Correction DS n°3

1) Questions de cours

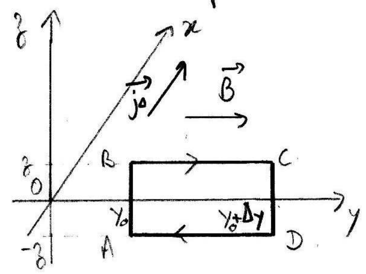
* $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = 0 \longrightarrow \oint \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$ * $\vec{E}$ est à circulation conservative
* $\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \longrightarrow \oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ * Théorème de Gauss : le flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée est égal à la charge contenue dans le volume délimité par la surface, divisé par ε_0.
* $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \longrightarrow \oiint \vec{B}\cdot\vec{dS} = 0$ * $\vec{B}$ est à flux conservatif.
* $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J} \longrightarrow \oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{enl}$ * Théorème d'Ampère : la circulation de $\vec{B}$ sur un contour fermé est égale au flux de la densité de courant $\vec{J}$ à travers la surface délimitée par le contour, multiplié par μ_0.

2) Exercice 1 :

(a) - Tout plan parallèle au plan (Oxz) est un plan de symétrie pour $\vec{j_s}$, donc d'antisymétrie par $\vec{B}$ $\Rightarrow$ $\vec{B} = B\,\hat{e}_y$.

- le plan $z = 0$ est un plan de symétrie pour $\vec{j_s}$, donc plan d'antisymétrie pour $\vec{B}$ $\Rightarrow$ $\vec{B}(x,y,z) = -\vec{B}(x,y,-z)$.
- $\vec{j_s}$ est invariant par translation selon les axes (Oy) et (Ox) donc $\vec{B}(x,y,z) = \vec{B}(z)$
- En conclusion : $\boxed{\vec{B} = B(z)\,\hat{e}_y \quad \text{et} \quad B(-z) = -B(z)}$

(b) Contour d'Ampère : rectangle ABCD composé des segments



AB : // à Oz, longueur $2z$, coupe (Oy) à y_0
BC : // à Oy, longueur dy, coupe (Oz) à z
CD : // à Oz, longueur $2z$, coupe (Oy) à $y_0+\Delta y$
DA : // à Oy, longueur dy, coupe (Oz) à $-z$.

* Théorème d'Ampère : $\oint_{ABCD} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{enl}$.

* $\int_{AB}$ et $\int_{CD}$ sont nulles car $\vec{B}$ est selon $\hat{e}_y$.
* $\int_{BC} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} B(z)\,\hat{e}_y\cdot dy\,\hat{e}_y = B(z)\,\Delta y$ et $\int_{DA} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int_{y_0+\Delta y}^{y_0} B(-z)\,\hat{e}_y\cdot dy\,\hat{e}_y = -B(-z)\,\Delta y$

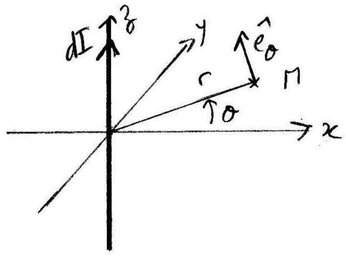
et $I_{enl} = j_s\,\Delta y$ d'où $B(z) = \frac{1}{2}\mu_0 j_s$

$$\Rightarrow \boxed{\text{pour } z>0 : \vec{B}(z) = \tfrac{1}{2}\mu_0 j_s\,\hat{e}_y \qquad \text{pour } z<0 : \vec{B}(z) = -\tfrac{1}{2}\mu_0 j_s\,\hat{e}_y}$$

(c) $\boxed{\vec{B}(z=0^+) - \vec{B}(z=0^-) = \mu_0 j_s \vec{e}_y}$

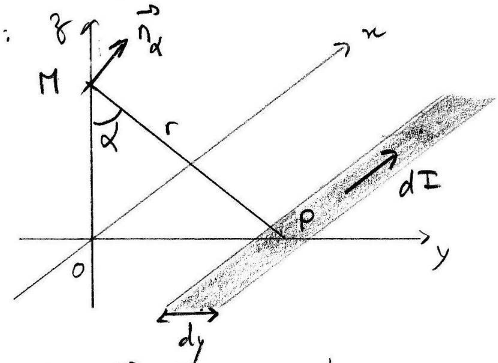
(d) i) $\boxed{dI = j_s\, dy}$

ii)



$$\boxed{d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0\, dI}{2\pi r}\,\hat{e}_\theta}$$

iii) Champ créé par le "fil" passant par P :



$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 j_s\, dy}{2\pi r}\,\vec{n}_\alpha \quad \text{avec} \quad r = z/\cos\alpha$$

et $y = z\tan\alpha \Rightarrow dy = \dfrac{z\, d\alpha}{\cos^2\alpha}$

Donc $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 j_s}{2\pi} \displaystyle\int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha\, \vec{n}_\alpha}{\cos\alpha}$

Or, d'après a), on sait que $\vec{B} = B\hat{e}_y$ et $\vec{n}_\alpha \cdot \hat{y} = \cos\alpha$.

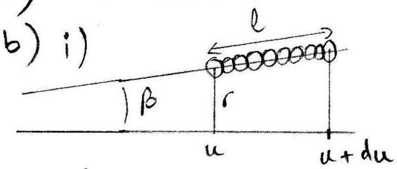
D'où $B(M) = \dfrac{\mu_0 j_s}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha = \frac{1}{2}\mu_0 j_s$

D'après a) on en déduit que
$$\boxed{\begin{array}{l} z>0 : \vec{B}(z) = \frac{1}{2}\mu_0 j_s \hat{e}_y \\ z<0 : \vec{B}(z) = -\frac{1}{2}\mu_0 j_s \hat{e}_y \end{array}}$$

3) Exercice 2 :

a) Voir T.D.

b) i)



$\boxed{r = u\tan\beta}$

ii) Les n spires sont réparties sur une longueur $l = \dfrac{u+du}{\cos\beta} - \dfrac{u}{\cos\beta} = \dfrac{du}{\cos\beta}$

Elles sont de diamètre a donc $\boxed{n = \dfrac{du}{a\cos\beta}}$

iii) Les n spires de rayon $r = u\tan\beta$ sont parcourues par $dI = nI$ et d'après a) $\boxed{d\vec{B}(0) = \dfrac{\mu_0 I}{2a}\,\dfrac{\sin^3\beta}{\cos\beta\tan\beta}\,\dfrac{du}{u}\,\hat{x}}$

iv) $\vec{B}(0) = \displaystyle\int_{u=h_1}^{h_2} d\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{2a}\sin^2\beta \int \frac{du}{u}\,\hat{x}$

soit $\boxed{\vec{B}(0) = \dfrac{\mu_0 I}{2a}\sin^2\beta\,\ln(h_2/h_1)\,\hat{x}}$