UNIVERSITE PAUL CEZANNE AIX-MARSEILLE III

Thèse

N° 2005AIX30024

Présentée et soutenue publiquement le 30 septembre 2005 pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PAUL CEZANNE

Faculté des Sciences et Techniques

par

Anthony Dubois

Étude de l'interaction d'une onde électromagnétique avec une structure matérielle en régime temporel : problèmes directs et inverses.

Directeur de thèse :	Marc Saillard
Tuteur de thèse :	Kamal Belkebir

JURY

A. FRANCHOIS	*Rapporteur*
D. LESSELIER	*Rapporteur*
C. PRADA	
K. BELKEBIR	
M. SAILLARD	
D. MAYSTRE	*Président du jury*

Discipline : Electromagnétisme

Remerciements

Ce travail de thèse a commencé au sein l'équipe Télédétection Éxpérimentation Micro-ondes, devenue Sondage Électromagnétique et Micro-Ondes, de l'Institut Fresnel de Marseille. Je tiens à faire part de ma reconnaissance aux personnes qui ont participé et m'ont aidé à son élaboration.

Je remercie chaleureusement Marc Saillard, Professeur à l'Université du Sud Toulon-Var, pour m'avoir fait confiance, et pour m'avoir encadrer pendant ces trois années. Malgré son rôle «administratif »et la distance entre Marseille et Toulon, il a toujours suivi de très prés l'avancement de mon travail et ces conseils m'ont été d'une aide précieuse. Je tiens à faire part de ma reconnaissance à Kamal Belkebir, Maître de Conférence à l'Université de Provence, pour avoir parfaitement rempli son rôle de directeur de thèse au quotidien. Toujours disponible, il a su répondre à toutes mes interrogations. Son organisation et sa rigueur m'ont permis de travailler efficacement. Il a su orienter mon travail tout en restant à l'écoute de mes initiatives personnelles.

Ann Franchois, Professeur à l'Université de Gand, Belgique, et Dominique Lesselier, Directeur de Recherche au C.N.R.S. ont accepté de rapporter sur ce manuscrit. Je tiens à leur faire part de ma reconnaissance sincère. Je voudrais aussi remercier vivement Daniel Maystre, Directeur de Recherche au C.N.R.S., et Claire Prada, Chargée de Recherche au C.N.R.S., pour avoir pris part à mon jury de thèse.

J'aurais ensuite une pensée particulière pour tous les membres permanents et doctorants de l'Institut Fresnel, qui m'ont aidé dans mon travail et supporté dans les moments plus difficiles.

Je voudrais remercier particulièrement Jean-Michel Geffrin, Ingénieur de Recherche, Amélie Litman, Hervé Tortel et Pierre Sabouroux, tous trois Maîtres de Conférences à l'Université de Provence, pour ces trois années passées en lors compagnie. Toujours disponibles et présents, leurs précieux conseils m'ont permis de surmonter tous les problèmes que j'ai pus rencontrer. Je voudrais leur exprimer ici la marque de ma profonde affection. J'ai trouvé avec eux plus que de simples collègues de travail.

Que dire de Frédéric forestier, l'informaticien de l'équipe? Je t'ai donné beaucoup de travail, et tu as toujours répondu présent rapidement et efficacement. Je n'oublierai jamais ces journées Béton-Bateaux-Pizzas. Je te dis donc un grand merci pour tout.

Je n'oublie pas non plus les autres enseignants chercheurs des équipes S.E.M.O. et C.L.A.R.T.E. qui ont contribué à la bonne marche de ma thèse, et à la bonne ambiance qui règne dans les locaux de l'Institut Fresnel. Alors, merci à Hugues Giovanini pour nos discussions interistes, Anne Sentenac pour ta joie de vivre et tes concert d'harmonica, Charles Antoine Guerrin et Gabriel Soriano pour ce séjour dans la capitale du monde, Anne-Laure Fehrembach et tes gâteaux, Boris Gralack et la course à pied. Je n'oublie pas non plus Patrick Chaumet, André Nicolet, Gérard Tayeb, Gilles Renversez, Stéphan Enoch et Frédéric Zolla.

Je tiens à remercier Françoise Maillet, qui a assumé avec compétence et sourire la gestion administrative de ma présence au laboratoire.

J'ai aussi une pensée particulière pour les doctorants avec qui j'ai partagé un grand nombre de moments qui resteront longtemps dans ma mémoire.

Ces remerciements seraient incomplets si je ne parlais pas de toutes les autres personnes qui m'accompagnent depuis plusieurs années. Je voudrais tout d'abord remercier ma petite Marie, qui m'a supporté et aidé au quotidien. Sans elle, je n'aurais peut être pas fait la moitié de ce travail. Alors, je te dis un énorme merci pour tout.
Je pense aussi à ma famille, qui, même s'ils n'ont pas tout compris à ce que je faisais, m'ont toujours encouragé. Alors, à mes parents, mes frères et sœurs, et mes grands parents, qu'ils soient encore parmi nous ou malheureusement trop vite partis, je vous dis merci.
J'ai aussi une pensé particulière pour mes familles de cœur, et notamment la famille Guillon de Gardanne, la famille Sadran-Magne de Bordeaux, la famille Ribot de Saint Quantin de Rançannes et la famille Maniscalco de Marseille. Sans vous, je ne sais pas trop où je serai.
Enfin, Je voudrais remercier tous mes amis, pour tous ces moments de joie que nous partageons depuis un grand nombre d'années. J'ai énormément de chance de vous connaître et de vous compter comme amis. Alors, merci aux jumelles Sandrine et Géraldine, à Matthieu, Cédric, Pierre et Virginie, Christelle, Céline et Romain Duss et mon ou ma futur filleul, Églantine, Thomas et Nathalie, Anne-Claire, Aurélie, Christophe et Christine, Catherine, Candy, Johan et Marie, Isabelle, Jean-Marc, Boris l'australien, Julie, et Pascal.

Table des matières

Introduction

C'est à la fin du $XIX^{\text{ième}}$ siècle, en 1873, que le physicien écossais James C. Maxwell a élaboré la théorie classique de l'électromagnétisme. Depuis, cette science n'a cessé d'évoluer pour devenir incontournable de nos jours. Ses domaines d'application nous entourent au quotidien : aujourd'hui, la plupart des foyers sont équipés de télévisions et de radios, le G.P.S. est quasiment de série dans les automobiles, sans oublier les téléphones portables qui envahissent les cours d'écoles. Bien que très différentes, ces applications utilisent le même phénomène physique : la propagation des ondes électromagnétiques. Se posent alors les problèmes liés au transport de l'énergie et de l'information, et ceux liés à leurs interactions avec des structures matérielles. Dans ce manuscrit, nous nous sommes particulièrement intéressés à cette seconde thématique : l'interaction d'une onde avec une structure matérielle.

Lorsqu'une onde rencontre un objet, nous pouvons observer la déformation du front d'onde. Par exemple, il suffit de laisser tomber un caillou dans un bassin pour voir des ronds dans l'eau. Nous constaterons alors la formation puis le déplacement de petites vagues. Cette déformation du front d'onde (direction de propagation, amplitude, phase, polarisation...) est due à une modification des propriétés du milieu dans lequel l'onde se propage. Les grandeurs physiques à prendre en considération dépendent de la nature de l'onde considérée. Par exemple, une onde acoustique est sensible à la masse volumique et à la compressibilité du milieu, alors que l'évolution d'une onde électromagnétique est soumise aux variations de permittivité et de perméabilité du milieu. La déformation du front d'onde est également liée aux propriétés (taille, forme géométrique, position, caractéristiques matérielles) des discontinuités (défauts) qu'elle rencontre. Ainsi, il doit donc être possible, à partir de l'étude de la déformation du front d'onde, de déterminer certaines des caractéristiques liées aux défauts.

L'interaction d'une onde avec une structure matérielle relève de la diffraction. Dans l'étude de ce phénomène physique, nous distinguons deux types de problèmes. Le premier, que nous nommerons problème direct, consiste à modéliser la réponse (champ diffracté) d'un objet (diffuseur) connu soumis à une excitation (champ incident) maîtrisée. Le problème direct est linéaire et bien posé (existence, unicité et stabilité de la solution). Le second, que nous appellerons problème inverse, consiste à déterminer, à partir de la seule mesure du champ diffracté, des propriétés relatives au diffuseur inconnu. Le problème inverse est en général non linéaire et de surcroît mal posé : l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution ne sont pas garanties. La nature des caractéristiques recherchées du diffuseur nous permet de classer les problèmes inverses :

- seul le nombre et /ou la position d'objets nous intéresse. Nous parlerons alors d'un problème de dénombrement et /ou localisation.
- la forme et la position du diffuseur sont connues de manière *a priori* et nous cherchons ses caractéristiques électromagnétiques (permittivité et conductivité). Il s'agit alors d'un problème de caractérisation.
- si nous ne cherchons que la forme du diffuseur, connaissant ses caractéristiques électromagnétiques, nous aurons à résoudre un problème de reconnaissance de forme.
- nous ne disposons d'aucune information *a priori*. Nous devrons résoudre le problème inverse dans sa totalité.

Les applications potentielles de ces problèmes inverses sont nombreuses. Ils sont utilisés dans des domaines très variés et ont l'avantage d'être des moyens d'investigation non destructifs. Ainsi, ils sont utilisés dans des domaines tels que l'imagerie biomédicale (imagerie du cerveau, échographie), le sondage géologique (recherche de minerais, d'hydrocarbure), la recherche de mines antipersonnel, le génie civil (caractérisation de barres d'acier dans le béton), le sondage du sous-sol pour rechercher des canalisations par exemple, ou pour caractériser les différentes couches de l'écorce terrestre...

