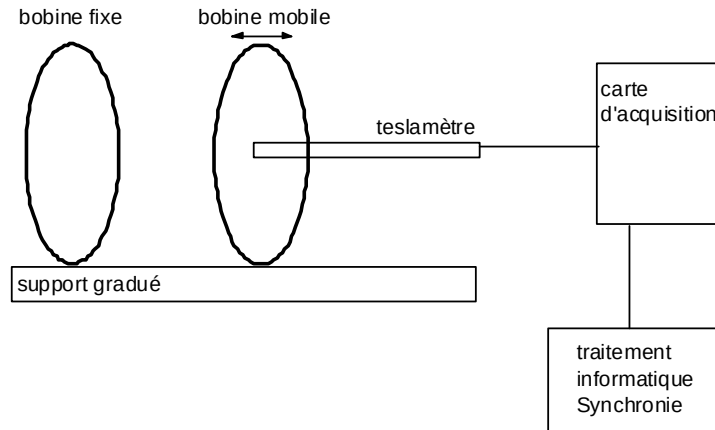


TP Bobines

Note : avant la séance de TP, l'énoncé doit avoir été lu attentivement, et les exercices de préparation traités. Le compte rendu (1 par binôme), sera à rendre à la fin de la séance.

L'objectif de ce TP est d'effectuer une étude expérimentale du champ magnétique produit par un courant circulaire parcourant une, puis deux bobines plates identiques et coaxiales. Le dispositif expérimental est représenté sur le schéma suivant :



Les bobines sont composées de $N=95$ spires, ont un rayon $R=65$ mm, et ont une largeur $L=25$ mm. Le courant maximal qu'elles puissent accepter ne peut pas dépasser $I_{max}=5$ A. La mesure du champ magnétique se fait à l'aide d'un teslamètre connecté à une carte d'acquisition, qui elle-même est connectée à un ordinateur (voir schéma). La visualisation des valeurs du champ magnétique se fait alors sur le logiciel Synchronie.

I) Etude d'une bobine :

Théorie :

Le champ magnétique $\vec{B}$ créé par un courant stationnaire se calcule à partir des équations de Maxwell :

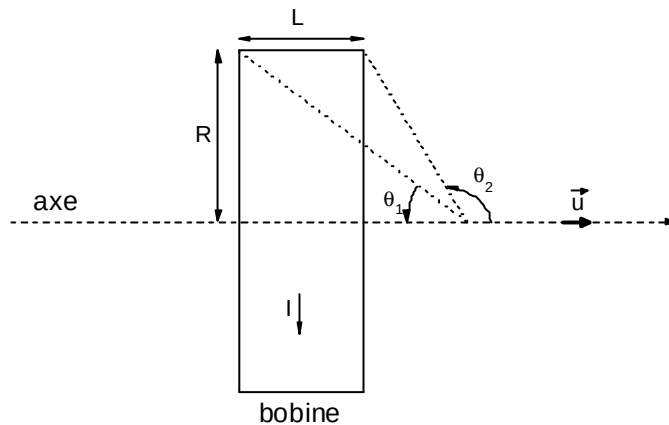
$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases} \quad (1)$$

$\vec{j}$ désignant la densité surfacique de courant, et μ_0 la perméabilité du vide, de valeur $\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7}$ H.m⁻¹.

Dans le cas présent où les bobines sont plates et où leur épaisseur peut être négligée, ces équations conduisent à l'expression suivante pour le champ créé par une bobine sur son axe :

$$\vec{B}(\theta_1, \theta_2) = \frac{\mu_0 N I}{2L} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \vec{u} = 2,40 \cdot 10^{-3} I (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \vec{u} \quad (2)$$

où I est la valeur algébrique du courant, $\vec{u}$ un vecteur unitaire orienté suivant la direction de l'axe, et (θ_1, θ_2) les angles représentés sur la figure suivante :



