Aix*Marseille université

Master EEEA

Traitement du signal
et des images

avec des illustrations tirées de
[Gonzalez and Woods : Digital image processing, Prentice Hall, 2002]

Cours 2 : opérations ponctuelles

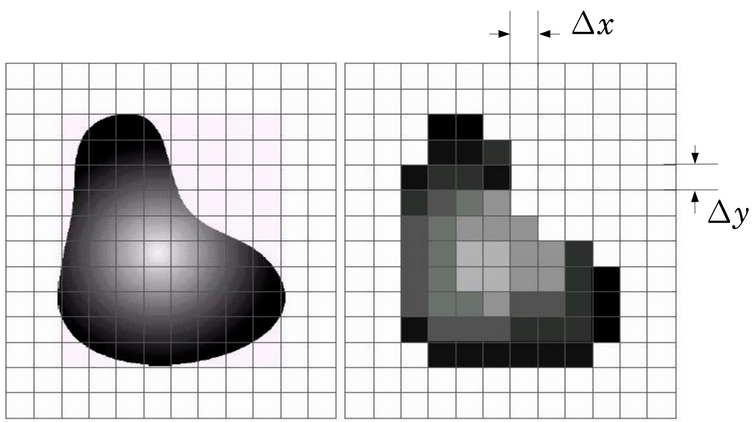
— Sommaire —

1. *Introduction aux opérateurs ponctuelles*
2. *Égalisation/spécification d'histogramme*
3. *Opérations algébriques et logiques*

Une image numérique est une matrice $\boldsymbol{f}$ caractérisée par,

1 – sa discrétisation spatiale qui défini les dimensions *effectives* d'un pixel et la taille de la matrice, *e.g.* dimension de la matrice CCD et taille de la cellule.

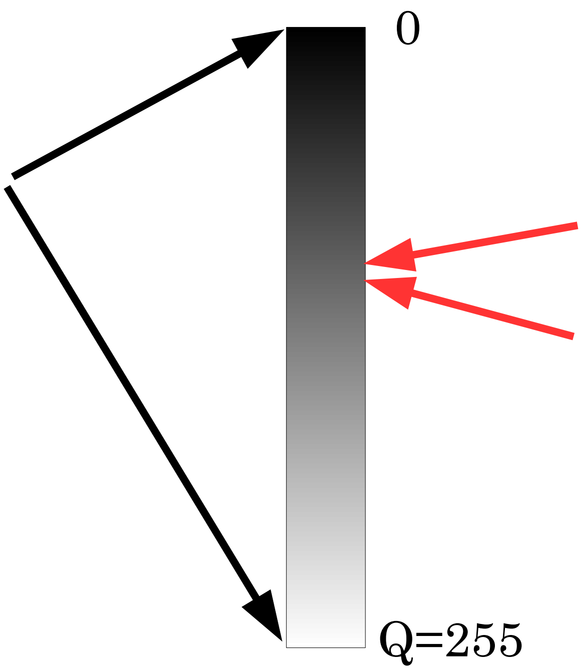
2 – sa discrétisation tonale qui défini le nombre de niveaux de gris codant la dynamique de l'image.



$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,N} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{M,1} & f_{M,2} & \cdots & f_{M,N} \end{bmatrix}$$

Motivation : Dynamique et réhaussement de contraste

Les valeurs de pixels fortements différentes sont **très facile** à distinguer dans l'image.



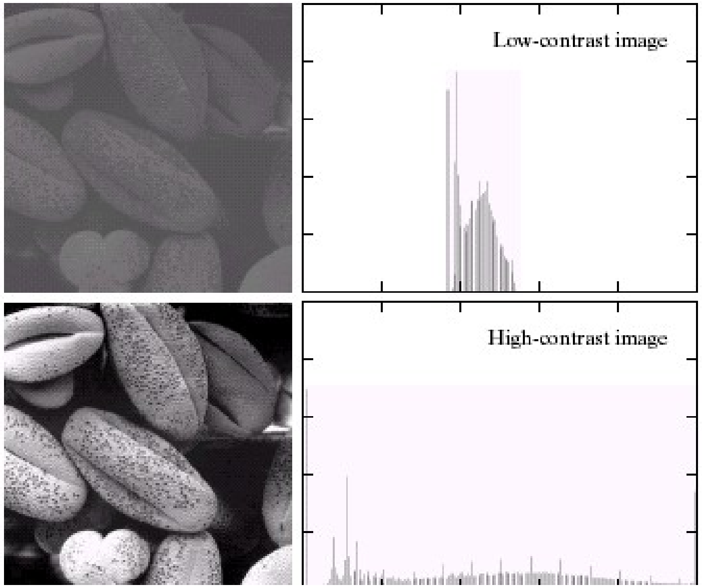
Les valeurs de pixels proches sont **difficiles** à distinguer dans l'image.

Note - N'oubliez pas que nous disposons d'une dynamique codée sur un nombre limité de niveau, *e.g.*, $f(x_n, y_m) \in \{r_0,\ldots,r_{255}\}$!

Comme illustré ci-dessous, *ce phénomène rend difficile à interpréter les images à faible contraste*. De telles images sont dues, par exemple, à de problèmes d'éclairement de la scène ou de calibration d'instrument.

Un rehaussement de contraste a pour objectif de rendre « plus visible » les niveaux de gris proches de manière à améliorer la « lisibilité » de l'image initiale.

Les opérations ponctuelles (définies ci-après) sont un moyen pour étendre la dynamique occupée par certains niveaux de gris « intéressants » pour l'interprétation de l'image.



Opération spatiale : définition

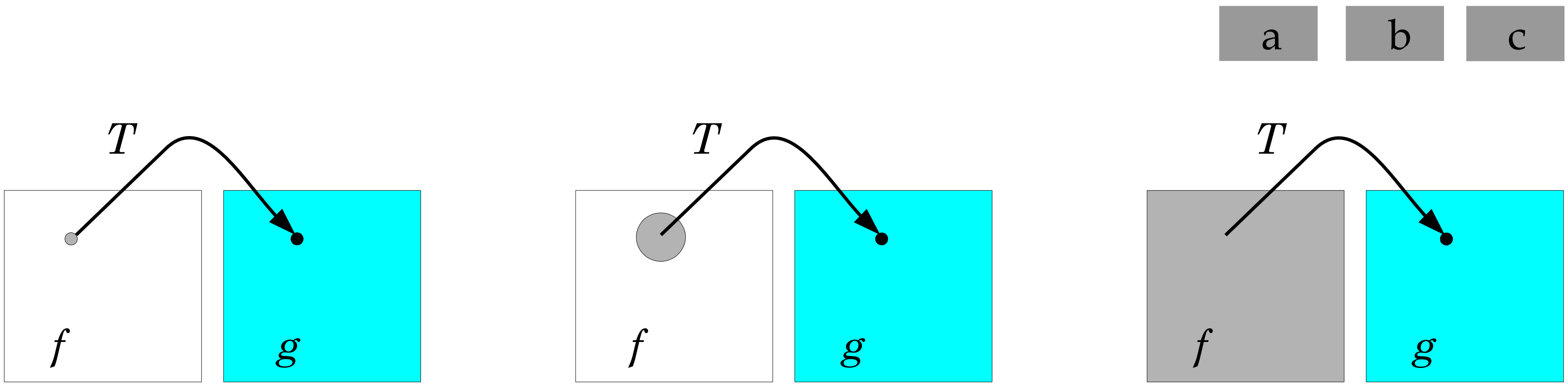
Une opération spatiale est une transformation par un opérateur $T(\cdot)$ sur une image donnée, *c.à.d.*

$$\boxed{g(x,y)=T[f](x,y)}$$

où f et g sont les images **avant** et **après** transformation. De manière générale, $T(\cdot)$ agit sur un voisinage plus ou moins grand autour du couple (x,y).