Configurations

Il y a plusieurs façons d'aborder un problème de diffraction électromagnétique en fonction des paramètres opto-géométriques et temporels. Tout d'abord, une première distinction peut se faire sur la dépendance aux variables d'espace des grandeurs mises en jeu. Il existe trois types de problèmes :

- problème 1-D : les propriétés (géométriques, électromagnétiques) des milieux mis en jeu sont invariantes par translation dans un plan et ne dépendent que d'une seule variable. Le champ électromagnétique dépend exclusivement de cette variable. Ce problème a été étudié dans [1, 2] par exemple.
- problème 2-D : les propriétés des milieux et le champ électromagnétique sont invariants par translation selon une direction particulière et dépendent de deux variables d'espace. Il est

possible de séparer un problème 2-D selon deux cas de polarisation découplés. En $\mathcal{E}_{//}$ (ou TM), le champ électrique est porté par l'axe d'invariance, alors qu'en $\mathcal{H}_{//}$ (ou TE), il est transverse et le champ magnétique est porté par l'axe d'invariance.

– problème 3-D : il n'y a pas de direction privilégiée, et les propriétés des milieux ainsi que le champ électromagnétique dépendent des trois variables d'espace.

Ensuite, nous pouvons faire une seconde distinction par rapport à la dépendance temporelle. Si les diffuseurs sont immobiles et si le champ électromagnétique est une fonction sinusoïdale du temps, nous parlerons de problème harmonique. Une seule fréquence suffira à caractériser la dépendance temporelle.

Si le champ électromagnétique est une fonction quelconque du temps, il s'agira d'un problème temporel, et nous étudierons le régime transitoire. Pour résoudre un problème de diffraction électromagnétique (direct ou inverse) en régime transitoire, nous pouvons le faire soit directement dans le domaine temporel [2] et [3], soit par un passage par le domaine fréquentiel, *via* une transformée de Laplace (ou Fourier), comme dans [4] pour le problème direct et [5, 6] pour l'inversion.

Méthodes qualitatives

Dans la grande famille des problèmes inverses, nous distinguons deux classes de méthodes. Dans la première catégorie, nous trouverons des méthodes qualitatives et nous obtiendrons une empreinte du support des diffuseurs. Par exemple, la tomographie par diffraction [7] entre dans cette classe. Cette méthode d'inversion permet de déterminer les courants induits à l'intérieur d'un diffuseur à partir des champs diffractés mesurés en un nombre fini de points. Nous pouvons aussi citer la méthode de Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel (D.O.R.T.) développée en acoustique [8, 9], puis appliquée à l'électromagnétisme [10, 11, 12]. Il s'agit ici de construire un opérateur dont les invariants (valeurs propres et vecteurs propres) nous renseignent sur le nombre de diffuseurs et leurs positions. Là encore, il s'agit d'une méthode qualitative car, elle ne remonte pas à des propriétés intrinsèques au diffuseur.

Méthodes quantitatives

Dans cette thèse, nous nous intéresserons principalement à la seconde classe de méthodes, qui sera dite quantitative. Elles permettent d'obtenir des propriétés intrinsèques au diffuseur telles que sa forme géométrique et sa constitution matérielle (permittivité et conductivité). Ces méthodes sont en général itératives : partant d'une estimation initiale, le paramètre d'intérêt (pour notre étude le contraste de permittivité, qui correspond à la différence entre la permittivité du diffuseur et celle du milieu ambiant) est ajusté pas à pas en minimisant une fonction coût, qui représente la différence entre les champs diffractés mesurés et ceux déterminés à partir de la meilleure estimation du paramètre que nous recherchons.

Pour résoudre un problème inverse, qui est, en général, non linéaire, nous trouvons dans la littérature consacrée aux méthodes quantitatives, trois types d'approche. Dans la première catégorie, le problème inverse est linéarisé en ne considérant pas le champ total (somme du champ incident et du champ diffracté) à l'intérieur du domaine de recherche comme une inconnue. Nous trouvons dans cette catégorie de méthode, sans souci d'exhaustivité, la méthode de Newton-Kantorovich [13, 14, 15] et la Distorded Wave Born [16, 17]. Une équivalence entre ces deux méthodes a d'ailleurs été établie [18, 19]. Nous pouvons aussi citer les méthodes utilisant les approximations de Born, de Rytov ou de Born étendue [20, 21, 22]. Toutes ces approches nécessitent, à chaque itération, la résolution d'un problème direct, ce qui est coûteux en temps de calcul.

La seconde catégorie de méthodes utilisées pour résoudre un problème de diffraction inverse est dite non linéarisée. Le champ électrique à l'intérieur du diffuseur est considéré comme une inconnue. Il est déterminé à chaque itération, en même temps que le contraste de permittivité, dans le processus de minimisation, sans résoudre de problème direct. Dans la méthode du gradient modifié (Modified Gradient Method) [23, 24], le champ électrique est égal au champ calculé à l'itération précédente plus une correction. La méthode Contrast Source Inversion, étudiée dans [25] et affinée dans [26] et [27], entre aussi dans cette catégorie. Le champ électrique n'est pas explicitement un paramètre, nous reconstruisons alternativement le produit du contraste par le champ total puis le contraste.

D'autres méthodes d'inversion, que nous appellerons méthodes «hybrides», ont ensuite été développées. Elles combinent les idées des approches linéarisées et non linéarisées. Nous pouvons citer la Modified Born Method et la Modified Modified Gradient Method, toutes deux décrites dans [28].

Amélioration du pouvoir de résolution

Afin d'améliorer la qualité des reconstructions, il est souvent nécessaire d'ajouter de l'information *a priori*. Il est alors possible de minimiser la fonction coût sous certaines contraintes, et ne rechercher que des contrastes positifs par exemple. L'information *a priori* peut aussi être incorporée dans la procédure de minimisation sous la forme d'une procédure de régularisation. Il s'agit d'ajouter à la fonction coût un terme qui dépend de la grandeur que nous cherchons (ici la permittivité). Par exemple, en utilisant une Total Variation, ou edge-preserving regularization, comme dans [29, 27, 30], nous recherchons des objets discontinus à variation bornée. Les procédures de régularisation peuvent être abordées d'un point de vue probabiliste comme dans [31]. Selon les applications visées, il peut être judicieux de limiter le nombre d'inconnues. Si nous connaissons la permittivité des cibles, nous pouvons nous contenter de déterminer leurs formes géométriques. Une possibilité consiste à imposer une contrainte de binarité sur les objets que nous cherchons. La fonction caractéristique de l'objet ne peut alors prendre que la valeur 0, si le point est à l'extérieur de l'objet, ou 1 si le point est à l'intérieur de l'objet. Des résultats utilisant ces approches sont reportés dans [32] et [33].

Une autre possibilité pour améliorer les reconstructions consiste à faire une étude à différentes fréquences. Une analyse théorique [34] sur les critères de convergence et le pouvoir de résolution des méthodes d'inversion quantitatives a été effectuée en 2001 sur la Distorded Wave Born. Nous supposons que les résultats de cette analyse peuvent être extrapolés aux autres méthodes d'inversion itératives. Les auteurs se sont placés dans une configuration «simple», où toutes les grandeurs peuvent être calculées de manière analytique. Ils ont montré qu'à basses fréquences, la convergence de la D.W.B. est assurée alors que le pouvoir de résolution n'est pas suffisant pour pouvoir caractériser le diffuseur. Par contre, travailler à hautes fréquences permet d'améliorer le pouvoir de résolution à condition que l'algorithme converge, ce qui n'est plus assuré, car l'erreur commise à la première itération augmente avec la fréquence. Pour tenir compte de ces deux propriétés, les auteurs de [34] préconisent une marche en fréquences [35] (frequency-hopping). L'estimation initiale pour résoudre un problème inverse à une certaine fréquence est donnée par le résultat obtenu à une fréquence inférieure. Cette approche donne de très bons résultats aussi bien à partir de données synthétiques (calculées sur ordinateur) qu'en utilisant des champs mesurés dans la chambre anéchoïque dont dispose l'Institut Fresnel, comme nous pouvons le constater dans [17] et [36]. Le frequency-hopping est aussi nécessaire pour obtenir des reconstructions quantitatives dans une configuration où un cylindre est enfoui dans un demi-espace [37].

Une autre alternative, pour tenir compte des deux propriétés de convergence à basses fréquences et du bon pouvoir de résolution à hautes fréquences, consiste à travailler en régime transitoire. L'utilisation comme champ incident d'une impulsion étroite dans le temps équivaut à éclairer le diffuseur par un champ dont le spectre est à large support. Il contiendra à la fois des basses fréquences, pour assurer la convergence, et des hautes fréquences, afin d'obtenir un bon pouvoir de résolution. L'objet de cette thèse s'inscrit dans ce contexte : la résolution de problèmes de diffraction inverse en régime transitoire. Il s'agit de développer un algorithme d'imagerie utilisant des données transitoires. L'algorithme devra être à la fois robuste vis-à-vis des diverses sources de bruit (expérimental ou environnemental) et ne nécessiter qu'une faible connaissance *a priori*.

Plan du manuscrit

Ce manuscrit s'articulera autour de trois parties. La première sera consacrée à la résolution du problème direct de diffraction. Cette étape permettra de nous doter d'un modèle de diffraction et de définir les notations utilisées par la suite. Les différentes configurations d'études seront introduites : la configuration «espace homogène» où le diffuseur est placé dans un milieu homogène et la configuration «objets enfouis» où le diffuseur se trouve dans un demi-espace inférieur séparé d'un milieu supérieur par une interface plane. Nous traiterons successivement le régime harmonique puis le régime transitoire. Nous insisterons sur quelques points du traitement numérique, notamment ceux liés à la diminution du temps de calcul et à la prise en compte des fonctions de Green [38] en configuration «objets enfouis». Une grande place sera faite à la présentation de résultats et notamment à la comparaison entre les champs électriques calculés et les champs électriques mesurés dans la chambre anéchoïque dont dispose le laboratoire.