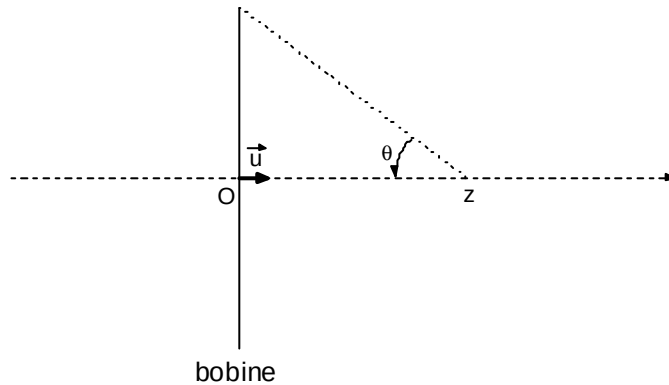
On montre alors que, dans le cas où la largeur de la bobine peut être négligée, l'expression du champ se simplifie :

$$\vec{B}(\theta) = \frac{\mu_0 N I}{2R} \sin^3 \theta \vec{u} = 9,18 \cdot 10^{-4} I \sin^3 \theta \vec{u} \quad (3)$$

soit encore :

$$\vec{B}(z) = \frac{9,18 \cdot 10^{-4} I}{(1 + (z/R)^2)^{3/2}} \vec{u} \quad (4)$$

où θ et z sont représentés sur la figure suivante :



Cette condition est ici vérifiée. Pour le voir, on peut par exemple calculer la valeur du champ au centre de la bobine en utilisant tantôt la formule générale (2), tantôt la formule simplifiée (4) : il suffit de poser $\theta_1 = \theta_2 = \arctan(2R/L)$ dans (2) et $z=0$ dans (4). On aboutit alors à $B=9,02 \cdot 10^{-4} I$ avec la formule (2) et $B=9,18 \cdot 10^{-4} I$ avec la formule (4), ce qui revient à un écart inférieur à 2 %, ordre de grandeur de la précision des mesures faites avec le teslamètre. Ceci permet ainsi de négliger la largeur de la bobine et de considérer que le champ magnétique est donné par la formule (4) (ou (3)).

Travail expérimental :

L'objet de cette étude consiste à vérifier la relation (4) de manière expérimentale.

Branchez la bobine mobile, faites vérifier votre montage par l'enseignant avant de mettre sous tension.

- 1) Dans cette partie, on fixera une valeur pour le courant.
 - a. Mesurez le champ magnétique en différents points de l'axe puis tracez sa valeur algébrique B en fonction de la position z . Que pouvez-vous constater ?
 - b. Tracez alors $B^{-2/3}$ en fonction de z^2 (attention à l'origine des z).
 - c. Quelle interprétation pouvez-vous tirer de cette courbe ? Retrouve-t-on le résultat attendu (qualitativement et quantitativement) ?

Exercice de préparation :

- *quelle est l'allure de B en fonction de z ?*
- *expérimentalement, il est plus facile de vérifier qu'une loi est une fonction affine plutôt qu'une fonction du type formule (4). Comment peut-on transformer cette dernière pour obtenir l'équation d'une droite ?*

- 2) On s'intéresse maintenant aux valeurs du champ au centre de la bobine.
 - a. Mesurez le champ pour différentes valeurs du courant, puis tracez B en fonction de I .
 - b. Qu'observe-t-on ? Le résultat est-il conforme avec la théorie (qualitativement et quantitativement) ?

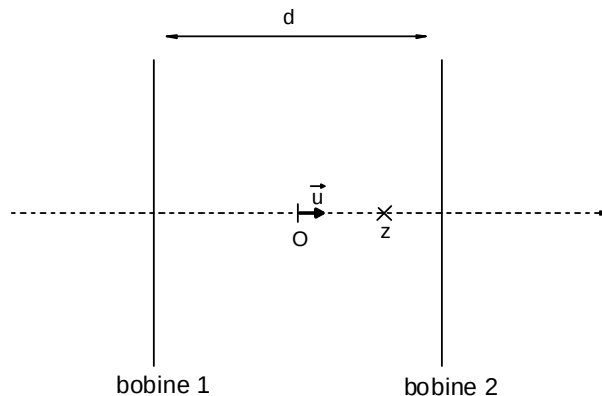
II) Couplage de deux bobines

Théorie :

Lorsque plusieurs circuits sont traversés par un courant, le champ magnétique résultant est la somme des champs magnétiques créés par chaque circuit : ce résultat, dénommé principe de superposition, est une conséquence directe des équations de Maxwell. Dans le cas présent où deux bobines identiques sont disposées de façon coaxiale et sont traversées par le même courant, le champ magnétique sur l'axe peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{B}(z) = \frac{9,18 \cdot 10^{-4} I}{\left(1 + \left(\frac{z + d/2}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \vec{u} + \frac{9,18 \cdot 10^{-4} I}{\left(1 + \left(\frac{z - d/2}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \vec{u} \quad (5)$$

d désigne ici la distance séparant les bobines (voir schéma), et z est la position par rapport au milieu des deux bobines.