Note : *T est un opérateur quelconque (linéaire ou non, inversible ou non) mais il est invariant pour tous les points de l'image.*

En pratique, on distingue alors plusieurs types de transformations : les opérations ponctuelles *(a)* agissent pixels par pixels, les opérations locales agissent dans un voisinage restreint *(b)* et les opérations globales qui tiennent compte de toute l'image *(c)*...



...ce qui correspond aux opérations suivantes (avec un léger abus de notation)

(a) $$\boxed{g(x_{0,}\, y_0) = T[f(x_{0,}\, y_0)]}$$

(b) $$\boxed{g(x_{0,}\, y_0) = T[f(V(x_{0,}\, y_0))]}$$

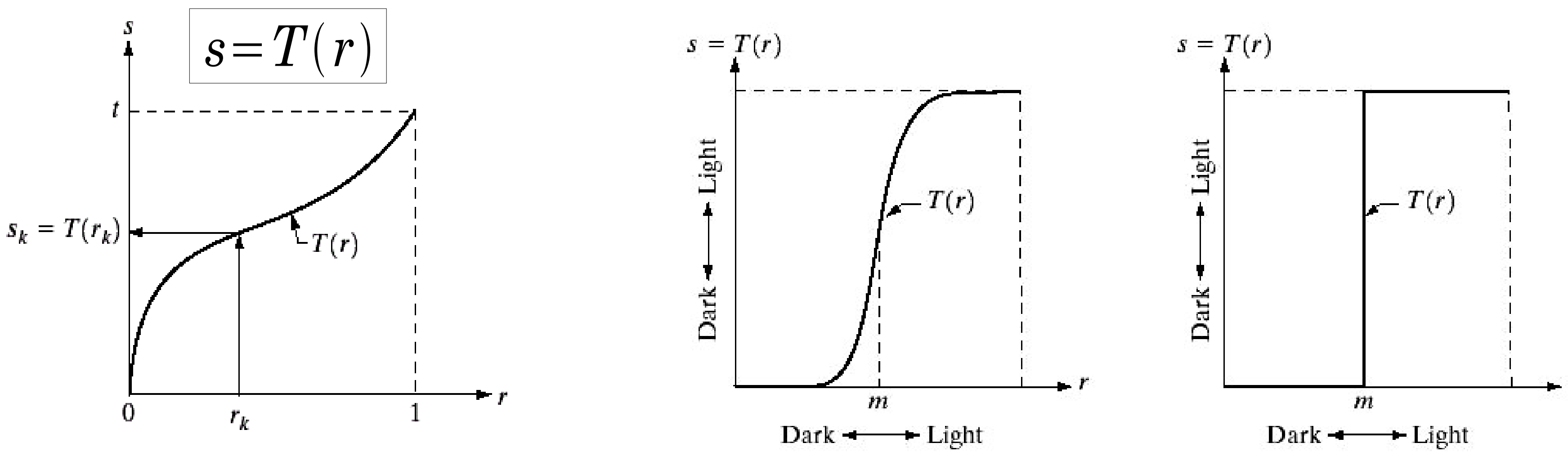
(c) $$\boxed{g(x_{0,}\, y_0) = T[f(x, y)]}$$

Dans cette leçon, on s'intéresse aux opérations ponctuelle *(a)*, ce qui correspondent à appliquer une transformation identique des niveaux de gris (NdG) à chaque pixel de l'image de départ.

Opération ponctuelle : définition

Une opération ponctuelle est une transformation par un opérateur $T(\cdot)$ qui, à un NdG r quelconque de l'image de départ associe un NdG s dans l'image d'arrivée, *cf.* graph (a).

a b c



Par exemple, (b) T peut réduire (*resp.* augmenter) les NdG en deçà (*resp.* au delà) d'une valeur typique m. Dans le cas limite (c), la transformation correspond à un « seuillage » qui conduit à une image à deux niveaux, c.à.d. binaire.

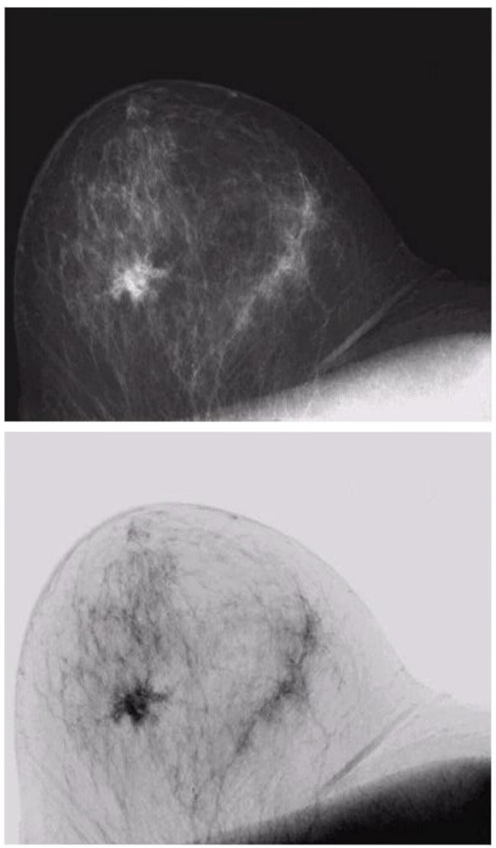
Opération ponctuelle : notes importantes

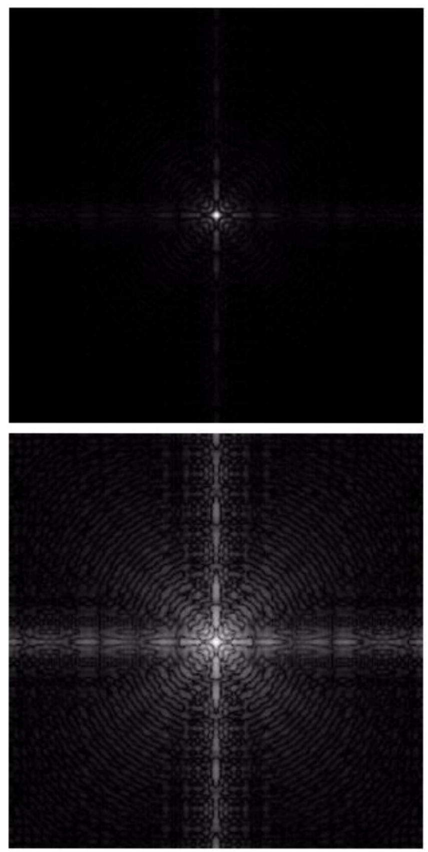
Remarque 1 - Un certain nombre d'opérations importantes de rehaussement d'image se déduisent d'une transformation décrite par une simple transformation ponctuelle.