Dans la seconde partie, nous décrirons les différents algorithmes d'inversion que nous avons développés et utilisés pendant cette thèse. Dans un premier temps, nous nous limiterons à une seule source rayonnant un champ harmonique. Ensuite, nous envisagerons trois possibilités pour augmenter la quantité d'information nécessaire à l'obtention de reconstructions quantitatives, et ainsi remplir la sphère d'Ewald. Nous proposerons une approche multi-sources et mono-fréquence (plusieurs sources rayonnant successivement un champ harmonique), puis une approche mono-source et multi-fréquences (une seule source rayonnant un champ transitoire) et une approche multi-sources et multi-fréquences (plusieurs sources rayonnant chacune un champ transitoire).

Nous présenterons ensuite la méthode D.O.R.T. et les résultats que nous obtenons en insistant particulièrement sur le champ focalisant que nous synthétisons. Il nous servira par la suite pour améliorer les reconstructions d'objets enfouis dans un milieu hétérogène. Nous conclurons cette deuxième partie avec le retournement temporel.

La troisième et dernière partie sera intégralement consacrée à la présentation des résultats numériques obtenus avec les différents algorithmes d'inversion que nous avons développés. Nous commencerons par l'approche multi-sources et mono-fréquence en configuration «objets enfouis» [37]. L'utilisation de données non bruitées permettra de comparer les différents algorithmes et de vérifier l'intérêt de la marche en fréquences. Nous étudierons ensuite le problème plus compliqué d'un cylindre enfoui dans un milieu inhomogène (fouillis). Afin d'améliorer les reconstructions, nous incorporerons dans notre procédure de minimisation les champs focalisants donnés par D.O.R.T..

En effet, en apportant de l'énergie essentiellement sur le diffuseur, nous devrions pouvoir augmenter le rapport signal sur bruit et ainsi extraire la cible du fouillis.

Puis nous présenterons les résultats obtenus pour l'approche mono-source et multi-fréquences dans les deux configurations d'études. Une étude sur les paramètres de l'impulsion incidente permettra de définir deux stratégies afin d'obtenir des résultats quantitatifs. Nous validerons nos algorithmes en utilisant des champs mesurés dans la chambre anéchoïque.

Enfin, nous exposerons les reconstructions obtenues pour l'approche multi-sources et multi-fréquences. Nous utiliserons les champs mesurés dans la chambre anéchoïque mis à disposition dans une deuxième base de données destinée à tester des algorithmes d'inversion. La première a été effectuée en 2001 [36]. Nous utiliserons diverses cibles diélectriques et métalliques.

Publications

Ces travaux de thèse ont donné lieux à plusieurs publications dans des revues internationales à comités de lecture et dans des conférences avec comités de lecture et actes. En voici la liste.

<u>Articles parus dans des revus à comités de lecture</u>

- A. Dubois, K. Belkebir, M. Saillard.
  Retrieval of inhomogeneous targets from experimental frequency diversity data. *Inverse Problems*, special session - testing inversion algorithms against experimental data: inhomogeneous targets-
  Á paraître en décembre 2005.
- A. Dubois, K. Belkebir, M. Saillard.
  Localization and characterization of two-dimensional targets buried in a cluttered environment. *Inverse Problems*, Volume 20, pp. $S63 - S79$. Special session - em characterization of buried objetcs. Invited paper by D. Lesselier, and W. C. Chew.

<u>Conférences avec comités de lecture et actes</u>

- A. Dubois, K. Belkebir, M. Saillard.
  Iterative solution of the inverse scattering problem from transient scattered field. IEEE AP-S International Symposium and USNC/URSI, Washington DC 2005.
  Contribution invitée.

- A. Dubois, K. Belkebir, M. Saillard.
  Diffraction inverse en milieu diffusant : apport du retournement temporel. Nouvelles formes d'ondes en Imagerie, Localisation et Communication, Paris 2005.

- A. Dubois, K. Belkebir, M. Saillard.
  Detection, localization and characterization of targets buried in a noisy environment. Progress in Electromagnetics Research Symposium, Pisa 2004, pp 661.
  Contribution invitée.

- A. Dubois, K. Belkebir, M. Saillard
  A Hybrid Inverse Scattering Method to Reconstruct Two-Dimensional Targets in Limited Aspect Data Configuration. Union Radio-Scientifique Internationale, Pisa 2004, pp 796 – 797.
  Contribution invitée.

- M. Saillard, G. Micolau, H. Tortel, P. Sabouroux, J.-M. Geffrin, K. Belkebir, A. Dubois
  DORT Method and Time Reversal as Applied to Subsurface Electromagnetic Probing. Union Radio-Scientifique Internationale, Pisa 2004, pp 227 – 229.
  Contribution invitée.

- A. Dubois, K. Belkebir, M. Saillard
  Characterization of two-dimensional targets buried in a noisy environment. Mediterranean Microwave Symposium, Marseille 2004, pp 33.

- M. Saillard, G. Micolau, H. Tortel, P. Sabouroux, J.-M. Geffrin, K. Belkebir, A. Dubois
  Time Reversal as applied to electromagnetic probing. Mediterranean Microwave Symposium, Marseille 2004, pp 1 – 3.
  Contribution invitée.

Problème direct

Chapitre 1

Régime harmonique

Sommaire

1.1 Introduction

Avant de pouvoir résoudre un problème de diffraction inverse, nous devons disposer d'un modèle de diffraction électromagnétique. C'est pourquoi nous commençons par nous en doter en résolvant le problème direct qui consiste à déterminer le champ diffracté par un diffuseur connu soumis à un champ incident maîtrisé. La résolution du problème direct permettra aussi d'obtenir les données que nous utiliserons par la suite, pour l'inversion.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la résolution du problème direct de diffraction électromagnétique en régime harmonique. Nous étudierons deux configurations d'intérêt pratique. La première, que nous nommerons «espace homogène», le diffuseur est placé dans un milieu homogène infini et de permittivité constante. La seconde, que nous nommerons «objets enfouis», le diffuseur est enfoui dans un demi-espace homogène séparé d'un second demi-espace par une interface plane.

Ce chapitre s'inspire grandement de [4]. Il nous semble important de le présenter ici, car il donne les bases du modèle de diffraction et de définir les notations utilisées dans la suite de ce manuscrit. Il s'articule autour des deux configurations d'étude, et nous commencerons par la configuration «espace homogène». Après avoir décrit la géométrie, nous exposerons la représentation intégrale des champs, ce qui conduit à une formulation rigoureuse du problème direct de diffraction. Nous donnerons ensuite quelques éléments de résolution numérique des équations intégrales. Enfin, nous étudierons la configuration «objets enfouis» où nous insisterons essentiellement sur les modifications à apporter pour tenir compte de cette nouvelle géométrie.

1.2 Configuration «espace homogène»

1.2.1 Formulation du problème et notations

La géométrie du problème à deux dimensions que l'on se propose d'étudier est décrite par la Fig. 1.1. Un objet (diffuseur) supposé infiniment long et invariant suivant la direction $\mathbf{e}_z$ est présent dans un milieu homogène, linéaire, isotrope mais éventuellement absorbant. Nous supposerons que la section droite $\mathcal{D}$ du diffuseur est entièrement confinée dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Nous noterons $\partial\mathcal{D}$ la frontière du cylindre supposée régulière. Pour des raisons de simplicité, nous considérerons dans la suite de ce chapitre que le milieu environnant est le vide, de permittivité ε_0 et de perméabilité μ_0. Le diffuseur est constitué d'un milieu linéaire, isotrope, non homogène de permittivité $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_0\varepsilon_r(\mathbf{r})$ et de conductivité $\sigma(\mathbf{r})$. L'ensemble de la configuration étudiée est non magnétique ($\mu = \mu_0$).

Un repère orthonormé $(O,\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z)$, dont l'origine O peut être indifféremment à l'intérieur ou à l'extérieur du diffuseur est introduit. Un point M dans l'espace est représenté par le vecteur $\mathbf{OM}$ défini par :

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = \mathbf{r} + z\mathbf{e}_z. \tag{1.1}$$

L'objet est éclairé par un champ électromagnétique monochromatique à la fréquence f généré par une distribution de courant $\mathbf{J}_z(\mathbf{r})$. Le support de ces sources est invariant suivant la direction $\mathbf{e}_z$ et de section droite confinée dans un domaine $\mathcal{D}_1$. L'invariance du problème électromagnétique par translation selon $\mathbf{e}_z$ permet de découpler le problème en deux cas de polarisation $\mathcal{E}_{//}$ et $\mathcal{H}_{//}$. Nous limiterons notre étude au cas de polarisation $\mathcal{E}_{//}$, (ou TM), c'est-à-dire, la seule composante

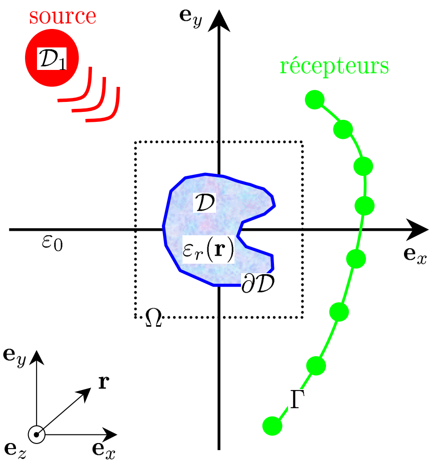


FIG. 1.1 – *Géométrie du problème étudié : configuration «espace homogène».*

non nulle du champ électrique est suivant l'axe d'invariance du cylindre, $\mathbf{e}_z$.

