Correction DS n°2

1) Questions de cours

a) Vrai. À l'équilibre électrostatique, il n'y a pas de mouvement d'ensemble des charges à l'intérieur du conducteur, donc pas de force électrostatique, donc un champ électrique nul.

b) Faux. D'après le théorème de Coulomb, à la surface du conducteur, $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$, où $\hat{n}$ est la normale à la surface. Dans certains cas (exemple du plan conducteur infini en présence d'une charge ponctuelle) σ n'est pas constant.

c) Faux. La surface du conducteur est une équipotentielle, donc $\vec{E}$ est normal à la surface (voir théorème de Coulomb)

d) Faux. Le conducteur peut être influencé par d'autres charges (exemple du plan conducteur infini en présence d'une charge ponctuelle).

e) Vrai. Par définition de la terre.

2) Exercice 1

a) * Hypothèse de l'énoncé : γ est linéaire en x $\Rightarrow$ $\gamma = ax + b$

avec $\gamma(0) = \gamma_1$ et $\gamma(L) = \gamma_2$

D'où $\boxed{\gamma = \frac{x}{L}(\gamma_2 - \gamma_1) + \gamma_1}$

* $\vec{J} = \gamma\vec{E}$ et $j = \frac{I}{S}$ donc $\boxed{\vec{J} = \frac{I}{S}\hat{x}}$ et $\boxed{\vec{E} = \frac{I}{S}\frac{\hat{x}}{\frac{x}{L}(\gamma_2-\gamma_1)+\gamma_1}}$

* $V_1 - V_2 = \int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = \int_{x=0}^{L} \frac{I}{S}\frac{dx}{\frac{x}{L}(\gamma_2-\gamma_1)+\gamma_1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{V_1 - V_2 = \frac{IL}{S}\frac{\ln(\gamma_2/\gamma_1)}{\gamma_2-\gamma_1}}$

* $R = \frac{V_1 - V_2}{I}$ $\Rightarrow$ $\boxed{R = \frac{L}{S}\frac{\ln(\gamma_1/\gamma_2)}{\gamma_1-\gamma_2}}$

b) $T_2 \to T_1$ $\Rightarrow$ $\gamma_2 \to \gamma_1$, on écrit $\gamma_2 = \gamma_1 - \delta\gamma$

$$\left\{\begin{array}{l} \ln\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) = -\ln\left(1 - \frac{\delta\gamma}{\gamma_1}\right) \simeq \frac{\delta\gamma}{\gamma_1} \\ \frac{1}{\gamma_1-\gamma_2} = \frac{1}{\delta\gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{R \sim \frac{L}{S\gamma_1}}$$

c) $\text{div}\,\vec{J} = \text{div}(\gamma\vec{E}) = \gamma\,\text{div}\,\vec{E} + \vec{E}\cdot\vec{\text{grad}}\,\gamma = 0$

or, $\vec{\text{grad}}\,\gamma = \frac{d\gamma}{dx}\hat{x} \neq 0$ et $\vec{E} = E\hat{x}$ donc $\vec{E}\cdot\vec{\text{grad}}\,\gamma \neq 0$

d'où $\boxed{\text{div}\,\vec{E} \neq 0}$

$\rho(x) = \varepsilon_0\,\text{div}\,\vec{E}$ avec $\text{div}\,\vec{E} = \frac{dE}{dx} = \frac{I}{S}\frac{-\frac{(\gamma_2-\gamma_1)}{L}}{\left[\frac{x}{L}(\gamma_2-\gamma_1)+\gamma_1\right]^2}$ d'après a)

$\Rightarrow \boxed{\rho(x) = \frac{\varepsilon_0 I}{LS}\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\left[\frac{x}{L}(\gamma_2-\gamma_1)+\gamma_1\right]^2}}$ $\gamma_2 < \gamma_1 \Rightarrow \rho(x) > 0$ déficit d'électrons.

3) Exercice 2

a) $\boxed{q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho}$

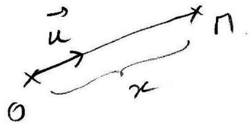
b) Volume de la coquille sphérique :

$$dV = \left(\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi\right) dr = 4\pi r^2 \, dr$$

d'où $\boxed{dq = 4\pi r^2 \rho \, dr}$

c) Champ créé par la sphère de charge q, de rayon r, à une distance x du centre : Théorème de Gauss $\Rightarrow$ $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\hat{u}$

avec $\hat{u} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$



Donc $\boxed{\vec{f_e} = \frac{q_e q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\vec{u} = \frac{q_e \rho}{3\varepsilon_0 x^2} r^3 \vec{u}}$

d) $W_e = \int_{x=+\infty}^{r} \vec{f_e} \cdot \vec{dl}$ avec $\vec{dl} = dx \, \vec{u}$.

$W_e = \int_{+\infty}^{r} \frac{q_e q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dx}{x^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{W_e = \frac{-q_e q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

q_e et q de même signe $\Rightarrow$ répulsion, travail résistant < 0

$\boxed{U_e = -W_e = \frac{q_e q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q_e r^2 \rho}{3\varepsilon_0}}$

pour les n charges q_e constituant la charge $dq = n q_e$:

$dU = \frac{q \, dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$ soit $\boxed{dU = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0} r^4 \rho^2 \, dr}$

e) $U = \int_{r=0}^{R} dU$ $\Rightarrow$ $U = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho^2 \frac{R^5}{5}$

d'où $\boxed{U = \frac{4}{15}\pi \rho^2 \frac{R^5}{\varepsilon_0} = \frac{Q\rho R^2}{5\varepsilon_0}}$