Remarque 2 - L'image étant quantifiée, par exemple sur 256 niveaux, ses valeurs de NdG sont dans $\mathbb{N}$ Or, la transformation $T(\cdot)$ de ne renvoie pas en général sur $\mathbb{N}$et il faut arrondir le résultat de la transformation.

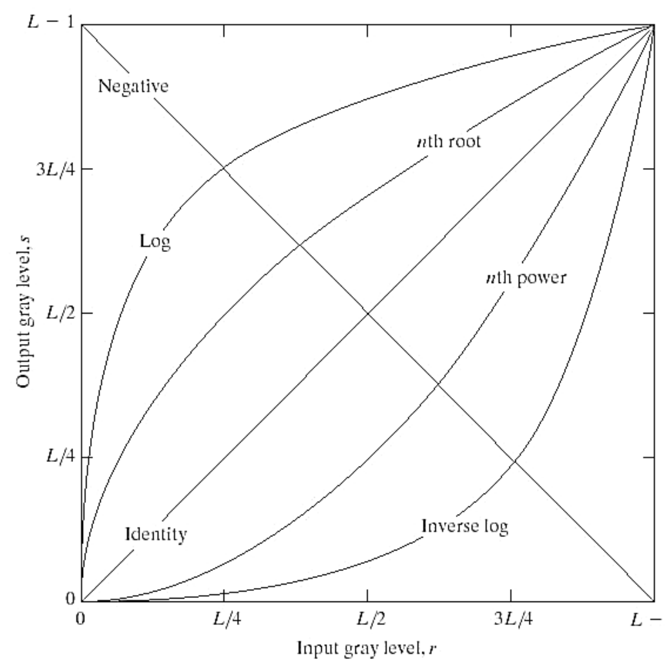
Opération ponctuelle : exemples

Exemple 1 - Transformations ponctuelles monotones usuelles (c) : l'inversion des NdG (a) est souvent utilisée pour la visualisation des images médicales à rayons-X et transformation *log* (b) est souvent utilisée pour le rehaussement des valeurs de faible amplitude.





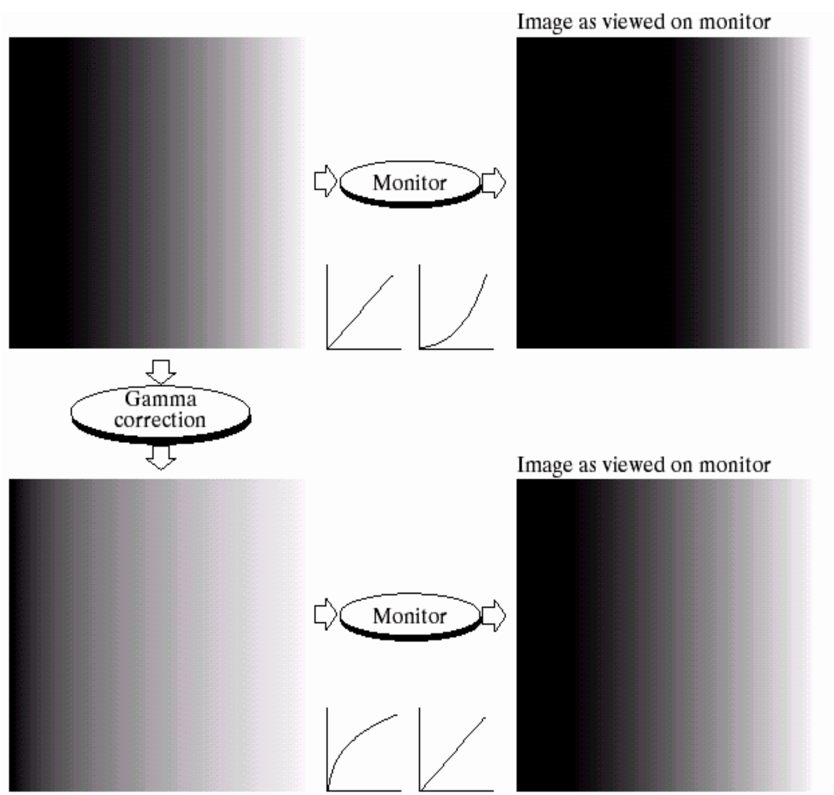
a b c

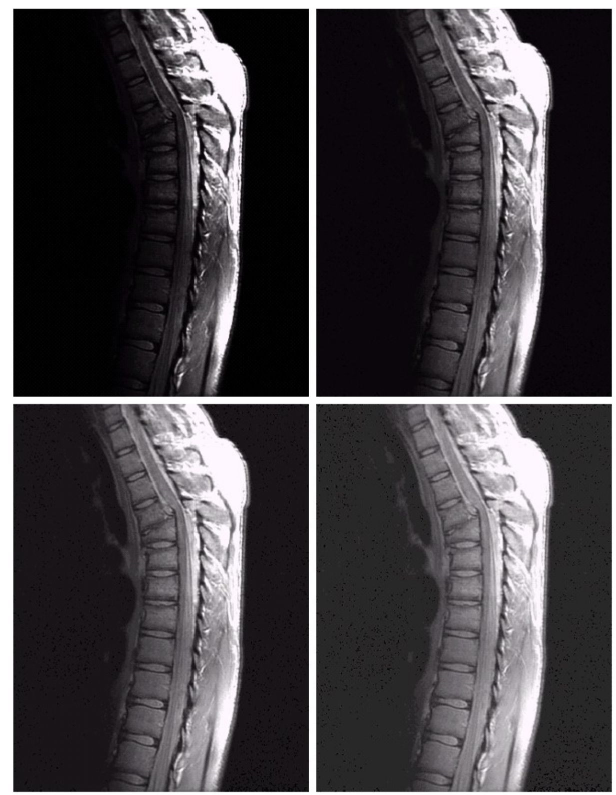


Exemple 2 - La famille de transformation « puissance »

$$\boxed{s = C \times r^{\gamma}}$$

avec C et γ dans ℝ est largement utilisée en pratique. Ces transformations servent par exemple (a) à compenser la réponse de l'oeil sur les écrans [*correction gamma*] ou (b) à améliorer la lisibilité des images IRM (dans ce dernier cas, C=1 et γ=1, 0.6, 0.4 et 0.3).