Le problème de diffraction direct consiste à calculer soit le champ diffracté par le cylindre $\mathbf{E}^{\mathrm{d}}(\mathbf{r})$ sur une ligne de mesure Γ (située à l'extérieur du diffuseur), soit le champ total à l'intérieur du diffuseur $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r})\mathbf{e}_z = E^{\mathrm{d}}(\mathbf{r})\mathbf{e}_z + E^{\mathrm{inc}}(\mathbf{r})\mathbf{e}_z$, en supposant parfaitement connus le champ incident et les propriétés opto-géométriques du diffuseur. Nous utiliserons une représentation intégrale des champs, ce qui conduit à une formulation rigoureuse du problème direct de diffraction. En utilisant cette approche le domaine spatial de calcul se limite au support du diffuseur et les conditions d'ondes sortantes sont assurées *via* l'utilisation des fonctions de Green appropriées à la configuration de l'étude.

1.2.2 Représentation intégrale des champs

En régime harmonique et avec une dépendance temporelle en $\exp(i\omega t)$, nous obtenons, à partir des équations de Maxwell [39], l'équation différentielle du second ordre vérifiée par le champ électrique en tous points de l'espace dans des milieux ohmiques :

$$\Delta E(\mathbf{r}) + k_0^2 E(\mathbf{r}) = -k_0^2 \left(C(\mathbf{r}) + \frac{\sigma(\mathbf{r})}{i\omega\varepsilon_0} \right) E(\mathbf{r}) + i\omega\mu_0 J(\mathbf{r}). \tag{1.2}$$

Dans cette équation (1.2), $C(\mathbf{r}) = \varepsilon_r(\mathbf{r}) - 1$ désigne la susceptibilité électrique, $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ correspond au nombre d'onde dans le vide, ω à la pulsation ($\omega = 2\pi f$, où f est la fréquence) et l'opérateur $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial_y^2}$ est l'opérateur laplacien transverse. La solution de cette équation est donnée par le produit de convolution suivant :

$$E(\mathbf{r}) = \left\{G * \left[k_0^2\left(C - \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)E - i\omega\mu_0 J\right]\right\}(\mathbf{r}), \tag{1.3}$$

où G est la fonction de Green associée à l'espace homogène, solution de l'équation de Helmholtz élémentaire (1.4) vérifiant une condition de rayonnement à l'infini :

$$\left\{\Delta + k_0^2\right\} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{1.4}$$

La fonction G s'écrit [39] :

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{-i}{4} H_0^{(2)}(k_0 \mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid) = \frac{-i}{4} H_0^{(2)}(k_0 R), \tag{1.5}$$

où $H_0^{(2)}$ représente la fonction de Hankel d'ordre 0 et de seconde espèce.

Le support du courant J étant confiné dans le domaine $\mathcal{D}_1$, sa contribution au produit de convolution de la relation (1.3) se limite à une sommation sur $\mathcal{D}_1$. Ce terme correspond au champ incident rayonné par la distribution de courant. Il s'écrit alors :

$$E^{\mathrm{inc}}(\mathbf{r}) = -\frac{\omega\mu_0}{4} \int\int_{\mathcal{D}_1} H_0^{(2)}(k_0 \mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid) J(\mathbf{r}',s)\ \mathrm{d}\mathbf{r}'. \tag{1.6}$$

Introduisons la fonction contraste définie de la façon suivante:

$$\chi(\mathbf{r}) = C(\mathbf{r}) - \frac{i\sigma(\mathbf{r})}{\varepsilon_0\omega}. \tag{1.7}$$

En dehors de $\mathcal{D}$, la fonction contraste est identiquement nulle. Dans ces conditions, le second terme du produit de convolution (1.3) se limite à une intégration sur $\mathcal{D}$ uniquement et le champ total se met sous la forme :

$$E(\mathbf{r}) = E^{\mathrm{inc}}(\mathbf{r}) - \frac{i}{4}k_0^2 \int\int_{\mathcal{D}} H_0^{(2)}(k_0 R)\chi(\mathbf{r}')E(\mathbf{r}')\ \mathrm{d}\mathbf{r}'. \tag{1.8}$$

Dans la suite de ce manuscrit, nous appellerons cette équation (1.8) équation de couplage. Elle permet, connaissant le champ total dans le diffuseur, de le calculer en tous les points de l'espace. Afin de pouvoir déterminer le champ diffracté par l'objet sur les récepteurs, nous définissons l'équation d'observation (1.9), qui est une restriction à Γ de (1.8) :

$$E^{\mathrm{d}}(\mathbf{r} \in \Gamma) = -\frac{i}{4}k_0^2 \int\int_{\mathcal{D}} H_0^{(2)}(k_0 R)\chi(\mathbf{r}')E(\mathbf{r}')\ \mathrm{d}\mathbf{r}'. \tag{1.9}$$

Ces deux équations couplées (1.8) et (1.9) constituent notre modèle de diffraction électromagnétique. L'équation de couplage permet de déterminer le champ total à l'intérieur et à l'extérieur du diffuseur, et l'équation d'observation permet de calculer le champ diffracté sur les récepteurs.

Ce modèle de diffraction établi, il nous faut résoudre le problème direct. Nous pouvons déjà remarquer que le calcul de l'intégrale de (1.9) ne pose pas de problème particulier bien que la fonction de Hankel $H_0^{(2)}$ soit singulière en 0. En effet, les récepteurs n'étant pas situés dans le diffuseur, R n'est jamais nul. En revanche, nous devons tenir compte de cette singularité dans l'évaluation de l'intégrale de (1.8). C'est pourquoi nous nous proposons maintenant de donner quelques indications relatives au traitement numérique que nous avons mis en œuvre pour résoudre l'équation de couplage (1.8).

1.2.3 Résolution numérique du problème direct

En général, il n'existe pas de solution analytique aux problèmes de diffraction, sauf dans le cas où le diffuseur est de géométrie simple. Par exemple, dans le cas particulier d'un cylindre de section droite circulaire, le champ électrique s'exprime comme une série de fonctions de Bessel. Souhaitant mettre au point une méthodologie générale, il nous faut donc envisager un traitement numérique. L'essentiel de ce traitement est détaillé en annexe de ce manuscrit. Nous nous contentons de présenter la discrétisation de l'espace et de donner le système d'équations obtenu après discrétisation.

Maillage de l'espace

Le maillage de l'espace que nous devons utiliser doit être adapté aux calculs que nous allons effectuer. Nous devons calculer le produit de convolution d'une fonction régulière par une fonction de Bessel, qui est singulière à l'origine. En effet, les propriétés des fonctions de Bessel sont exposées dans [40], et il s'avère que la fonction $H_0^{(2)}$ présente une singularité logarithmique au voisinage de zéro, laquelle est localement intégrable :

$$H_0^{(2)}(z) \sim -A\ln(z) + g(z), \tag{1.10}$$

où la constante A vaut $\dfrac{2}{i\pi}$, et g une fonction non singulière. Compte tenu de cette propriété, nous allons séparer l'intégrale sur $\mathcal{D}$ de (1.8) en deux afin d'isoler la singularité logarithmique de la fonction $H_0^{(2)}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_{\mathcal{D}} H_0^{(2)}(k_0R)\chi(\mathbf{r}')E(\mathbf{r}')\ \mathrm{d}\mathbf{r}' = \\ \int\!\!\int_{\mathcal{D}} \left\{H_0^{(2)}(k_0R) + A\ln(k_0R)\right\}\chi(\mathbf{r}')E(\mathbf{r}')\ \mathrm{d}\mathbf{r}' \\ - \int\!\!\int_{\mathcal{D}} A\ln(k_0R)\chi(\mathbf{r}')E(\mathbf{r}')\ \mathrm{d}\mathbf{r}',\end{aligned} \tag{1.11}$$

Dans la suite, nous noterons I_1 et I_2 les deux intégrales de (1.11) que nous devons évaluer. La singularité logarithmique a ainsi été confinée dans le facteur $\ln(k_0 R)$ de l'intégrande de I_2. Les deux intégrales ont une structure de type convolution spatiale sur $\mathbf{r}$, et nous allons nous efforcer de la conserver lors de la discrétisation. En effet, cette structure particulière nous permettra de calculer ces intégrales à l'aide de transformées de Fourier. L'utilisation d'algorithmes de type Transformée de Fourier Rapide (T.F.R.) minimise le temps de calcul. Il sera en effet plus rapide de calculer la transformée de Fourier inverse du produit simple des transformées de Fourier des fonctions dont nous souhaitons calculer le produit de convolution, que d'évaluer directement cette intégrale.

Pour conserver cette structure de type convolution, il faut inclure la surface $\mathcal{D}$ dans un domaine rectangulaire Ω, constitué de $(N_x \times N_y)$ mailles carrées de coté d comme représenté sur la Fig. 1.2.

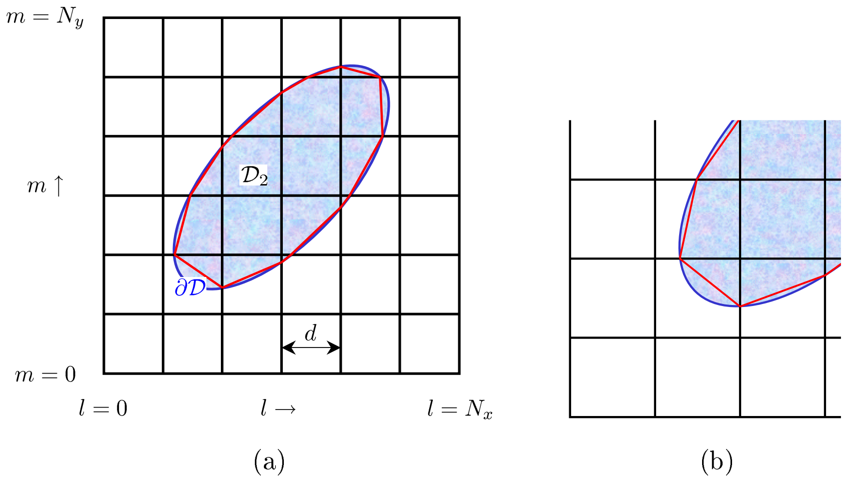


FIG. 1.2 – *Exemple de discrétisation de l'espace, pour un cylindre de section droite elliptique. La frontière du diffuseur est remplacée par des segments de droite, de sorte que l'intersection entre la frontière approchée et le maillage soit de géométrie simple.*

Afin de faciliter les calculs, la frontière $\partial\mathcal{D}$ du diffuseur est approchée par des segments de droite. Ainsi, l'intersection du maillage et la frontière $\partial\mathcal{D}$ du cylindre est de géométrie simple. En effet, il n'existe que cinq possibilités qui sont reportées sur la Fig. 1.3.