Pour de faibles écarts au centre, on peut effectuer un développement limité de $\vec{B}$ au voisinage de $z=0$: un calcul à l'ordre 3 donne alors

$$\vec{B}(z) \approx \frac{2 \times 9,18 \cdot 10^{-4} I}{(1 + (d/2R)^2)^{3/2}} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{(d/R)^2 - 1}{(1 + (d/2R)^2)^2} \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right] \vec{u} \quad (6)$$

Un cas particulièrement intéressant est celui où $d=R$. Il permet de faire disparaître la dépendance en z de la formule (6). Un calcul direct conduit alors à :

$$\vec{B}(z) \approx \frac{16}{5\sqrt{5}} \times 9,18 \cdot 10^{-4} I \vec{u} \quad (7)$$

et montre que le champ magnétique ne dépend plus de la position. Lorsque les bobines ont une telle configuration, on dit qu'elles sont disposées dans les conditions de Helmholtz.

Travail expérimental :

On imposera au courant une valeur fixée. Branchez les deux bobines en série, faites vérifier votre montage par l'enseignant avant de mettre sous tension.

- 1- Après avoir fixé l'écart entre les deux bobines ($d > R$, $d < R$ ou $d = R$), mesurez en différents points de l'axe le champ magnétique créé, puis tracez sa valeur algébrique B en fonction de la position z .
- 2- Que constatez-vous ? Observez-vous bien les résultats attendus (qualitativement et quantitativement) ?
- 3- On pourra traiter les questions 1 et 2 pour les trois cas : $d > R$, $d < R$ ou $d = R$.

Exercice de préparation : en utilisant le théorème de superposition et l'allure de $B(z)$ dans le cas où une seule bobine est branchée, représentez les 3 types de courbes que l'on peut obtenir lorsque les deux bobines sont branchées dans les cas $d > R$, $d < R$ ou $d = R$. Dans chaque cas, calculez, d'après la formule (6), la valeur de B au centre ($z=0$).

TP simulations numériques en électrostatique

Note : avant la séance de TP, l'énoncé doit avoir été lu attentivement, et les exercices de préparation traités. Le compte rendu (1 par binôme), sera à rendre à la fin de la séance.

Pour résoudre un problème d'électrostatique, c'est à dire déterminer le champ électrique et le potentiel créé par une distribution de charges, nous utilisons les équations de Maxwell de l'électrostatique

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \text{div}\vec{D} = \rho \quad \text{avec} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \quad \text{et} \quad \vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}, \quad (1)$$

dans un milieu linéaire, homogène, isotrope, de permittivité relative ϵ_r . Vous avez sans doute déjà constaté que pour des distributions de charges possédant peu de symétries et invariances, les équations de Maxwell deviennent difficiles à résoudre analytiquement, c'est à dire « à la main ». Il est alors nécessaire de faire appel à des méthodes numériques. Le logiciel BELA, avec lequel nous travaillerons en TP, est basé sur la méthode des éléments finis, méthode très utilisée dans divers domaines de la physique. Pour bien comprendre le fonctionnement du logiciel, et appréhender ses limites, quelques notions sur la méthode des éléments finis sont nécessaires. C'est pourquoi nous consacrons la première partie de ce TP à une brève introduction à la méthode des éléments finis et au logiciel BELA. Dans la seconde partie, nous étudierons un problème connu : le condensateur plan. Enfin, dans la troisième partie nous aborderons des systèmes plus complexes, correspondant à des applications importantes de l'électrostatique.