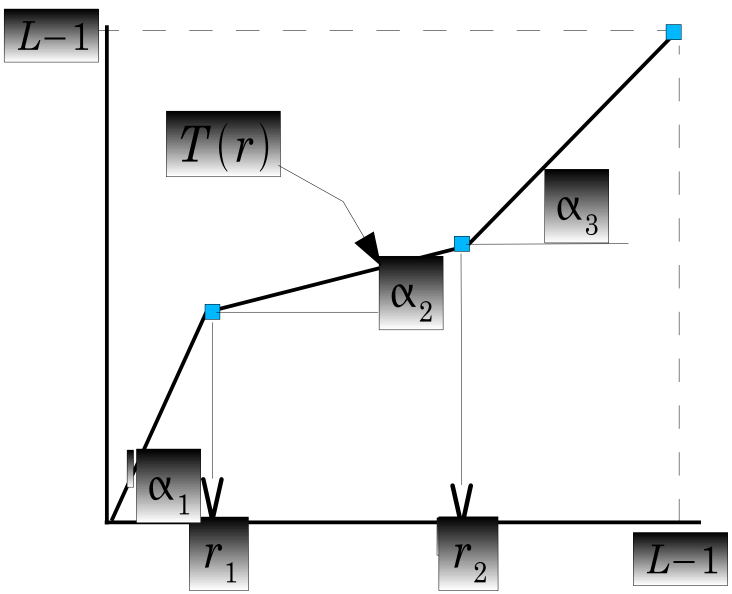




a b

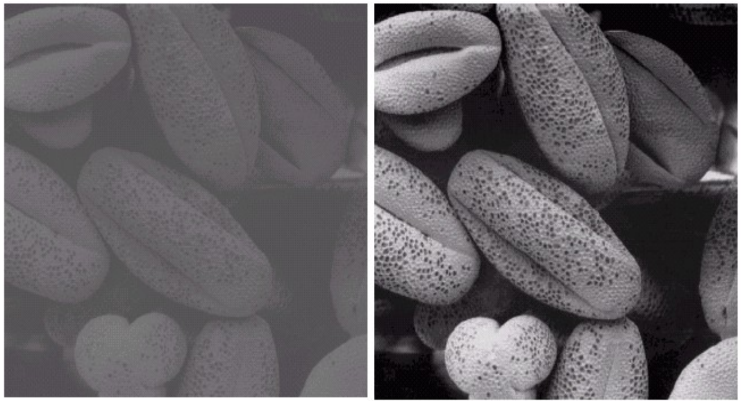
Exemple 3 - Transformations *continues* affines par morceaux : l'amélioration du contraste peut s'appuyer sur une modification ciblée des NdG à partir d'une séries de transformations affines,

$$s=\begin{cases}\alpha_1 r, & 0\le r<r_1\\ \alpha_2(r-r_1)+\alpha_1 r_1, & r_1\le r<r_2\\ \alpha_3(r-r_2)+\alpha_2(r_2-r_1)+\alpha_1 r_1, & r_2\le r\le L-1\end{cases}$$



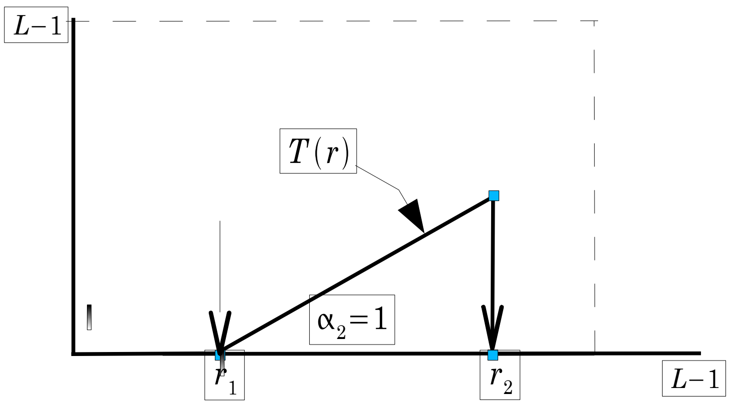
$\alpha_1\ge 1 \Rightarrow$ *étirement de dynamique*

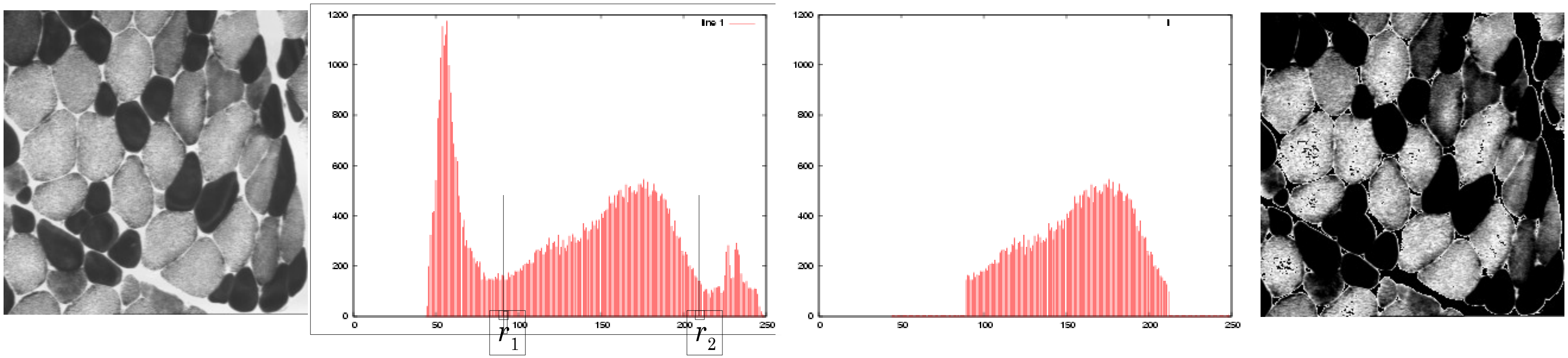
$\alpha_1<1 \Rightarrow$ *compression de dynamique*



Note : Le choix des points de transition est important... **et empirique** !

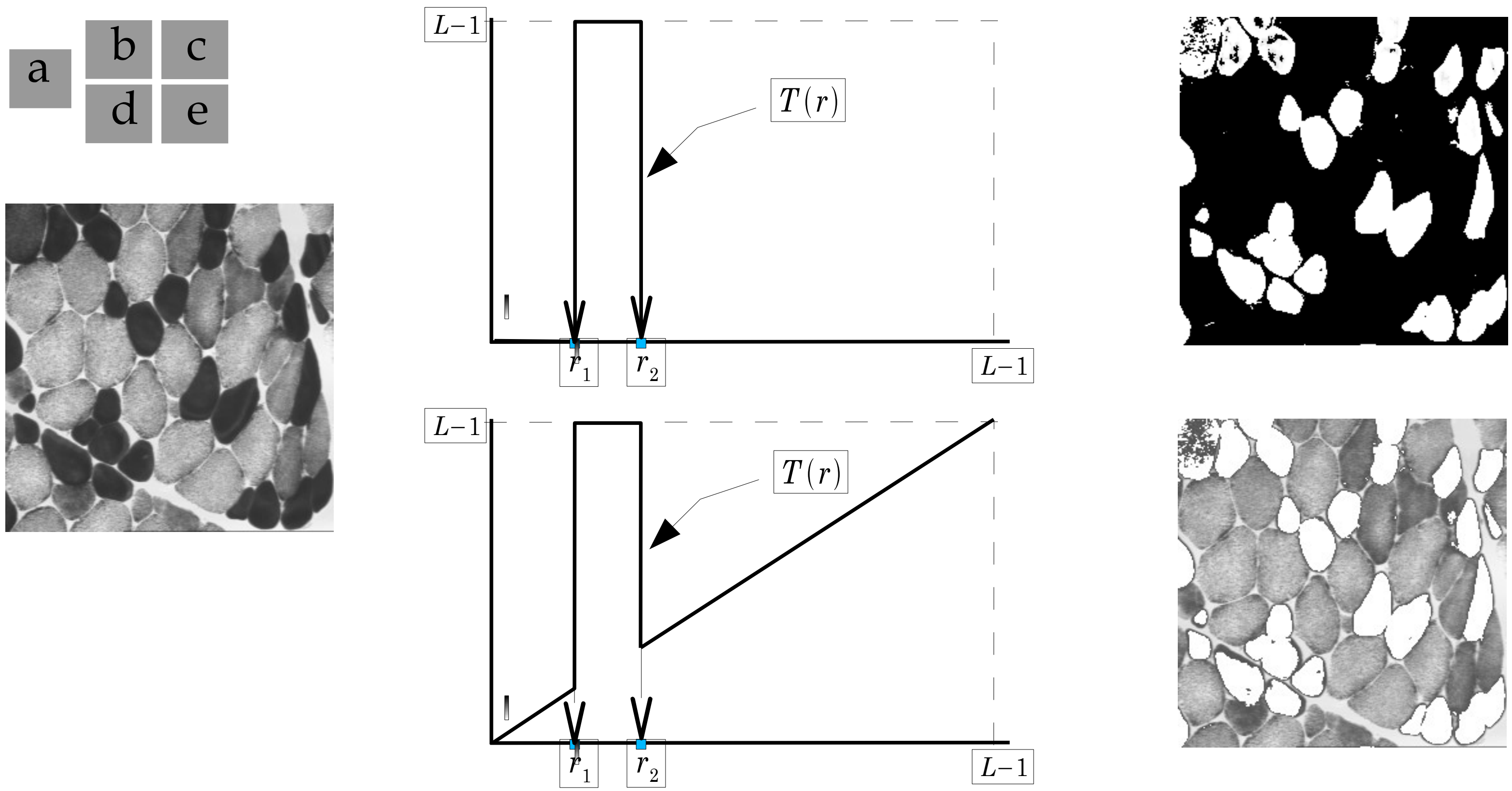
Exemple 4 - Transformation *discontinue* affine par morceaux : des discontinuité permettent d'isoler certaines composantes de l'histogramme. Il est par exemple possible de mettre à zéro les NdG d'une partie de l'histogramme sans changer les autres.