Les deux cas extrêmes, qui sont soit l'ensemble vide soit la maille entière, correspondent au cas où la maille considérée est totalement à l'extérieur ou à l'intérieur de $\mathcal{D}$. Les trois autres formes d'intersections ont eux aussi des géométries simples. En effet, nous obtenons soit un trapèze rectangle, soit un triangle rectangle, soit un pentagone à trois angles droits.

Une fois l'espace discrétisé et la frontière $\partial\mathcal{D}$ approchée par des segments de droite, nous

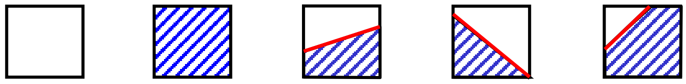


FIG. 1.3 – *Formes possibles de l'intersection entre la frontière approchée par segments de droite et le maillage.*

pouvons calculer l'intégrale (1.11).

Discrétisation de l'équation de couplage

Après avoir discrétisé le domaine de calcul Ω, nous devons formuler l'équation (1.8) en chacun des points du maillage considéré. Le traitement numérique étant technique et laborieux, nous le remportons en annexe de ce manuscrit, et nous ne présentons ici que le système d'équation obtenu. Ainsi, l'équation intégrale (1.8) peut s'écrire sous la forme du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} E_{l,m} = {} & E^{\mathrm{inc}}_{l,m} - \\ & \frac{i}{4} k_0^2 d^2 \sum_{l'=0}^{N_x} \sum_{m'=0}^{N_y} \left[\tilde{H}\left(\mid l-l' \mid , \mid m-m' \mid\right) - \tilde{L}\left(\mid l-l' \mid , \mid m-m' \mid\right) \right] . \\ & W_{l',m'} \chi^{\mathrm{p}}_{l',m'} E_{l',m'} . \end{aligned} \tag{1.12}$$

Dans (1.12), $E_{l,m}$ (resp. $E^{\mathrm{inc}}_{l,m}$) représente le champ électrique (resp. incident) calculé au point $\mathbf{r}_{l,m}$, qui correspond à un sommet d'une maille de discrétisation. χ^p est une approximation de la fonction χ qui jouit de la propriété de continuité dans Ω. Les fonctions $\tilde{H}$ et $\tilde{L}$ sont définies de la manière suivante :

$$\tilde{H}\left(\mid l-l' \mid , \mid m-m' \mid\right) = H_0^{(2)}\left(k_0 \mid \mathbf{r}_{l,m} - \mathbf{r}_{l',m'} \mid\right) + A \ln(k_0 \mid \mathbf{r}_{l,m} - \mathbf{r}_{l',m'} \mid), \tag{1.13}$$

$$\tilde{L}(l,m) = \frac{1}{d^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} A \ln(k_0 \mid \mathbf{r}_{l,m} - \mathbf{r}' \mid) \phi_0(x') \phi_0(y') \, \mathrm{d}\mathbf{r}'. \tag{1.14}$$

Les fonctions ϕ_l et ϕ_m sont des fonctions triangles dont la définition est donnée en annexe. Enfin, le scalaire $W_{l,m}$ correspond à l'intégration sur le domaine Ω du produit $\phi_l \phi_m$. Ces coefficients $W_{l,m}$ ne dépendent que de la forme du diffuseur. Ils ne seront calculés qu'une seule fois, indépendamment de la fréquence ou de la source.

Le système d'équation (1.12) , qui découle de l'équation intégrale (1.8), est le système que nous devons résoudre pour pouvoir déterminer le champ total en tous les points du maillage. Pour cela, nous pouvons envisager deux méthodes. Dans la première, nous inversons une matrice $\mathbf{A}$, qui se déduit de (1.12). Nous préférons utiliser la seconde approche, qui consiste à déterminer de manière itérative la solution en minimisant l'erreur quadratique de l'équation considérée. Pour cela, nous mettons en œuvre une méthode du gradient conjugué, dont le détail est présenté en annexe de ce manuscrit. Nous nous contentons simplement de donner ici quelques éléments relatifs à cette méthode itérative de résolution du système d'équations obtenus.

Évaluation des opérateurs

Écrivons l'équation (1.12) en utilisant des notations matricielles :

$$\mathbf{A}\ x = b. \tag{1.15}$$

Les éléments de la matrice $\mathbf{A}$, qui est alors de rang $R = (N_x + 1)(N_y + 1)$, et les composantes des vecteurs connu b et inconnu x se déduisent immédiatement de (1.12).

En utilisant une méthode itérative (la méthode du gradient conjugué) pour résoudre le système (1.15), deux éléments sont très importants. Le premier concerne l'opérateur $\mathbf{A}$. Nous allons être amenés à effectuer à chaque itérée n une multiplication entre $\mathbf{A}$ et l'estimation x_n de x. Tout au long du traitement des parties régulière et singulière de la fonction de Green (1.5), nous nous sommes efforcés de conserver la structure de type convolution pour pouvoir limiter le temps de calcul en utilisant des algorithmes de Transformée de Fourier Rapide (T.F.R.). L'utilisation de T.F.R. nécessitent l'emploi de fonctions à support positif. Il faudra donc périodiser l'opérateur $\mathbf{A}$. Les détails de cette périodisation sont exposés en annexe. La prise en compte de l'opérateur $\mathbf{A}^\dagger$ adjoint de $\mathbf{A}$ se fait de la même façon.

La dernière chose importante dans la mise en œuvre d'une méthode itérative, concerne le choix de l'estimation initiale. En effet, plus l'estimation initiale sera proche de la solution, moins il y aura d'itérées à faire pour converger vers cette solution, et ainsi le temps de calcul sera minimal.

Choix de l'estimation initiale

Nous allons dans cette partie proposer une manière d'obtenir une estimation initiale qui soit la meilleure possible, et qui minimise donc le nombre d'itérées. En général, le champ incident est utilisé comme estimation initiale (approximation de Born) car c'est le champ qui se propagerait en absence de diffuseur. Si l'objet est éclairé par une seule source et que nous ne devons résoudre qu'un seul problème direct, alors nous utiliserons le champ incident comme estimation initiale. Si maintenant l'objet est éclairé successivement par L sources, il faudra résoudre successivement L problèmes directs. Si les sources Q_l $(l = 1 \ldots L)$ ne sont pas trop espacées les unes des autres, les champs totaux calculés au même point pour ces différentes sources ne seront pas très différents. Ainsi, nous pouvons supposer que la solution $x(Q_{l-1})$ est une bonne approximation de la solution obtenue lorsque la source Q_l émet. L'estimation initiale est encore meilleure si l'on considère une combinaison linéaire des solutions obtenues pour les k-sources Q_{l-k} définie de la manière suivante:

$$x_0(Q_l) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k x(Q_{l-k}). \tag{1.16}$$

Le choix de cette estimation initiale s'appuie sur le «marching-on-in-frequency» de [41] où la marche récurrente est effectuée sur les fréquences. Nous faisons ainsi une extrapolation. La détermination des coefficients α_k est reportée en annexe de ce manuscrit. Ceci est valable pour toutes les valeurs de K, mais nous avons vérifié de manière empirique que la convergence est plus rapide pour K égale à trois. Pour des valeurs plus grandes de K, il y a redondance, et l'information supplémentaire apportée n'est plus significative.

Nous avons traité jusqu'à présent la résolution d'un problème de diffraction électromagnétique en régime harmonique, dans une configuration simple. Nous allons maintenant nous intéresser à une géométrie plus compliquée, mais qui deviendra plus intéressante quand nous chercherons à faire de l'inversion : la configuration «objets enfouis».

1.3 Configuration «objets enfouis»

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons présenter les modifications que nous devons apporter pour tenir compte de cette nouvelle géométrie. Dans un premier temps, nous décrirons cette nouvelle configuration. Ensuite, nous calculerons la fonction de Green associée au dioptre. Puis nous discuterons de sa prise en compte dans l'algorithme de résolution du problème direct de diffraction.

1.3.1 Géométrie du problème étudié

La géométrie du problème que l'on se propose d'étudier maintenant est décrite à la Fig. 1.4. Une interface plane, située dans le plan $y = h$, délimite deux demi-espaces. Le milieu 1 situé dans le demi-plan supérieur ($y > h$) est un milieu homogène, isotrope, linéaire, sans pertes et non magnétique, de permittivité $\varepsilon_1 = \varepsilon_{r1}\varepsilon_0$ et de perméabilité μ_0. En général, dans les applications numériques, nous considérerons que ce milieu a les caractéristiques électromagnétiques du vide. Un objet supposé infiniment long et invariant suivant la direction $\mathbf{e}_z$, de section droite *a priori* arbitraire confinée dans un domaine $\mathcal{D}$ limité par une frontière régulière $\partial\mathcal{D}$ est présent dans le milieu 2, situé dans le demi-plan inférieur ($y < h$). Le milieu 2 est homogène, linéaire, isotrope, non magnétique, de permittivité $\varepsilon_2 = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0$ pouvant être à pertes et de perméabilité μ_0. Quant au diffuseur, il est constitué d'un milieu isotrope, ohmique, linéaire, de permittivité $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_0\varepsilon_r(\mathbf{r})$, de conductivité $\sigma(\mathbf{r})$ et de perméabilité μ_0.