Partie 1:

Quelques mots sur la méthode des éléments finis et le logiciel BELA

En combinant les équations de l'électrostatique rappelées en introduction, on peut obtenir l'équation de Poisson,

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0}. \quad (2)$$

A cette équation viennent s'ajouter des conditions aux limites, qui assurent l'unicité de la solution. Les conditions aux limites que l'on impose à V , sur la frontière du domaine d'étude (nécessairement fini, nous le verrons plus loin), peuvent être du type

- Dirichlet: on impose la valeur de V
- Neumann: on impose la dérivée de V , $\partial V / \partial n$ dans une direction normale à la frontière
- Robin: on impose une relation entre V et $\partial V / \partial n$, du type $\partial V / \partial n + c_0 V + c_1 = 0$.

C'est le problème que résout le logiciel BELA. La méthode des éléments finis consiste à remplacer l'équation aux dérivées partielles avec les conditions aux limites, par un système

d'équations linéaires à coefficients constants. Pour plus de clarté, nous allons expliquer la méthode des éléments finis dans le cas mono-dimensionnel, V et ρ ne dépendent que de la variable x , et le domaine d'étude est un segment noté $[a,b]$. Puis nous étendrons la méthode au cas bi-dimensionnel.

Introduction des éléments finis et d'une base de fonction

Découpons le segment $[a,b]$ en $m+1$ intervalles égaux. Notons x_k les points séparant les intervalles. Le découpage du segment est appelé maillage, et les points x_k sont les nœuds du maillage. A chacun des nœuds, nous associons une fonction $\phi_k(x)$, linéaire par morceau, définie sur $[a,b]$ par (voir fig. (1a)):

$$\begin{aligned} \phi_k &= 0 & \text{si } x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}], \\ \phi_k(x) &= \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} & \text{si } x \in [x_{k-1}, x_k], \\ \phi_k(x) &= \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} & \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}]. \end{aligned} \quad (3)$$

L'ensemble des fonctions $\{\phi_i(x), i=1, \dots, m\}$ constitue une base.

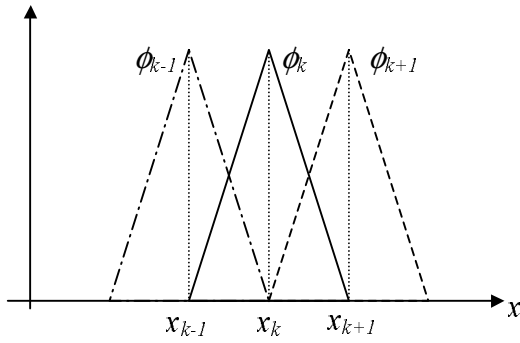


Fig.(1a) : fonctions de base, cas 1D

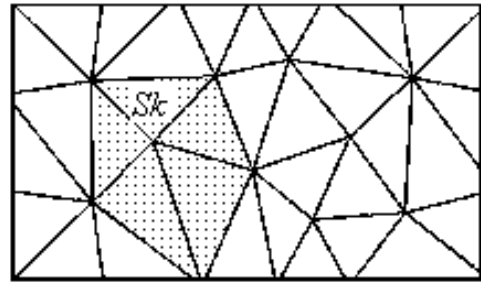


Fig.(1b) : maillage en triangle, cas 2D

Projection sur la base, obtention d'un système d'équations linéaire

La méthode des éléments finis consiste à écrire la fonction inconnue $V(x)$ comme une combinaison linéaire des fonctions de la base:

$$V(x) = \sum_{i=1}^m \mu_i \phi_i(x). \quad (4)$$

Notez que le nombre m de fonctions de base est nécessairement fini (passage au numérique), et que la fonction V sera d'autant mieux représentée que m sera grand. A partir de l'équation de Poisson, il est alors possible de montrer (plusieurs étapes sont nécessaires) que le problème s'écrit sous la forme $AX=B$ où X est un vecteur dont les éléments sont les inconnues μ_i , A est une matrice d'éléments A_{ik} , et B est un vecteur d'éléments B_k , avec

$$A_{ik} = \int_a^b \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_k}{dx} dx, \quad \text{et} \quad B_k = \int_a^b \frac{\rho(x)}{\epsilon_r \epsilon_0} \phi_k(x) dx. \quad (5)$$

Le système d'équation linéaire obtenu peut être résolu numériquement. Cependant, pour obtenir une bonne précision sur le calcul, le nombre m de fonctions de base, et donc le nombre d'inconnues, doit être grand. Pour faciliter la résolution de l'équation $AX=B$, la matrice A doit donc être très creuse, c'est à dire contenir beaucoup de zéro. Dans le cas des fonctions $\phi_k(x)$ définies plus haut, on peut montrer que $A_{ik}=0$ dès que $|i-k|>1$, la matrice A est tri-diagonale.

