EGIM 2004-2005
1ère année

TD d'Ondes électromagnétiques

Cours : Serge Huard

TD : Hassan Akhouayri,
Carole Deumié, Fabien Lemarchand

TD 1 d'Ondes électromagnétiques
Analyse Vectorielle

I. Définitions intrinsèques

1. Donner les définitions intrinsèques des opérateurs différentiels **grad**, div, **rot**. Donner leur expression dans le système de coordonnées cartésiennes. Donner un exemple où **rot A** n'est pas perpendiculaire à **A**

2. A partir de 1., calculer l'expression de :
    a. Le gradient en cordonnées cylindriques et sphériques.
    b. La divergence en coordonnées sphériques.
    c. Le rotationnel en coordonnées cylindriques

II. Formules diverses

1. Donner les expressions simplifiées de
    a. div(ϕ**A**)
    b. div (**A**^**B**)
    c. **grad**($\psi\phi$)
    d. **rot**(ϕ**A**)
    e. **rot**(**rot**(**A**))
    f. div(**grad**(ϕ))
    g. div(**rot**(**A**))
    h. **rot**(**grad**(ϕ))

   Démontrer a, b et d en coordonnées cartésiennes.

2. M et M' étant deux points repérés par **r**=**OM** et **r'**=**OM'**, on pose R=MM'.
    - Montrer que $\mathbf{grad}_M$(R)=**u** avec **u** = **M'M**/R
    - Si f est une fonction ne dépendant que de R, montrer que $\mathbf{grad}_M$(f(R))=df/dR **u**
    - En déduire le calcul le potentiel du champ électrostatique créé par un dipôle.

3. Transformation d'intégrales
    a. Enoncer le 1er théorème de Green. Démontrer le 2ème théorène de Green. Donner l'expression d'une autre transformation volume/surface et la démontrer sur un axe.
    b. Intégrales de sufaces en intégrales curvilignes : Formule de Stockes…
    c. Application : soit le tétraèdre défini par les points (0 ;0 ;0) (0 ;1 ;0) (1 ;0 ;0) (0 ;0 ;1) et la fonction **f**(M)=**OM**. Déterminer le volume du tétraèdre. En déduire. le flux de f sur la surface interne aux points 0 ;1 ;0) (1 ;0 ;0) (0 ;0 ;1).

TD 2-3 d'Ondes électromagnétiques
Ondes planes - états de polarisation

I. Equation de Helmholtz

4. Rappeler les équations de Maxwell dites temporelles. En déduire leur formulation dans le cas du régime harmonique. Comme s'exprime un champ réel $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ en fonction du champ complexe $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega)$?

   On se placera désormais dans le cas du régime harmonique.

5. On considère un milieu linéaire, homogène, isotrope, sans sources réelles, non magnétique, diélectrique ou conducteur. Quelles sont les relations constitutives vérifiées par le milieu ?

6. Etablir l'équation de Helmholtz

II Onde plane en milieu diélectrique non absorbant

1. Montrer que $E(\mathbf{r},\omega)=\mathbf{E_0}(k,\omega)\ \exp(i\mathbf{k.r})$ est solution de l'équation de Helmholtz. En déduire la relation de dispersion reliant $\mathbf{k}$ et ω. Donner l'expression du champ $\mathbf{E}(r,t)$.

2. Dans le cas d'un milieu non absorbant, on se place dans le cas où $\mathbf{k}$ est réel (onde dite homogène). Définir l'indice de réfraction du milieu. Identifier les surfaces équi-phases et équi-amplitudes et déterminer la vitesse de phase.

3. Etablir l'expression de H, et définir l'impédance et l'admittance du milieu. Application : que valent Z et Y pour le vide et pour un verre d'indice n =1.5 @ λ = 600nm.

III. Cas du milieu absorbant

1. Montrer que dans ce cas $\mathbf{k}$ est un vecteur complexe $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$. Identifier les plans équi-phases et équi-amplitudes. Application au cas où $\mathbf{E}\,(r, \omega) = (1+2i) \exp\,[(1+i)x + (2-3i)y]\ \mathbf{e_z}$

2. On considère une onde se propageant dans de l'argent de permittivité ε = -8.2344 +0.287i @ λ =600nm. Au bout de quelle distance, appelée longueur d'atténuation, l'amplitude du champ est-elle divisée d'un facteur e ?

IV. Onde plane inhomogène

1. On consière une onde de la forme $\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)=\mathbf{E_0}\exp(i\mathbf{k}.\mathbf{r})$ se propageant dans un milieu dielectrique non absorbant. On pose $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$. Quelles sont les conditions vérifiées par $\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}''$, et $\mathbf{E_0}$?
2. Exprimer le vecteur de Poynting $S(\mathbf{r},\omega)= \frac{1}{2}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*)$ puis sa partie réelle.

V. Etude d'états de polarisation

1. Si $\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)=\mathbf{E_0}\exp(i\mathbf{k}.\mathbf{r})$ avec $\mathbf{E_0} = \rho\, e^{i\theta}.\, \mathbf{u}$, avec $\mathbf{u}$ vecteur réel unitaire, montrer que l'extrémité de $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ décrit au cours du temps une figure particulière qu'on caractérisera précisément (on se placera en un $\mathbf{r}$ fixé). Déduire l'état de polarisation d'une telle onde.