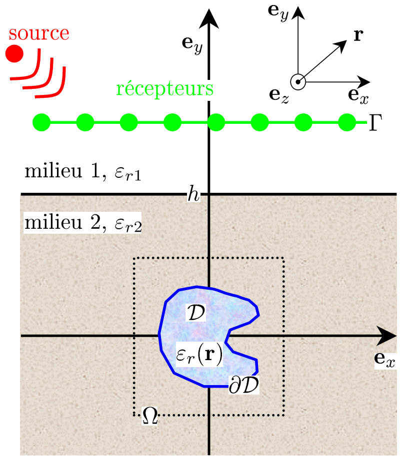


FIG. 1.4 – *Géométrie du problème étudié : configuration «objets enfouis».*

L'objet est éclairé par un champ électromagnétique généré par une distribution de courant $\mathbf{J}(\mathbf{r})$. Là encore, le support des sources est invariant selon la direction $\mathbf{e}_z$ et de section droite confinée dans un domaine $\mathcal{D}_1$ inclus dans le milieu 1. Comme dans le cas de la configuration «espace homogène», nous limiterons notre étude du cas de polarisation $\mathcal{E}_{//}$, et nous conserverons une dépendance temporelle en $\exp(i\omega t)$.

1.3.2 Calcul de la fonction de Green du dioptre

Pour résoudre le problème direct dans cette nouvelle configuration, nous avons choisi d'utiliser la même méthode (représentation intégrale des champs), et les mêmes notations que pour l'espace homogène. De la même manière que nous avons obtenu la relation (1.3), nous pouvons obtenir une relation équivalente dans cette nouvelle configuration. La seule différence est contenue dans la fonction de Green. En effet, G est maintenant solution de :

$$\left\{\Delta + \varepsilon_{rb}(y)k_0^2\right\} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r},\mathbf{r}'). \tag{1.17}$$

La fonction ε_{rb} représente la permittivité relative des milieux. Elle vaut ε_1 pour tout y supérieur à h, et ε_2 pour y inférieur à h. L'objet de cette partie est de déterminer la solution de (1.17) qui vérifie des conditions de rayonnement à l'infini. Nous allons développer ici le calcul en polarisation $\mathcal{E}_{//}$. Un calcul détaillé pour le cas de polarisation $\mathcal{H}_{//}$ se trouve dans [42].

La fonction de Green $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, que nous devons calculer représente le champ électrique créé par une ligne source placée en $\mathbf{r}'$, et observé en $\mathbf{r}$. Nous pouvons distinguer deux cas, selon la position respective de la ligne source et du point d'observation par rapport à l'interface. Ainsi, G sera définie par morceaux :

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \begin{cases} G_T(\mathbf{r},\mathbf{r}') & \text{si les deux points sont séparés par l'interface} \\ G_R(\mathbf{r},\mathbf{r}') & \text{si les points sont du même côté} \end{cases} \tag{1.18}$$

Pour le calcul, nous avons choisi de placer la source dans le milieu 2. La solution de l'autre possibilité, à savoir la source dans le milieu 1, se déduira facilement de la solution obtenue dans cette configuration. En écrivant l'équation (1.17) dans chacun des deux milieux, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \Delta G(x,y,x',y') + k_1^2 G(x,y,x',y') = 0 & y' \leq h \text{ et } y \geq h \\ \Delta G(x,y,x',y') + k_2^2 G(x,y,x',y') = -\delta(x-x',y-y') & y' \leq h \text{ et } y \leq h \end{cases} \tag{1.19}$$

où $k_j^2 = k_0^2 n_j^2$, $j = 1{,}2$ et le symbole δ représente la distribution de Dirac.

Nous utiliserons par la suite une transformée de Fourier spatiale monodimensionnelle (suivant $\mathbf{e}_x$) définie par :

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2i\pi\nu x)\, \mathrm{d}x. \tag{1.20}$$

En prenant la transformée de Fourier ainsi définie des équations du système (1.19), il vient :

$$\begin{cases} \partial_y^2 \tilde{G}(\nu,y,x',y') + (k_1^2 - 4\pi^2\nu^2)\tilde{G}(\nu,y,x',y') = 0 & y' \leq h \text{ et } y \geq h \\ \partial_y^2 \tilde{G}(\nu,y,x',y') + (k_2^2 - 4\pi^2\nu^2)\tilde{G}(\nu,y,x',y') = -\exp(-2i\pi\nu x')\delta(y-y') & y' \leq h \text{ et } y \leq h \end{cases} \tag{1.21}$$

La solution du système (1.21) est immédiate et s'écrit dans chacun des cas $y \geq h$, $y' \leq y \leq h$ et $y \leq y'$, comme une combinaison linéaire d'ondes planes :

$$\tilde{G}(\nu,y,x',y') = \begin{cases} A_1^+ \exp(i\beta_1 y) + A_1^- \exp(-i\beta_1 y), & \forall y \geq h, \\ A_2^+ \exp(i\beta_2 y) + A_2^- \exp(-i\beta_2 y), & \forall y' \leq y \leq h, \\ A_3^+ \exp(i\beta_2 y) + A_3^- \exp(-i\beta_2 y), & \forall y \leq y'. \end{cases} \tag{1.22}$$

Remarquons tout de suite que les termes A_j^+ et A_j^- sont des constantes d'intégration par rapport à la variable y, mais dépendant de toutes les autres variables que sont ν, x', et y'. Les coefficients β_1 et β_2 sont définis de la manière suivante :

$$\beta_j^2 = k_j^2 - 4\pi^2\nu^2. \tag{1.23}$$

La définition de la racine carrée n'est pas triviale. En effet, β_j^2 appartient à l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$, nous devons donc choisir une coupure de sorte que les solutions obtenues ne divergent pas à l'infini. Nous avons opté pour le domaine défini par :

$$\Re e(\beta_j) - \Im m(\beta_j) > 0. \tag{1.24}$$

Deux constantes d'intégration sont déterminée grace aux conditions d'ondes sortantes. En effet, elles imposent que le seul champ susceptible de se propager dans le milieu 1 est un champ qui se dirige vers les y croissants. De plus, dans le milieu 2, seul un champ qui se propage vers les y décroissants peut exister pour $y \leq y'$. Ceci impose, compte tenu de la dépendance temporelle en $\exp(i\omega t)$, de prendre les coefficients A_1^+ et A_3^- identiquement nuls. Les relations de passage sur l'interface vont permettre de déterminer les quatre autres constantes d'intégration. Nous savons qu'en polarisation $\mathcal{E}_{//}$, le champ électrique et sa dérivée normale sont continues à la traversée d'une interface. Ainsi, G et sa dérivée normale sont continues en $y = h$. Par contre, la dérivée normale de G n'est pas continue en $y = y'$. Les relations de continuité s'écrivent alors :

$$\begin{cases} [\tilde{G}]_{y=h} = 0 \\ [\partial_y \tilde{G}]_{y=h} = 0 \\ [\tilde{G}]_{y=y'} = 0 \\ [\partial_y \tilde{G}]_{y=y'} = -\exp(-2i\pi\nu x') \end{cases} \tag{1.25}$$

En reportant (1.22) dans (1.25), nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} A_1^- \exp(-i\beta_1 h) = A_2^+ \exp(i\beta_2 h) + A_2^- \exp(-i\beta_2 h) \\ -i\beta_1 A_1^- \exp(-i\beta_1 h) = i\beta_2 A_2^+ \exp(i\beta_2 h) - i\beta_2 A_2^- \exp(-i\beta_2 h) \\ A_2^+ \exp(i\beta_2 y') + A_2^- \exp(-i\beta_2 y') = A_3^+ \exp(i\beta_2 y') \\ i\beta_2 A_2^+ \exp(i\beta_2 y') - i\beta_2 A_2^- \exp(-i\beta_2 y') - i\beta_2 A_3^+ \exp(i\beta_2 y') = -\exp(-2i\pi\nu x') \end{cases} \tag{1.26}$$

La résolution de ce système ne pose pas de problème particulier, et nous obtenons rapidement :

$$A_1^- = \frac{-i}{2\beta_2} \frac{2\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \exp(i(\beta_1 - \beta_2)h) \exp(i\beta_2 y') \exp(-2i\pi\nu x') \tag{1.27}$$

$$A_2^+ = \frac{-i}{2\beta_2} \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \exp(-2i\beta_2 h) \exp(i\beta_2 y') \exp(-2i\pi\nu x') \tag{1.28}$$

$$A_2^- = \frac{-i}{2\beta_2} \exp(i\beta_2 y') \exp(-2i\pi\nu x') \tag{1.29}$$

$$A_3^+ = \frac{-i}{2\beta_2} \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \exp(-2i\beta_2 h) \exp(i\beta_2 y') + \exp(-i\beta_2 y') \right) \exp(-2i\pi\nu x') \tag{1.30}$$

La fonction de Green G que nous cherchons est obtenue en calculant la transformée de Fourier inverse de $\tilde{G}$. Les fonctions G_T et G_R se déduisent des équations précédentes, et s'écrivent, en faisant les changements de variable $Y = y - h$, $Y' = y' - h$, et $\alpha = 2\pi\nu$:

$$G_T(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{-i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\beta_2}\exp(-i(\beta_2 Y' - \beta_1 Y))\exp(-i\alpha(x'-x))\,\mathrm{d}\alpha, \tag{1.31}$$

$$G_R(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{-i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{r}{\beta_2}\exp(-i\beta_2|Y| - i\beta_2|Y'|)) + \frac{1}{\beta_2}\exp(i\beta_2|Y'-Y|)\right)\exp(-i\alpha(x'-x))\,\mathrm{d}\alpha. \tag{1.32}$$

Les scalaires r et t représentent les coefficients de Fresnel en réflexion et en transmission. Ils sont définis de la manière suivante :

$$r = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_1 + \beta_2}, \text{ et } t = \frac{2\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}. \tag{1.33}$$

Nous retrouvons ici les résultats énoncés dans [42] et dans [38]. Cette formulation nous permet de passer facilement de la situation où la source est dans le milieu 2, à celle où la source est dans le milieu 1. Pour ce faire, il suffit d'intervertir les indices 1 et 2. Nous pouvons remarquer que si nous choisissons de prendre les deux milieux identiques, alors $\beta_1 = \beta_2$, $r = 0$, $t = 1$, et nous retrouvons le développement de Weyl de $\frac{-i}{4}H_0^{(2)}$, fonction de Green solution de :

$$\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}') + k_0^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{1.34}$$

Avant de clore cette partie sur le calcul de la fonction Green associée au demi-espace, il est intéressant de s'attarder sur la structure des fonctions G_T et G_R. La première, G_T, possède une structure de convolution en x (contenue dans le terme en $\exp(-i\alpha(x'-x))$), et malheureusement aucune particularité en y. Si nous voulons déterminer le champ diffracté sur une ligne horizontale, nous pourrons alors utiliser des algorithmes de T.F.R..