Généralisation au cas bi-dimensionnel

Dans le cas d'un problème bi-dimensionnel, c'est à dire où V et r dépendent de deux variables x et y , les éléments finis ne sont plus des segments délimités par les x_k , mais des triangles de sommets S_k . Les fonctions de bases $\phi_k(x,y)$ sont choisies linéaires, de la forme $\phi_k(x,y)=\alpha x+\beta y+\gamma$, sur les triangles ayant S_k comme sommet (en grisé sur la fig.(1b)) et nulles $\phi_k(x,y)=0$, sur les autres triangles. La matrice A obtenue n'est plus tri-diagonale, mais contient encore beaucoup de zéros.

Remarques

L'avantage majeur de la méthode des éléments finis réside dans sa souplesse, puisqu'elle permet de traiter des configurations variées. En contrepartie, les algorithmes mettant en œuvre cette méthode sont en général longs et difficiles à développer.

Du point de vue de l'utilisateur, des précautions sont à prendre. La solution du problème est approchée par sa projection sur des fonctions de base continues par morceaux sur les éléments finis. Une erreur est donc commise, et elle est d'autant plus grande que le nombre de nœuds du maillage est faible. Il appartient à l'utilisateur de vérifier que ce nombre est suffisant. D'autre part, la définition du problème et des conditions aux limites est, elle aussi, importante. En particulier, la méthode des éléments finis opère nécessairement sur un domaine limité, et les conditions aux limites ne peuvent donc être imposées qu'à une distance finie du système.

Partie 2 :

Modélisation d'un condensateur plan

Le condensateur plan est de loin le plus important de tous les condensateurs car, dans tous les condensateurs usuels, les armatures sont à une distance suffisamment faible devant les rayons de courbure pour que l'on puisse les assimiler localement à des plans.

Dans toute la suite, S désigne la surface d'une armature, e l'épaisseur du condensateur, soumis à une différence de potentiel U .

$$\begin{aligned} S &= 20 \times 20 \text{ cm}^2 \\ e &= 1 \text{ mm} \\ 1/4\pi\epsilon_0 &= 9 \times 10^9 \text{ S.I.} \end{aligned}$$



Fig. (2) : schéma du condensateur plan

A. Définition du problème:

Le condensateur plan à étudier a été représenté dans le fichier **condensateur.FEE** (fichier à ouvrir avec le logiciel « beladraw »). Identifier les éléments représentés à l'aide de la figure 3.