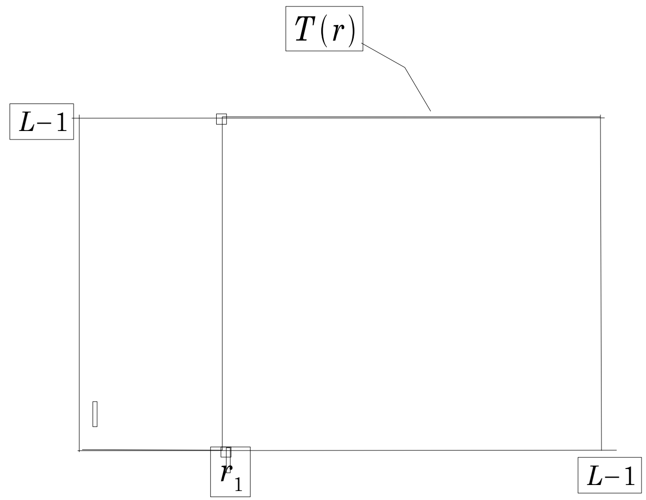


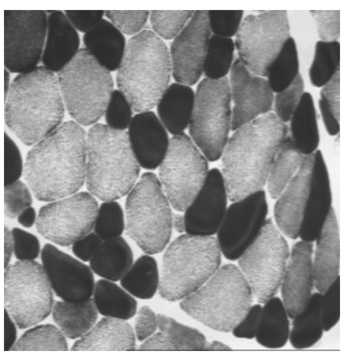
L'exemple ci-dessus illustre comment isoler le détail de certaines fibres musculaires apparaissant de manière distinctes sur l'histogramme.

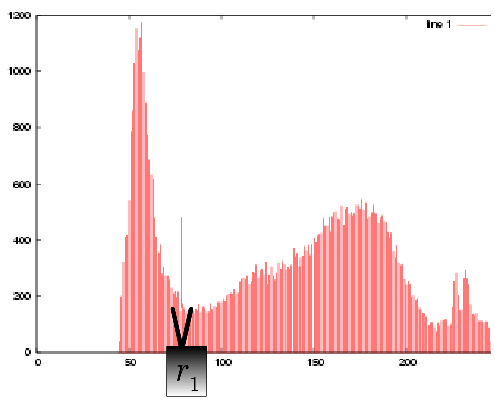
Exemple 4 (suite) - « *Slicing* » : pour une image donnée (a), le « `slicing` » consiste à mettre à Q une certaine partie de l'histogramme, soit pour aboutir à une image binaire (c) si le reste de l'histogramme est mise à zéro (b), soit pour aboutir à la sélection d'une composante en « sur-impression » de l'arrière plan (e) si le reste de l'histogramme est inchangé (d).

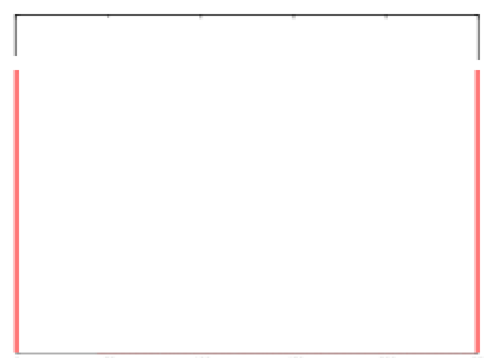


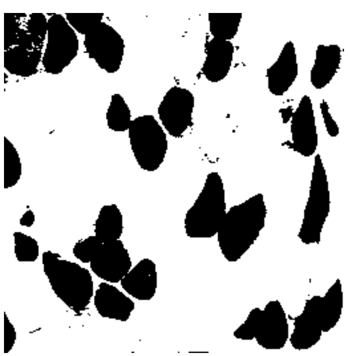
Exemple 4 (suite) - *Seuillage* : pour une image donnée (a), le `seuillage` consiste à mettre à Q tous les NdG au delà d'un seuil r_1 donné (b) de manière à aboutir à une image binaire (c).











Pour une image $\boldsymbol{f}$ donnée d'histogramme $h_f(\cdot)$, l'opération `d'égalisation d'histogramme` consiste à construire un opérateur ponctuel $T^E(r)$ qui permet d'obtenir une image $\boldsymbol{g}$ par la transformation

$$\boxed{g_{m,n} = T^E(f_{m,n})}$$

telle que l'histogramme de g [noté $h_g(\cdot)$] soit **le plus uniforme possible**.

L'égalisation d'histogramme permet notamment

(a) *d'étirer/compresser la dynamique de l'image* pour que les valeurs très représentées occupent une plus grande dynamique, *et vis et versa* ;

(b) de *comparer les images entre-elles dans une forme « standard » ;*

(c) la technique que nous allons développer pour construire $T^E(\cdot)$ nous sera également utile pour la *spécification d'histogramme* (*cf*., plus loin).