La seconde fonction, G_R, est la somme de deux termes. Le premier, proportionnel à r possède une structure de convolution en x (contenue dans le terme en $\exp(-i\alpha(x'-x))$) et en y (contenue dans le terme en $\exp(i\beta_2 \mid Y' - Y \mid)$). Le second terme est doté de la même structure de convolution en x et d'une structure de corrélation en y (contenue dans le terme en $\exp(-i\beta_2 \mid Y' \mid -i\beta_2 \mid Y \mid)$). Ainsi, nous pourrons utiliser, pour ces deux termes, des algorithmes de T.F.R. comme nous allons le voir maintenant.

1.3.3 Prise en compte de G_R dans l'équation de couplage

Dans la suite de ce manuscrit, nous appellerons G_T^{21} la restriction de G aux cas où $Y > 0$, et $Y' < 0$, et G_R^{22}, la restriction de G, lorsque Y et Y' sont tous deux négatifs. Nous pouvons définir de manière symétrique et sans difficulté G_T^{12} et G_R^{11}. Ces quatre fonctions sont représentées de manière symbolique sur la Fig. 1.5.

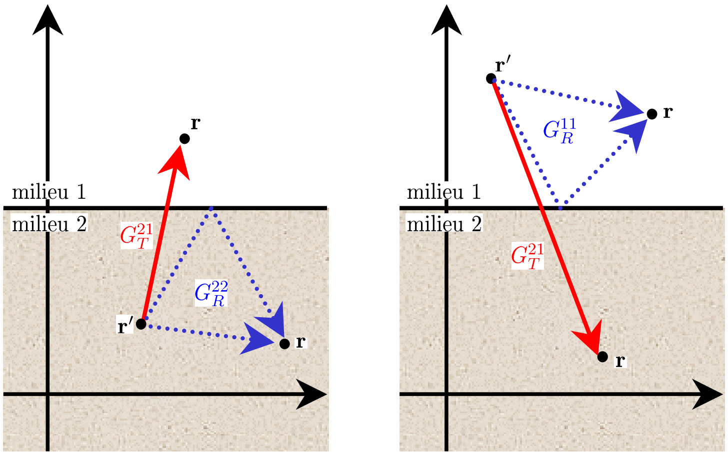


FIG. 1.5 – *Représentation symbolique des restrictions de la fonction de la Green du dioptre.*

Nous utilisons les fonctions de Green à quatre reprises. Une première fois pour calculer le champ incident à l'intérieur du domaine $\mathcal{D}$, à condition que le support $\mathcal{D}_1$ des sources se limite à une ligne. Pour cela, il faudra utiliser G_T^{12}, puisque nous avons placé les sources dans le milieu 1, et que le diffuseur est, lui, dans le milieu 2. Ensuite, nous devons déterminer le champ total à l'intérieur du diffuseur. Cette fois-ci, nous utiliserons G_R^{22}. D'un point de vue expérimental, nous ne pouvons pas avoir accès au champ électrique dans le milieu inférieur. C'est pourquoi, il faudra calculer le champ diffracté par l'objet dans le milieu 1, donc, nous nous servirons de G_T^{21}. Enfin, si nous voulons calculer le champ total sur les récepteurs, il faudra tenir compte de la contribution de G_R^{11}.

L'utilisation des fonctions G_T^{jl} ne présente pas de difficultés particulières.

Les fonctions G_R^{jj} sont en fait, comme nous le montre l'équation (1.32), la somme de deux termes, et nous les écrirons désormais sous la forme:

$$G_R^{jj} = G_{hom}^{jj} + G_{inter}^{jj}. \tag{1.35}$$

Le premier terme, qui correspond à la fonction de Green de l'espace homogène et qui a déjà été traité précédemment, présente une structure de convolution en x et en y. Le second présente lui une structure de convolution en x, et de corrélation en y. Ainsi, en tenant compte de (1.35), l'équation (1.8) devient, dans la configuration «objets enfouis» :

$$E(\mathbf{r}) = E^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + k_2^2 \int\int_{\mathcal{D}} \left(G_{hom}(x - x',y - y') + G_{inter}(x - x',y + y')\right) E_c(x',y')\ \mathrm{d}x'\mathrm{d}y', \quad (1.36)$$

où E_c est égale au produit du champ électrique E et de la fonction contraste χ.

Nous noterons $\overset{x,y}{*}$ la convolution en x et en y, et $\overset{y}{\otimes}$ la corrélation en y, et l'équation (1.36) s'écrira de façon plus formelle :

$$E = E^{\text{inc}} + k_2^2 \left(G_{hom} \overset{x,y}{*} E_c + G_{inter} \overset{x\ y}{*\otimes} E_c \right). \quad (1.37)$$

En utilisant les propriétés des produits de «convolution corrélation» détaillées en annexe de ce manuscrit, l'équation 1.37 peut s'écrire sous la forme [38] :

$$E = E^{\text{inc}} + k_2^2 \mathcal{TF}^{-1} \left\{ \mathcal{TF}_{xy}(G_{hom}).\mathcal{TF}_{xy}(E_c) + \mathcal{TF}_{xy}(G_{inter}).(\mathcal{TF}_y(\mathcal{TF}_x(E_c^\star)))^\star \right\}, \quad (1.38)$$

où TF désigne la transformée de Fourier définie par 1.20, et $\star$ fait référence au complexe conjugué. Les indices x et y indiquent sur quelle variable est considérée la transformée de Fourier.

Nous devons donc résoudre (1.38) en utilisant comme dans le premier chapitre, un algorithme de gradient conjugué. L'équation (1.38) ne présente pas la structure de convolution que nous sommes efforcés de conserver dans le premier paragraphe. Cependant, la formulation proposée dans (1.38) nous permet d'utiliser des algorithmes de T.F.R. pour effectuer les produits de convolution et de corrélation rapidement. Enfin, les efforts faits sur les opérateurs et sur le choix de l'estimation initiale restent de mise pour cette configuration.

1.4 Conclusion

Dans le premier chapitre de ce manuscrit, après avoir posé le problème, en régime harmonique, nous nous sommes attelés à la résolution d'une équation intégrale de domaine pour déterminer le champ diffracté par un diffuseur cylindrique quelconque. Nous avons commencé par la configuration simple «espace homogène».

Durant tout le traitement numérique, nous nous sommes efforcés de conserver la structure de type convolution des équations, pour pouvoir utiliser des algorithmes de type T.F.R. pour effectuer ces opérations afin de minimiser le temps de calcul. Nous avons aussi proposé une procédure d'extrapolation afin de déterminer l'estimation initiale nécessaire à la mise en œuvre du gradient conjugué pour résoudre de manière itérative un système d'équations.

Ensuite, nous nous sommes intéressés à la configuration «objets enfouis» où la grosse difficulté réside dans le calcul et la prise en compte de la fonction de Green associée au dioptre. L'utilisation des algorithmes de T.F.R. a été possible grâce à la structure de convolution suivante $\mathbf{e}_x$, et de corrélation suivant $\mathbf{e}_y$ présentes dans la fonction de Green $\mathbf{G}_R$.

Nous disposons donc d'un algorithme capable de résoudre un problème direct de diffraction électromagnétique en régime harmonique dans deux configurations d'intérêt pratique : configuration «espace homogène» et la configuration «objets enfouis». Ce premier chapitre a été inspiré de [4] mais il nous a semblé important de le rappeler ici car cela nous a permis de poser les bases pour la suite des travaux reportés dans ce manuscrit : la résolution des problèmes directs (dans un premier temps), puis inverses en régime transitoire.

Chapitre 2

Régime temporel

Sommaire

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons développé, pour les deux géométries d'étude («espace homogène» et «objets enfouis»), le formalisme et la méthode utilisés pour résoudre un problème direct de diffraction électromagnétique en régime harmonique. Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la résolution du même problème direct de diffraction électromagnétique, mais cette fois-ci en régime temporel. Nous allons donc déterminer l'évolution dans le temps du champ électrique $\mathcal{E}$ (diffracté ou total) en tous points de l'espace.

