

DS d'Electromagnétisme 1 - Eléments de solution

1. Charges ponctuelles

2. Champ créé par une distribution volumique de charges

- (a)
- invariances de la distribution de charges par translation dans les directions perpendiculaires à l'axe (Ox) donc $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x)$
 - symétrie de la distribution de charges par rapport à tout plan parallèle à l'axe (Ox) donc $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}}$
 - symétrie de la distribution de charges par rapport au plan $x = 0$ donc $\mathbf{E}(x) = -\mathbf{E}(-x)$

Comme le champ est colinéaire à $\hat{\mathbf{x}}$, les lignes de champ sont parallèles à (Ox). Les équipotentielles, perpendiculaires aux lignes de champ sont donc les plans perpendiculaires à (Ox).

- (b)
- Théorème de Gauss avec comme surface de Gauss une surface composée de parois latérales parallèles à l'axe (Ox), d'un "couvercle" et d'un "fond" perpendiculaires à l'axe (Ox) et symétriques l'un de l'autre par rapport au plan $x = 0$. Ca peut être par exemple un cylindre (voir fig.(1a)). Le "couvercle", S_1 et le "fond" S_2 sont situés aux abscisses x et $-x$, et la paroi latérale Σ a une hauteur $2x$.
 - Calcul du champ:

$$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_1 + \iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_2 + \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

Le flux du champ à travers la paroi latérale est nul, car $\mathbf{E}$ est dirigé selon $\hat{\mathbf{x}}$. A travers S_1 , le flux du champ est égal au flux à travers S_2 , car $\mathbf{E}(x) = -\mathbf{E}(-x)$ et $d\mathbf{S}_1 = -d\mathbf{S}_2$. Le premier membre de l'éq.(1) est donc égal à $2E(x)S_1$. Pour déterminer le second membre, il faut distinguer les cas $x > a$ et $0 < x < a$.

– $x > a$ (voir fig.(1a)) La charge est contenue dans un cylindre section S_1 , et de hauteur $2a$: $Q_{int} = 2aS\rho$.

– $0 < x < a$ (voir fig.(1b)) La charge est contenue dans un cylindre section S_1 , et de hauteur $2x$: $Q_{int} = 2xS\rho$.

On obtient donc: $\mathbf{E} = \frac{a\rho}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{x}}$ si $x > a$, $\mathbf{E} = \frac{x\rho}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{x}}$ si $-a < x < a$, $\mathbf{E} = \frac{-a\rho}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{x}}$ si $x < -a$.

- Calcul du potentiel: $\mathbf{E} = -\text{grad}V = -\frac{dV}{dx}\hat{\mathbf{x}}$, donc

$$V = \frac{-a\rho x}{\epsilon_0} + C_1 \text{ si } x > a, \quad V = \frac{-x^2\rho}{2\epsilon_0} + C_2 \text{ si } -a < x < a, \quad V = \frac{a\rho x}{\epsilon_0} + C_3 \text{ si } x < -a.$$

Pour déterminer les constantes C_1, C_2, C_3 , on utilise la condition selon laquelle $V(0) = V_0$ et la continuité du potentiel aux interfaces. On obtient: $C_2 = V_0$, puis $C_1 = V_0 + \frac{a^2\rho}{2\epsilon_0}$ et $C_3 = V_0 + \frac{a^2\rho}{2\epsilon_0}$.

- (c) Lorsque x devient grand devant a , la distribution volumique de charges peut être assimilée à un plan infini chargé avec une densité surfacique σ . Ce plan crée un champ $\mathbf{E} = \sigma/2\epsilon_0\hat{\mathbf{x}}$ au dessus et $\mathbf{E} = -\sigma/2\epsilon_0\hat{\mathbf{x}}$ au dessous. Donc, d'après le résultat de la question précédente, $\sigma = 2a\rho$. Autre méthode: $\iiint \rho dv = \int_{z=-a}^{z=a} \iint \rho dz dS = \iint 2a\rho dS$, donc $\sigma = 2a\rho$.

3. Champ créé par une distribution linéique de charges

- (a) • invariance de la distribution de charges par rotation autour de l'axe (Oz) donc $\mathbf{E}(r, \theta, z) = \mathbf{E}(r, z)$ (voir fig.(2))
- le plan contenant le point M et perpendiculaire au fil et le plan contenant le point M et le fil sont des plans de symétrie pour la distribution de charges, on en déduit que $\mathbf{E}$ est radial: $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{r}}$
- (b) On utilise la formule intégrale $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \lambda dz \frac{\mathbf{PM}}{||\mathbf{PM}||^3}$. En introduisant l'angle α formé par les vecteurs $\mathbf{MO}$ et $\mathbf{MP}$, on a: $||\mathbf{PM}|| = r/\cos \alpha$, ainsi que $\mathbf{PM} = r\hat{\mathbf{r}} - z\hat{\mathbf{z}}$, et $z = r \tan \alpha$, d'où l'on tire $dz = \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha}$. On a donc $\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha (\hat{\mathbf{r}} - \tan \alpha \hat{\mathbf{z}})$. Le calcul de l'intégrale permet d'aboutir à $\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)\hat{\mathbf{r}} + (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)\hat{\mathbf{z}}]$. Dans le cas où on veut calculer le champ en un point M du plan $z = 0$, on a $\alpha_1 = -\alpha_2$, la composante selon $\hat{\mathbf{z}}$ s'annule, et l'on obtient $\mathbf{E} = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{a^2 + r^2}} \hat{\mathbf{r}}$
- (c) Si a devient très grand devant r , on obtient d'après le résultat précédent: $\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}$. On retrouve l'expression du champ créé à une distance r par un fil infini, résultat que l'on peut aussi obtenir grâce au théorème de Gauss.