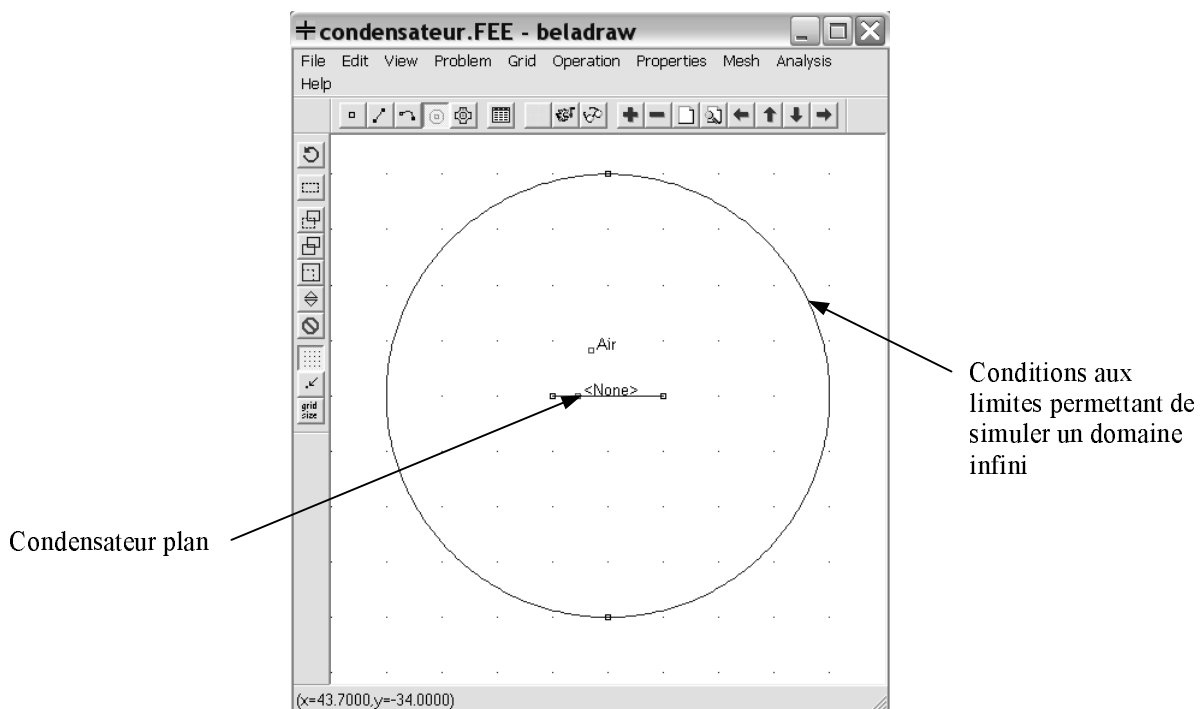


Fig.(3) : représentation de la sphère conductrice sous BELA

Pour terminer la définition du problème, il reste à choisir le potentiel de chaque électrode et le matériau placé à l'intérieur du condensateur.

Pour affecter un potentiel à chaque électrode, sélectionnez une électrode (elle apparaît en rouge), appuyez sur la barre d'espace, et choisissez le potentiel dans le menu déroulant qui apparaît.

Pour choisir le matériau, sélectionnez le nœud vert (Block Label), appuyez sur la barre d'espace, et choisissez le matériau dans la liste proposée. Commencer par remplir le condensateur avec de l'air.

B. Résolution du problème, analyse des résultats

Créez le maillage associé au problème , faites la résolution , et observez le résultat .

a) Observer les lignes de champ électrique  et les surfaces équipotentiels  du problème. Décrire vos observations, commenter.

b) Relever la charge électrique portée par chaque armature (menu « view », puis « conductor properties »). En déduire la capacité du condensateur plan en présence d'air. Comparez avec la valeur théorique.

c) En utilisant une démarche similaire, déterminer numériquement la capacité du condensateur plan en présence d'un milieu diélectrique (du PVC). Commenter la valeur obtenue. Conclure.

Exercice de préparation :

Rappeler la forme des lignes de champ et des surfaces équipotentiellles associées à un condensateur plan. Exprimer sa capacité en fonction de S et e . Faire les applications numériques (valeur du champ, capacité) pour $S = 20 \times 20 \text{ cm}^2$, $e = 1 \text{ mm}$ et $V_+ = 10\text{V}$, $V_- = -10\text{V}$. On rappelle que $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \times 10^9 \text{ S.I.}$

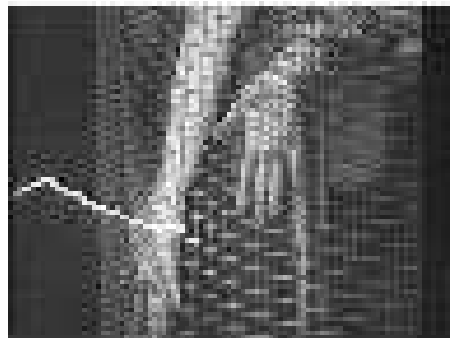
Partie 3

Différentes applications

A. Etude de la cage Faraday

La cage de Faraday est utilisée dans de nombreux cas pour avoir un environnement libre de tout champ électrique. On peut ainsi faire des protections électriques. Une expérience très impressionnante est faite par exemple au palais de la découverte à Paris : Une personne placée dans une cage de Faraday pose ses mains contre la grille reliée à la masse. De l'autre côté une personne maintient une pointe reliée à une tension très élevée de l'ordre de 50kV. Un arc électrique se crée entre la pointe et la grille mais la personne ne risque absolument rien à l'intérieur !

