17)$$

On remarque que si on restreint la transformée de Laplace bilatérale à $i\omega$, on obtient la transformée de Fourier d'un signal discret :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f^*}(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)) e^{-pt} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) \cdot \delta(t - nT_e)) e^{-pt} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e) e^{-pnT_e}. \end{aligned}$$

On pose $z = e^{pT_e}$: on obtient la définition de la transformée en Z :

$$\mathcal{L}_{f^*}(p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e)z^{-n}$$

4 Transformée de Fourier de signaux discrets : exemples

4.1 Echantillonnage de deux sinusôides

$$500 - 320 = 180 \text{ et } 320 - 500 = -180$$

pics parasites

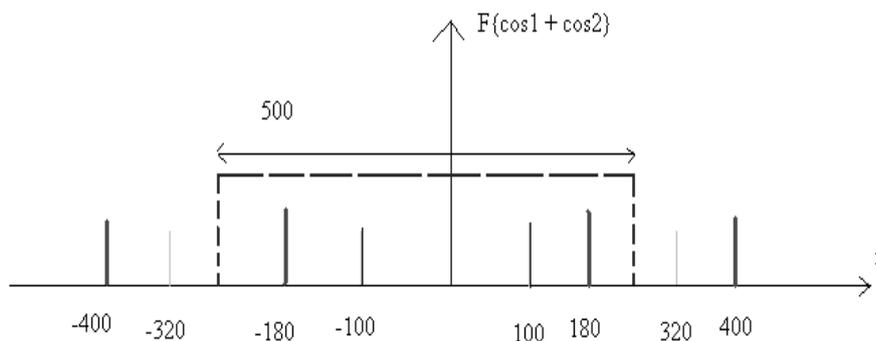


FIGURE 1 – Spectre deux cosinus : dans la porte les deux cos reconstruits 100 et 180 (parasite)

4.2 Tracé du spectre d'un signal "analytique" discret

On considère un signal $s(t)$ continu, et sa transformée de Fourier $S(f)$. Ce spectre est un "sinus cardinal" décalé et tronqué. Le spectre de ce signal continu est représenté sur la Fig. 1. Ce spectre dépend des paramètres F_0 (fréquence centrale), F_1 , F_2 . F_1 et F_2 sont telles que $F_2 - F_0 = F_0 - F_1$. Il ne présente de valeurs non nulles que dans l'intervalle $[F_1; F_2]$.

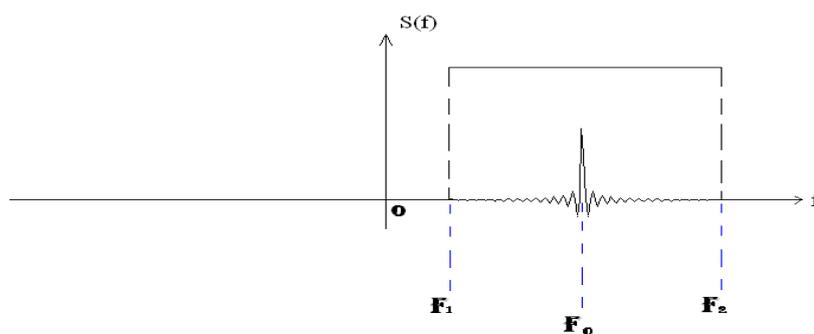


FIGURE 2 –

$$\begin{aligned} \text{fréquence de coupure} &= f_c = F_2 \\ f_{Shannon} &= 2f_c = 2F_2 \end{aligned}$$

Ces signaux particuliers dont le spectre est nul pour des fréquences nulles sont appelés "analytiques".

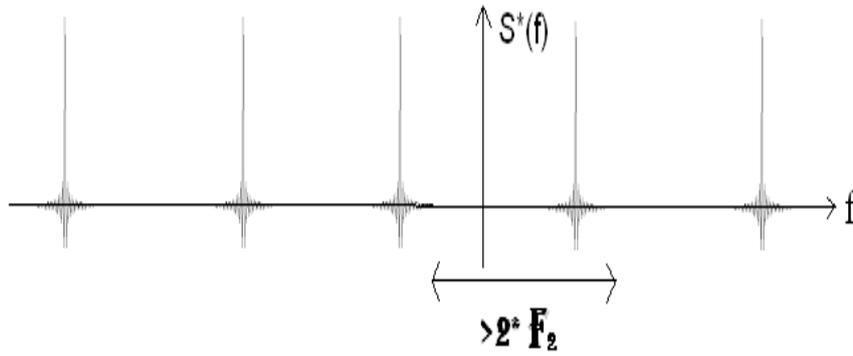


FIGURE 3 – Spectre convolué du signal discret

5 Annexe

5.1 transformée de Fourier discrète

La transformée de Fourier discrète concerne les signaux temporels périodiques. Partant de la fonction périodique discrète f^* , on considère les N échantillons extraits sur une période $f(nT_e)$, $n = 0, \dots, N - 1$.

La transformée de Fourier discrète TFD_{f^*} de f^* est elle aussi une fonction périodique et une période de TFD_{f^*} est obtenue à partir des N premiers échantillons de TFD_{f^*} . Ainsi la transformée de Fourier discrète de f^* est définie par :

$$TFD_{f^*}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_e) e^{-2i\pi(k/N)nT_e} \quad (18)$$

L'hypothèse de périodicité du signal temporel ne doit pas être oubliée.