Cours 2 : opérations ponctuelles

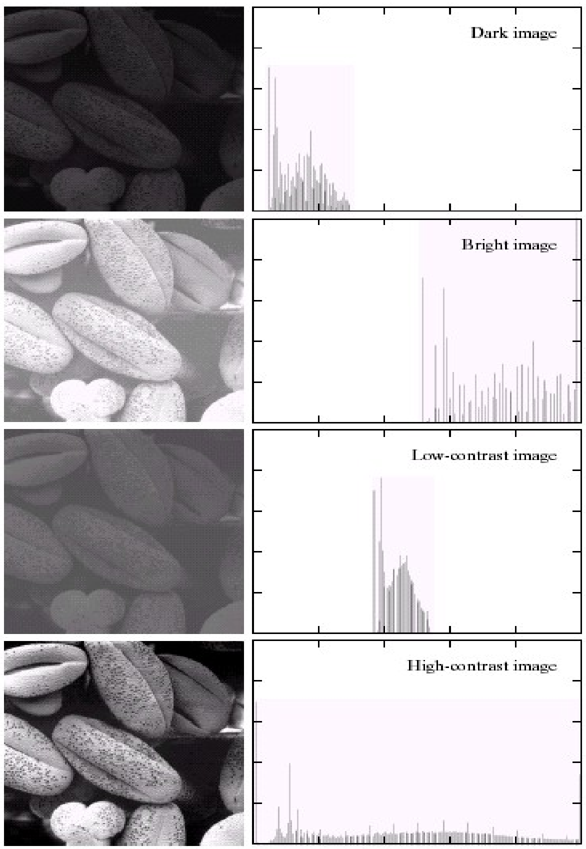
— *Sommaire* —

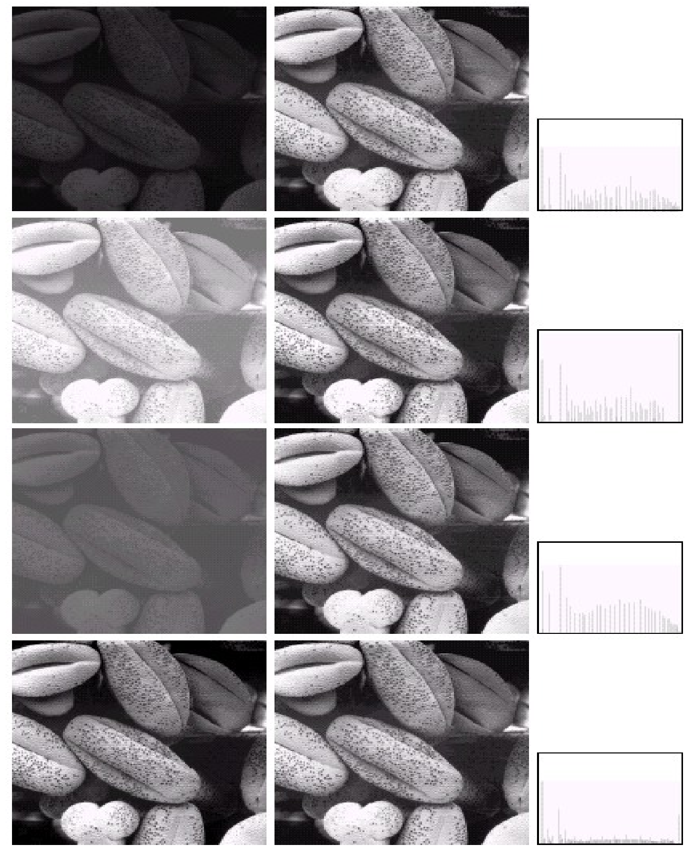
1. *Introduction aux opérateurs ponctuelles*
2. ***Égalisation/spécification histogramme***
3. *Opérations algébriques et logiques*

a b

Égalisation d'histogramme : illustration

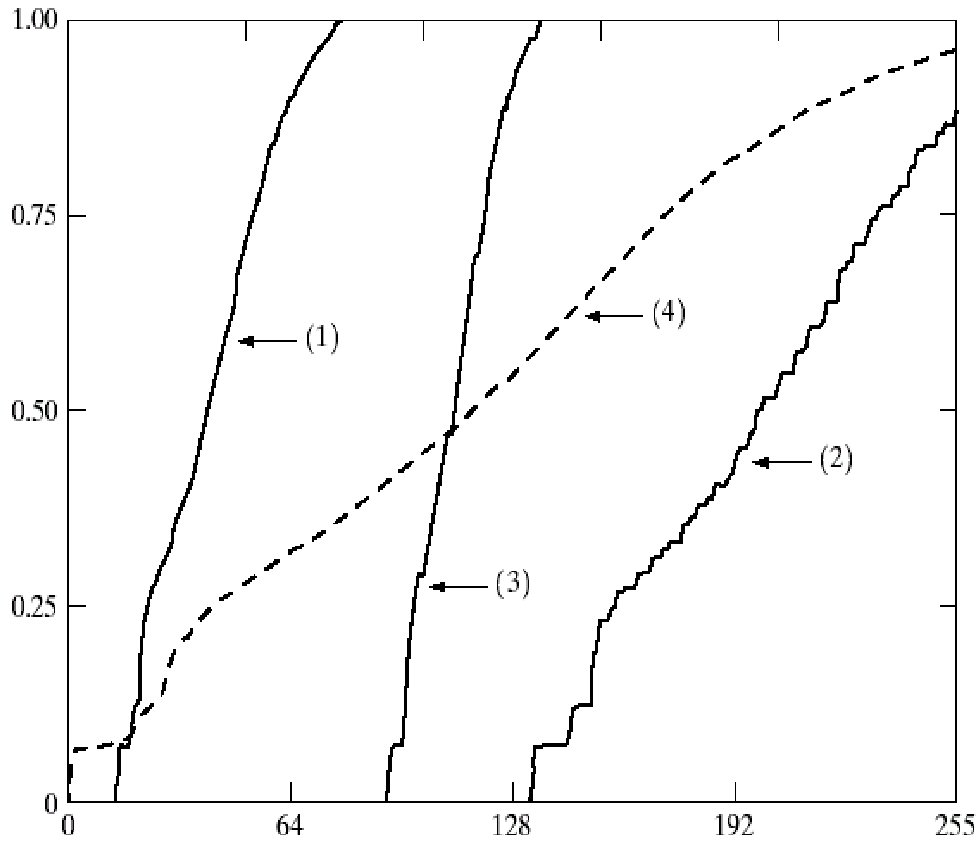
Pour des images des la même scène acquises dans des conditions expérimentales différentes (a), l'égalisation d'histogramme permet d'obtenir des images *non identiques* mais qualitativement comparables (b).





Égalisation d'histogramme : illustration (suite)

Pour les images non égalisée de la même scène du transparent précédent, *cf.* graph (a), l'égalisation consiste à transformer la distribution des NdG selon les transformations ponctuelles ci-dessous.



Égaliser l'histogramme : 1 - cas continu

Considérons pour le moment que $\boxed{\forall (m,n),\ f_{m,n} \in [0,1]}$ *i.e.* que les valeurs des pixels *ne sont pas quantifiées*. On écrira de manière générique les valeurs de NDG pour ***f*** et ***g***

$$\boxed{r = f_{m,n} \qquad \text{et} \qquad s = g_{m,n}.}$$

Pour la suite, on supposera que *r* et *s* sont les réalisations des variables aléatoires (VA) notées *R* et *S* qui admettent

- des densités de probabilité (DDP) notées $\boxed{p_R(r) \ \text{ et } \ p_S(s).}$
- des fonctions de partition (FP) notées $\boxed{F_R(r) \ \text{ et } \ F_S(s).}$

On notera que (la VA) *S* est *une fonction* de (la VA) *R*, soit

$$\boxed{S = T^E(R).}$$

Égalisation d'histogramme : 1 - cas continu (suite)

En résumé : connaissant la loi de R, on cherche la transformation $s = T^E(r)$ pour que S suit une distribution **uniforme** sur $[0,1]$.

