Electricité et magnétisme, D.S. n°3

1. Questions de cours :

   Rappelez les équations de Maxwell de l'électrostatique et de la magnétostatique (formes locales). Pour chacune, donnez sa forme intégrale. Décrivez, en une phrase, la signification physique de ces équations.

2. Exercice 1 : champ magnétique créé par une nappe plane.

   Le plan $z = 0$ est entièrement parcouru par un courant surfacique de densité uniforme $\mathbf{j_s} = j_s\hat{\mathbf{x}}$ (figure 1). On se propose de déterminer le champ magnétique créé, par deux méthodes différentes.

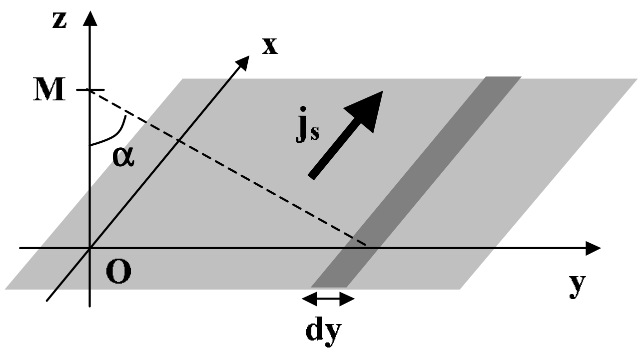

FIG. 1 – plan infini parcouru par un courant surfacique

   (a) A partir des symétries du champ, déterminer la direction de $\mathbf{B}$. De quelle variable dépend $\mathbf{B}$?

   (b) Appliquer le théorème d'Ampère à un contour rectangulaire constitué, en partie, de deux segments situés en z et $-z$, symétriques l'un de l'autre par rapport au plan $z = 0$. En déduire l'expression de $\mathbf{B}$ en tout point.

   (c) Quelle est la discontinuité de $\mathbf{B}$ à la traversée de la nappe de courant ?

   (d) On considère maintenant la nappe de courants comme la juxtaposition de fils infiniment longs.

      i. Donner, en fonction de j_s, l'expression de l'intensité dI parcourant un fil de largeur infinitésimale dy.

      ii. Rappeler l'expression du champ $d\mathbf{B}$ créé par un fil infiniment long parcouru par un courant dI, à une distance r du fil.

      iii. Calculer le champ $\mathbf{B}$ créé par la nappe de courant par intégration du champ $d\mathbf{B}$ créé par un fil de largeur infinitésimale dy.

3. Exercice 2 : champ magnétique créé par une bobine conique.
   (a) Montrer que le champ magnétique créé en un point M situé sur l'axe (Ox) d'une spire circulaire de rayon r parcourue par un courant d'intensité I peut s'écrire sous la forme $\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2r}(\sin\beta)^3\mathbf{x}$, où β est l'angle sous lequel on voit la spire depuis le point M.
   (b) Soit un cône d'axe (Ox), de sommet O et de demi-angle au sommet β. On considère la portion de cône comprise entre les deux plans $x = h_1$ et $x = h_2$. Sur ce tronc de cône est enroulée une couche de spires jointives de diamètre a. Le sens du courant est précisé sur la figure 2. On veut calculer le champ $\mathbf{B}$ en O.
      i. Exprimer le rayon r d'une spire d'abscisse $x = u$ en fonction de β.
      ii. Montrer que le nombre de spires situées entre les abscisses u et $u + du$ est $n = \frac{du}{a\cos\beta}$ (voir figure 2).
      iii. En déduire le champ magnétique élémentaire $d\mathbf{B}(O)$ créé en O par les spires dont les coordonnées sont comprises entre u et $u + du$ (on considérera, du étant un infiniment petit du premier ordre, que les spires situées entre u et $u + du$ sont de même rayon).
      iv. En déduire le champ magnétique $\mathbf{B}(O)$ créé par la distribution de spires réparties sur le cône entre les abscisses h_1 et h_2.

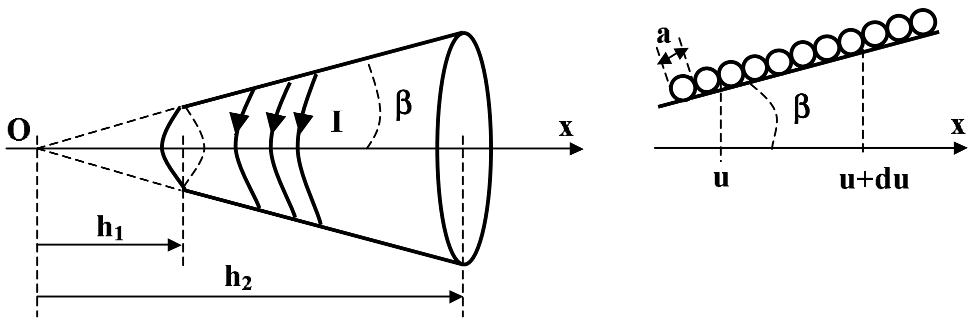

FIG. 2 – à gauche le cône, à droite une représentation en coupe des spires déposées entre les abscisses u et $u + du$ (le symétrique par rapport à l'axe (Ox) n'est pas représenté).