2. Mêmes questions avec $\mathbf{E_0} = \mathbf{e_x} + i\,\mathbf{e_y}$

3. Mêmes questions avec $\mathbf{E_0} = \mathbf{e_x} + \mathbf{e_y} + 2i\,\mathbf{e_z}$

4. Mêmes questions avec $\mathbf{E_0} = (\sqrt{3}-i)\,\mathbf{e_x} + (1+i)\,\mathbf{e_y}$.

5. Dans le cas d'une polarisation elliptique ($E_x = A\cos\omega t$, $E_y = B\cos(\omega t-\phi)$), étudier le sens de parcours sur l'ellipse.

TD 4 d'Ondes électromagnétiques
Coefficients de Fresnel

On considère une onde plane monochromatique polarisée rectilignement traversant une interface entre deux milieux diélectriques d'indices réels n_1 et n_2 sous une incidence θ_1.

I. Calcul de r_E, t_E, r_M, t_M

1. Définir le plan d'incidence, les vecteurs d'ondes réfléchies et transmis. Montrer que pour résoudre les équations de Maxwell il est utile de découpler les cas E// et H// .
2. Pour les cas TE (respectivement TM), calculer les amplitudes (complexes) des ondes réfléchies sur **E** (resp. **H**) et transmises notées respectivement r_E, t_E, (resp. r_M, t_M).

II. Calcul de $r_\perp$, $t_\perp$, $r_{//}$, $t_{//}$

1. On définit par $r_\perp$et $t_\perp$, les amplitudes des champs **E(r,ω)** réfléchis et transmis dans le cas $E_\perp$. Donner leurs expressions.
2. Idem dans le cas E//
3. Etudier les variations de $r_\perp$ et $r_{//}$ et tracer ces coefficients en fonction de θ_1. Mettre en évidence l'incidence de Brewster.

III. Calcul de R et T

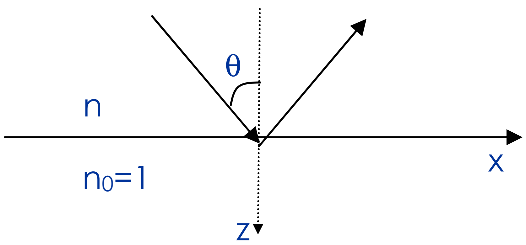
1. Rappeler l'expression de la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting pour une onde plane. En déduire les expressions de <**Si(r**,t)>, <**Sr(r**,t)>, <**St(r**,t)> .
2. Définir puis calculer les coefficients de Fresnel en énergie dans le cas $E_\perp$ puis E//.
3. en déduire la méthode du calcul de R et T dans le cas d'une polarisation rectiligne quelconque.

IV. Application

Soit une onde plane monochromatique se propageant rectilignement et tombant sous une incidence $\theta_1 = 45°$ et dont le vecteur champ électrique fait un angle de 30° avec le plan d'incidence. Les indices respectifs sont $n_1=1$ (air) et $n_2 =3.4$ (silicium @1.55µm).
Calculer les fractions d'énergie réfléchie et transmise.

TD 5 d'Ondes électromagnétiques
ETUDE EN REFLEXION TOTALE

I. Polariseur circulaire par réflexion totale



On considère une onde plane monochromatique polarisée rectilignement se réfléchissant sur un dioptre en z =0. L'angle d'incidence, noté θ, est tel qu'il y ait réflexion totale. Le champ électrique associé à cette onde est décomposé en deux composantes $E_{//}$ et $E_{\perp}$.

1. Montrer à partir des formules de Fresnel que les amplitudes des champs vérifient les relations:

$$\frac{E^r_{//}}{E^i_{//}} = e^{-j\varphi_{//}} \qquad \text{et} \qquad \frac{E^r_{\perp}}{E^i_{\perp}} = e^{-j\varphi_{\perp}}$$

Quelle est la signification physique de ces relations ? Donner $\tan\left(\frac{\varphi_{//}}{2}\right)$ et $\tan\left(\frac{\varphi_{\perp}}{2}\right)$ en fonction de θ et n.

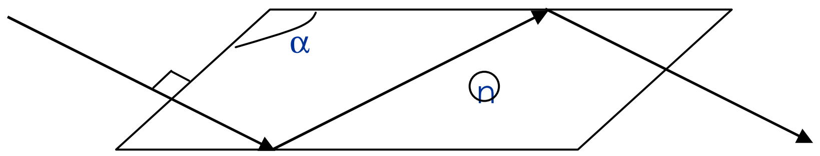
2. Montrer qu'il existe entre les vibrations $E^r_{//}$ et $E^r_{\perp}$ un déphasage ψ tel que :

$$\tan(\psi/2) = \frac{n}{\cot g(\theta)\sqrt{n^2 - 1 - \cot g^2(\theta)}}$$

Etudier la variation de $\tan(\psi/2)$ en fonction de cotg(θ). En déduire l'allure du graphe de $\tan(\psi/2)$ en fonction de θ.

3. Comment faut-il choisir n pour obtenir par une seule réflexion totale une onde polarisée circulairement ? Est-ce réalisable ? Déterminer les valeurs de n pour lesquelles on peut avoir ψ=π/4 ou ψ=3π/4. Comment faut-il choisir n et combien de réflexions totales faut-il pour obtenir une onde polarisée circulairement ?

4. On envoie sous incidence normale un faisceau parallèle de lumière monochromatique polarisée linéairement à 45° du plan de la figure sur un prisme en verre d'indice n dont la section droite est un parallélogramme. Quelle doit être la valeur de l'angle α pour que le faisceau sortant soit polarisé circulairement ?



II. Réflexion totale frustrée

Dans la configuration initiale (1 dioptre), de quelle nature est l'onde transmise ? Calculer sa longueur d'atténuation. Dans le cas de la polarisation $E_\perp$ donner l'expression des champs **E** et **H** transmis. En déduire la puissance transportée par l'onde suivant les trois directions.