Par définition : $F_R(r)$ est strictement croissante ce qui permet de définir son inverse $r = F_R^{-1}(s)$.

Résultat 1 - sous l'hypothèse précédente, la transformation qui permet l'égalisation d'histogramme est $T^E = F_R$.

Démonstration : on a la relation suivante (*cf. cours de proba.*)

$$p_S(s) = \left[p_R(r) \times \frac{dr}{ds} \right]_{r = F_R^{-1}(s)}$$

Comme $ds/dr = p_R(r)$ on a

$$\begin{aligned} p_S(s) &= [1]_{r = F_R^{-1}(s)} \\ &= 1 \text{ pour } s \in [0,1] \text{ et } 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Égaliser l'histogramme : 2 - cas discret

Pour être utilisables, les valeurs de NdG sont `quantifiées` sur L niveaux, *i.e.*,

$$\forall\, m,n \quad f_{m,n} \in \{r_{0,} \ldots, r_{L-1}\}.$$

Le concept que nous avons développé doit être adapté au cas des VA à *états discrets*.

On assigne `la fréquence relative` comme probabilité d'un NdG r_l

$$p_R(r_l) \approx N_l / N_T \qquad \text{où} \quad 0 \le r_l \le 1 \quad \text{et} \quad l = 0, \ldots, L-1.$$

avec N_l et N_T le nombre de pixels au niveau r_l et le nombre total de pixel, respectivement.

La transformation d'égalisation s'adapte directement du cas continue, *cf.* transparent précédent

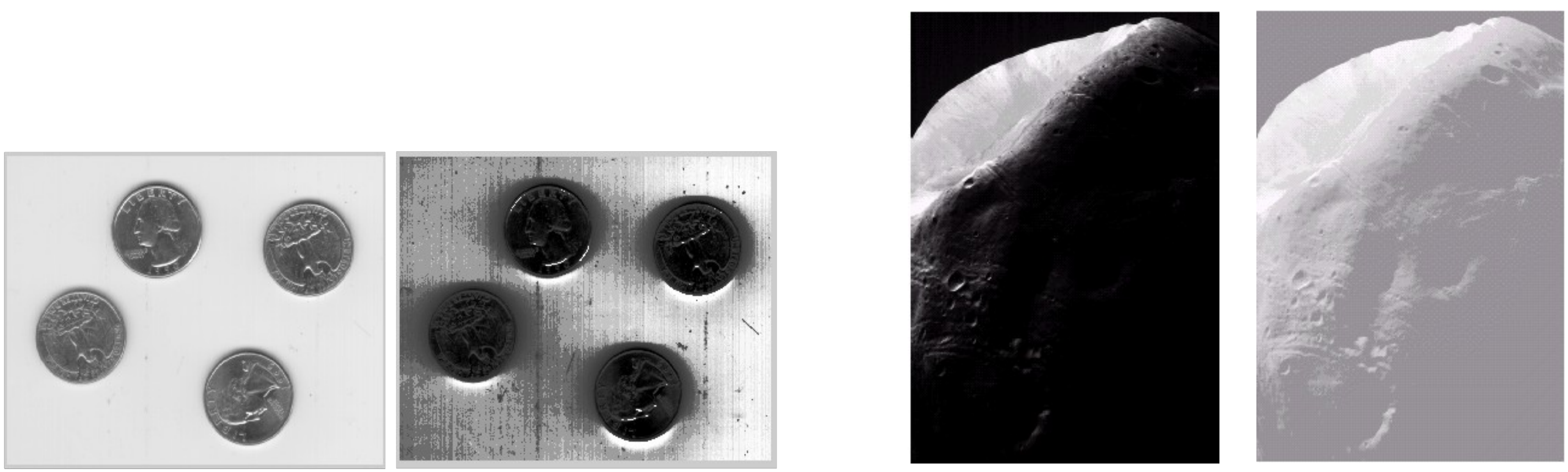
$$s_l \overset{\text{def}}{=} T^E(r_l) = \sum_{k=0}^{k=l} p_R(r_k) = \sum_{k=0}^{k=l} N_k / N_T$$

Égaliser l'histogramme : note finale

a b c d

Remarque 1 – L'égalisation d'histogramme n'est pas parfaite en générale, i.e., en général, l'image ***g*** aura un histogramme plus « plat » que celui de ***f***, mais rien ne garanti que $p_S(s_l)$ sera uniforme !

Remarque 2 – L'égalisation d'histogramme ne permet pas toujours une amélioration définitive. C'est en particulier le cas pour les images aux histogrammes très « piqués », *cf.* (a) et (b). Par ailleurs, l'amélioration dépend largement de ce que l'on cherche à « voir » dans l'image, *cf.* (c) et (d).



Cours 2 : opérations ponctuelles

— Sommaire —

1. *Introduction aux opérateurs ponctuelles*
2. *Égalisation/spécification histogramme*
3. ***Opérations algébriques et logiques***

◆ *Opérations arithmétiques et logiques*

Un certain nombre de traitements intéressants peuvent être obtenus par de simples opérations

Arithmétiques

soustraction : *différence d'images,*
addition : *moyennage*
multiplication
division

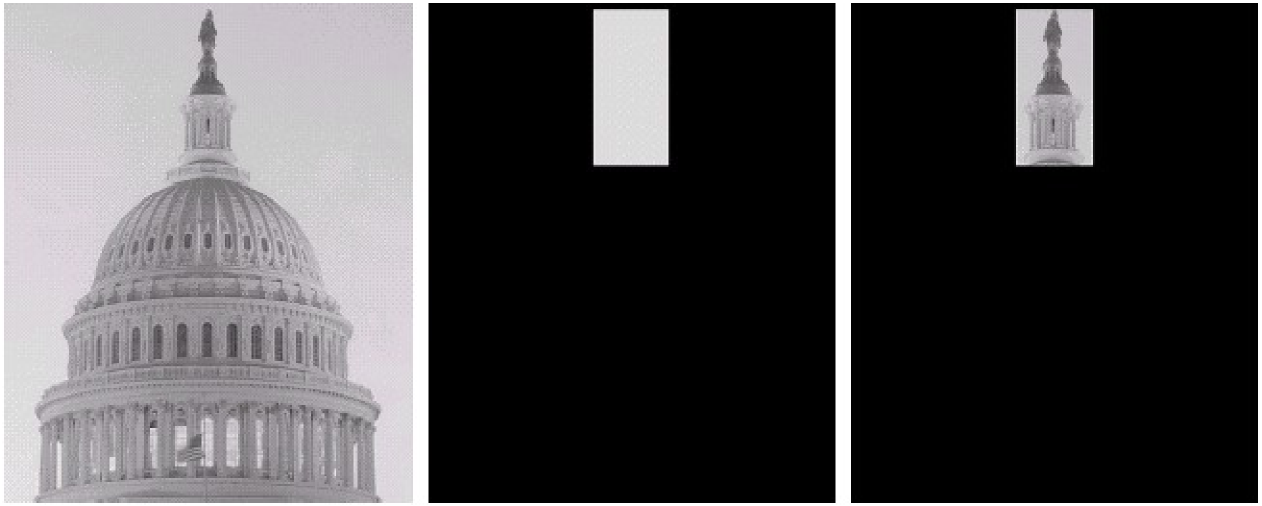
Logiques

ET/OU : *création de masque, région d'intérêt*

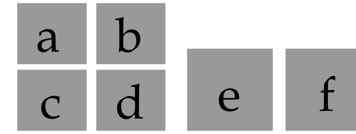
Opération logique : ET (découpage)