Fig.(4) : expérience illustrant l'intérêt de la cage de Faraday



Le fichier **Faraday.FEE** représente un condensateur plan dans lequel une cage de Faraday a été introduite (cette fois, le domaine d'étude est limité au condensateur). Une plaque est portée à -10 V et l'autre à 10 V . La cage est, elle, portée au potentiel 0V .

- a) Représentez le champ électrique dans le condensateur en traçant une ou deux coupes judicieusement choisies ( pour déterminer la coupe puis  pour tracer). Expliquez votre choix.
- b) Changez de matériau dans le condensateur et renommez le fichier. Cela change-t-il les choses ?
- c) Changez la tension appliquée à la cage. Choisissez différentes tensions et comparez le champ électrique à l'intérieur.
- d) Redéfinissez une tension nulle sur la cage et introduisez un fil chargé à 5V au milieu de la cage. Cela change-t-il le champ à l'extérieur ? A l'intérieur ? Expliquez.

B. Etude de l'effet de pointe

L'effet de pointe est un phénomène très connu et très utilisé dans des applications courantes comme le paratonnerre. Mais cet effet intervient dans bien d'autres applications beaucoup plus complexes et permet notamment de créer des sources d'électrons dites ponctuelles utilisées pour faire de la microscopie électronique.

Grâce à un effet appelé « effet de champ », des électrons sont émis à partir d'une pointe métallique polarisée négativement qui est proche d'une électrode reliée à la masse par exemple. Ces électrons ne peuvent être émis qu'en présence d'un champ électrique intense de l'ordre de 100MV.cm^{-1} . Les électrons sont ensuite repoussés par la polarité négative de la pointe. Dans cet exercice, nous allons simuler le champ électrique obtenu en bout de pointe pour différentes configurations : forme de la pointe, sa position par rapport à la masse, etc...

Les fichiers décrits ci-dessous permettent de simuler le champ électrique obtenu au bout d'une pointe dans différentes configurations. Note : les systèmes représentés dans ces fichiers sont du type « axis symmetric », c'est à dire à symétrie de révolution autour d'un axe vertical (voir l'onglet « problem » puis la case « problem type »).



Fig. (5) : Image réalisée en microscopie électronique en transmission grâce à une pointe à effet de champ CP2M à Marseille (on peut voir sur cette image des atomes de Germanium au niveau d'un joint de grain)

pointe.FEE : Une pointe est polarisée à 500 V dans une « enceinte » grande par rapport à sa taille et portée au potentiel 0 V. La distance pointe - masse est de $100\mu\text{m}$.

pointe1.FEE : Même configuration que précédemment mais avec une forme de pointe différente. On gardera cette forme par la suite.

pointe2.FEE : Une pointe polarisée à 500 V est située à $10\mu\text{m}$ d'une enceinte portée à 0V.

pointe3.FEE : Une pointe polarisée à 500 V rentre dans un diaphragme métallique relié à 0 V de $1.2\mu\text{m}$ de diamètre et avancé de $1\mu\text{m}$ par rapport au bout de la pointe.

a) 100MV.cm^{-1} ? Cela mérite-t-il le terme de champ électrique intense ? On pourra comparer avec le champ obtenu dans un condensateur plan.

b) Comparez qualitativement les champs électriques en bout de pointe entre les deux premiers fichiers. Expliquez la différence.

Sachant qu'on peut simuler le bout d'une pointe comme une sphère et en vous rappelant de la manière dont varie le champ dans le cas d'une sphère, le résultat que vous trouvez vous paraît-il logique ?

c) Décrivez la distribution du champ électrique dans les trois derniers fichiers. Est-il nécessaire de placer la contre-électrode face à la pointe ? Comment varie approximativement le champ en fonction de la distance à la masse ?

d) Quelle configuration choisiriez vous pour fabriquer une source d'électrons ? Pourquoi ?

e) Que peut-on dire de cette source d'électrons : est-elle à votre avis étendue ou ponctuelle ? Justifiez.

f) Ici les tests sont faits dans l'air, si vous deviez faire une émission d'électrons avec cette pointe resteriez-vous à l'air ? Que feriez-vous ? Cela change-t-il les choses au niveau du champ électrique ?