a b c

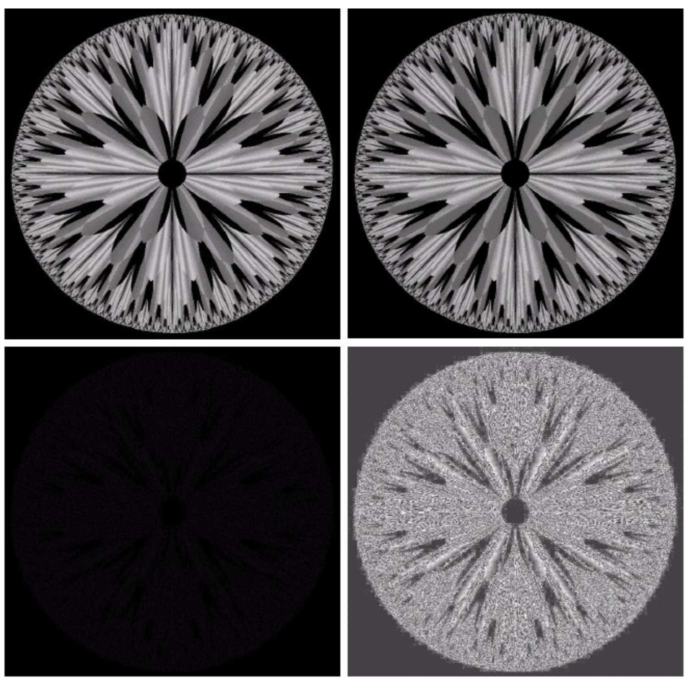
Pour une image donnée (a), la conception d'un masque (b) et le recours à une opération logique ET permet d'isoler une région d'intérêt dans une image (c).

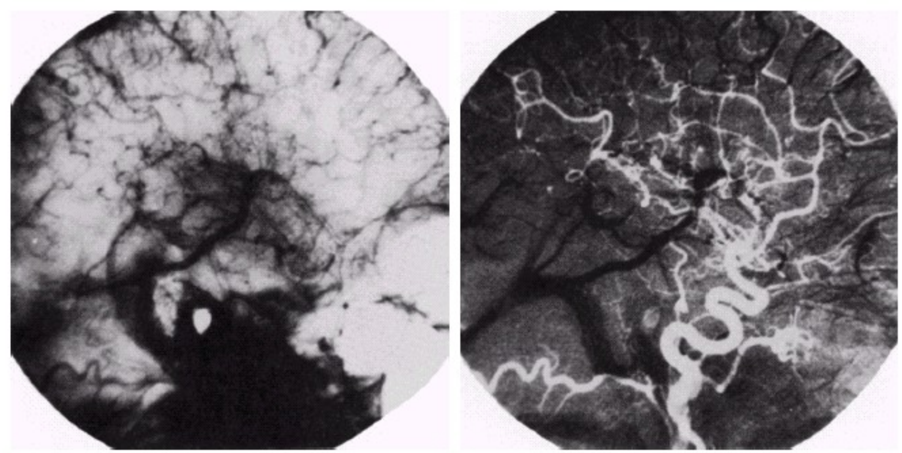


Opération arithmétique : soustraction



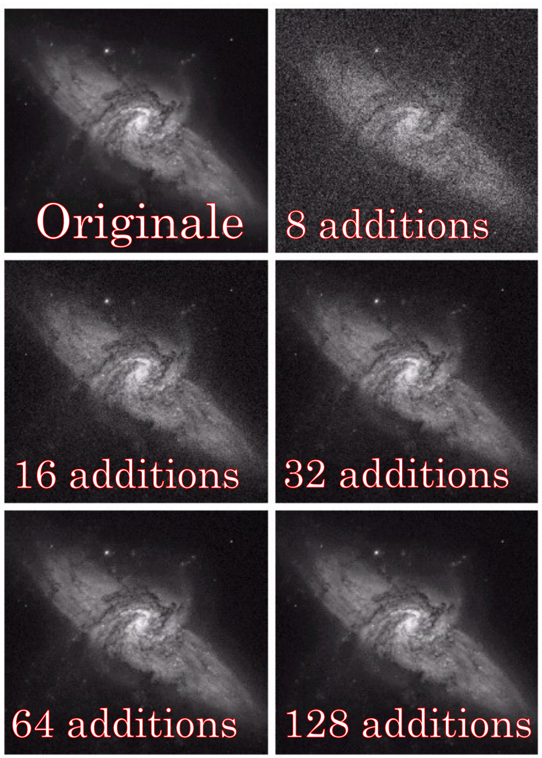
Pour deux images (a) et (b), l'opération de soustraction met en lumière les différences entre deux images visuellement proches ; notez que le résultat (c) peut nécessiter une opération d'égalisation (d). Ce type d'opération est largement utilisé en imagerie médicale, *e.g.* pour soustraire la contribution d'un fond physiologique (e) avant injection d'un agent de contraste (f).

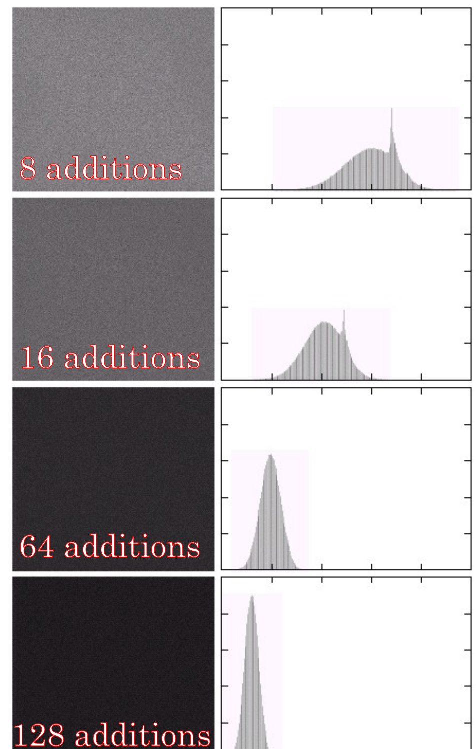




Opération arithmétique : `addition`

Lors de l'acquisition d'une **même scène** dans des conditions expérimentales soumises à des *fluctuations aléatoires* (« bruit » d'instrumentation, statistique photonique, *etc*.), l'opération d'addition permet de réduire le niveau de bruit en sortie, cf. (a). L'effet de l'opération peut être illustré soustrayant les images bruitées à l'originale à mesure que le nombre d'addition augmente (b).





a

b

Opération arithmétique : `addition (suite)`

Comment ça marche ? Avec les outils de la théorie des probabilité que vous disposés, il est facile de démontrer, sous les hypothèses adéquates, que moyenner les observations permet en effet une réduction de la variance observée, *cf. exercice*.

Opération ponctuelle : notes finales

Remarque 1 - Un certain nombre d'opérations importantes de réhaussement d'image se déduisent d'une simple transformation décrite par une simple transformation ponctuelle.

Remarque 2 – Il n'existe pas de théorie « générale » du réhaussement d'image ; plutôt, un certain nombre d'approches à tester et à valider selon une démarche de type « essai-erreurs ».