Pour mener à bien cette étude, deux solutions s'offrent à nous. Dans la première, la résolution a lieu directement dans le domaine temporel. Nous pouvons citer la méthode Finite-Difference Time-Domain [43]. Il s'agit de discrétiser dans l'espace et dans le temps les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère avec un maillage régulier, ce qui conduit à un schéma explicite : il n'y a pas de système linéaire à résoudre. Les pas de discrétisation en espace et en temps doivent être liés par un critère donné. Avec cette méthode locale, les champs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ ne sont pas calculés au même endroit dans la cellule de Lyee, ce qui permet d'assurer que, en dehors des sources, la divergence des champs est nulle. Comme la taille du domaine de calcul est de dimension finie, il est nécessaire de rajouter des conditions d'absorption aux bords sous forme de Perfect Matched Layer par exemple. Avec cette méthode, nous pouvons considérer des géométries compliquées. Cependant, elle présente cependant quelques inconvénients. La vitesse c_0 de propagation d'une onde dans le vide n'est obtenue que dans le cas limite où le maillage en temps et en espace est infiniment fin. Et il n'est pas évident de considérer des milieux dispersifs.

Une autre approche consiste à résoudre le problème direct en régime temporel *via* un passage par le domaine fréquentiel [41, 4]. Il s'agit de transposer les équations de Maxwell dans le domaine fréquentiel à l'aide d'une transformée de Laplace, de résoudre plusieurs problèmes harmoniques pour une collection de fréquences, puis de retourner dans le domaine temporel grâce à une transformée de Laplace inverse. Nous avons choisi de résoudre le problème direct de cette manière pour pouvoir utiliser la représentation intégrale des champs, qui présente quelques avantages. Tout d'abord, le domaine de calcul se limite au support du diffuseur. Les conditions de rayonnement sont satisfaites *de facto* au travers des fonctions de Green. Enfin, nous pourrons calculer facilement le champ diffracté par des matériaux (objets et/ou milieux) dispersifs. Pour cela, il suffira de se définir un modèle de dispersion.

Ce chapitre s'articulera autour de deux parties. Dans un premier temps, nous traiterons la prise en compte du caractère temporel. Dans la seconde partie, nous exposerons les résultats que nous avons obtenus. Dans la configuration «espace homogène», une étude paramétrique sur certains éléments clés nous permettra de tester l'influence de ces paramètres. Nous présenterons ensuite la comparaison entre les champs mesurés dans une chambre anéchoïque et nos données synthétiques afin de valider les résultats. Enfin, nous présenterons les champs diffractés calculés dans la configuration «objets enfouis».

2.2 Prise en compte du régime transitoire

Comme nous venons de le dire, le régime temporel sera obtenu *via* un passage par le domaine fréquentiel. Il faudra résoudre successivement un grand nombre de problèmes harmoniques pour un grand nombre de fréquences avant de revenir dans le domaine temporel. Nous allons donc présenter dans cette partie les modifications à apporter aux algorithmes développés précédemment pour tenir compte de ce caractère multi-fréquences. Pour des raisons de simplicité, nous expliciterons les modifications pour la configuration «espace homogène». Le passage à l'autre configuration ne pose pas de problème particulier car il est contenu dans le choix des fonctions de Green. Nous allons nous efforcer de trouver un équivalent à l'équation (1.3). La suite du traitement numérique sera identique à celle effectuée au premier chapitre.

2.2.1 Obtention des équations

La géométrie du problème que l'on se propose de résoudre maintenant est la même que celle exposée sur la Fig. 1.1. La différence par rapport à l'étude effectuée dans le premier chapitre de ce manuscrit est contenue dans le champ incident. La distribution de courant $\mathcal{J}(\mathbf{r},t)\mathbf{e}_z$ qui le génère est dorénavant une fonction non sinusoïdale du temps t. Ainsi, les champs diffracté $\mathcal{E}^{\mathrm{d}}(\mathbf{r},t)\mathbf{e}_z$ et total $\mathcal{E}(\mathbf{r},t)\mathbf{e}_z$ sont aussi des fonctions quelconques du temps.

Ecrivons les équations de Maxwell pour des milieux ohmiques [39] :

$$\mathbf{rot}(\mathcal{E}\mathbf{e}_z)(\mathbf{r},t) = -\mu_0 \frac{\partial(\mathcal{H}\mathbf{e}_z)}{\partial t}(\mathbf{r},t), \tag{2.1}$$

$$\mathbf{rot}(\mathcal{H}\mathbf{e}_z)(\mathbf{r},t) = \mathcal{J}(\mathbf{r},t)\mathbf{e}_z + \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})\frac{\partial(\mathcal{E}\mathbf{e}_z)}{\partial t}(\mathbf{r},t) + \tilde{\sigma}(\mathbf{r})\mathcal{E}(\mathbf{r},t)\mathbf{e}_z, \tag{2.2}$$

où les fonctions $\tilde{\varepsilon}$ et $\tilde{\sigma}$ sont définies de la manière suivante :

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \varepsilon(\mathbf{r}), \text{ si } \mathbf{r} \in \mathcal{D} \\ \varepsilon_0, \text{ sinon} \end{cases}, \text{ et } \tilde{\sigma}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sigma(\mathbf{r}), \text{ si } \mathbf{r} \in \mathcal{D} \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

En prenant le rotationnel de la relation (2.1), et en tenant compte de la relation (2.2), nous obtenons, après projection sur l'axe $\mathbf{e}_z$, l'équation différentielle du second ordre vérifiée par le champ électrique :

$$\Delta\mathcal{E}(\mathbf{r},t) - \mu_0\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial t^2}(\mathbf{r},t) - \mu_0\tilde{\sigma}(\mathbf{r})\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}(\mathbf{r},t) = \mu_0\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial t}(\mathbf{r},t). \tag{2.3}$$

Nous allons maintenant transposer cette équation (2.3) dans le domaine fréquentiel. Pour cela, nous allons utiliser une transformée de Laplace définie de la manière suivante :

$$E(\mathbf{r},s) = \int_{t_0}^{+\infty} \mathcal{E}(\mathbf{r},t)\exp(-st)\,\mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

La partie réelle de s ($s = \beta + i\omega$) doit être positive afin d'assurer l'existence de l'intégrale. t_0 correspond au premier instant où le champ électrique est différent de zéro. En prenant la transformée de Laplace ainsi définie de la relation (2.3), nous obtenons :

$$\left(\Delta - \frac{s^2}{c_0^2}\right) E(\mathbf{r},s) = \frac{s^2}{c_0^2}\left(C(\mathbf{r}) + \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 s}\right) E(\mathbf{r},s) + \mu_0 s J(\mathbf{r},s), \tag{2.5}$$

où $c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ représente la vitesse de la lumière dans le vide. La solution de cette équation est donnée sous la forme d'un produit de convolution :

$$E(\mathbf{r},s) = -\left\{G * \left[\frac{s^2}{c_0^2}\left(C + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 s}\right) E + \mu_0 s J\right]\right\}(\mathbf{r},s), \tag{2.6}$$

où G est la fonction de Green satisfaisant une condition de rayonnement à l'infini, solution de :

$$\left(\Delta - \frac{s^2}{c_0^2}\right) G(\mathbf{r},\mathbf{r}',s) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{2.7}$$

et qui vaut, comme nous l'avons déjà vu :

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}',s) = \frac{-i}{4} H_0^{(2)}\left(k \mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid\right), \tag{2.8}$$

où k est défini de la manière suivante :

$$k^2 = -\frac{s^2}{c_0^2}. \tag{2.9}$$

Nous avons obtenu l'équation (2.6) qui est similaire à l'équation (1.3). En effet, en prenant $\beta = 0$, ces deux équations sont rigoureusement les mêmes. La suite du traitement est alors identique à celui décrit dans le premier chapitre de ce manuscrit, à l'exception près que nous devons résoudre l'équation (1.3) pour un ensemble de fréquences complexes. Ainsi, après avoir discrétisé le domaine Ω par des mailles carrées de coté d fixe quelque soit la fréquence, nous obtenons l'équation :

$$\begin{aligned} E_{l,m}(s) = {} & E_{l,m}^{\mathrm{inc}}(s) + \\ & \frac{i}{4}\frac{s^2}{c_0^2} d^2 \sum_{l'=0}^{N_x} \sum_{m'=0}^{N_y} \left\{\tilde{H}\left(\mid l - l' \mid, \mid m - m' \mid, s\right) - \tilde{L}\left(\mid l - l' \mid, \mid m - m' \mid\right)\right\}. \\ & W_{l',m'} \chi^{\mathrm{p}}(l',m',s) E(l',m',s). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Les fonctions $\tilde{H}$ et $\tilde{L}$ et l'ensemble des coefficients $W_{l,m}$ sont définis de la même manière que précédemment. Quant à χ^p, il correspond à l'approximation du contraste $\chi = C + \dfrac{\sigma}{s\varepsilon_0}$ jouissant de la propriété de continuité spatiale dans Ω. Rappelons que cette équation (2.10) présente une structure de convolution.

Nous avons donc obtenu un système d'équations qu'il faut résoudre pour un ensemble de fréquences. Le choix du nombre P de fréquences dépend de la forme de l'impulsion incidente : il en faut suffisamment, de sorte que le spectre du champ incident soit nul pour les plus hautes fréquences considérées. Le pas en fréquences δf étant fixé par l'intervalle Δt de temps sur lequel les champs sont calculés ($\Delta t \delta f = 1$), il faut que P soit suffisamment grand pour que le spectre du champ incident soit bien représenté.

Une fois tous les P problèmes directs harmoniques résolus pour les P fréquences considérées, nous devons obtenir, à partir des résultats harmoniques, le champ électrique dans le domaine temporel. Pour cela, il nous faudra évaluer une intégrale de la forme :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r},t) = \frac{\exp(\beta t)}{\pi} \Re e \left[\int_0^\infty \exp(i\omega t) E(\mathbf{r},\beta + i\omega) \, \mathrm{d}\omega \right]. \tag{2.11}$$

Pour des détails sur l'obtention de cette intégrale, le lecteur peut se reporter à une annexe de ce manuscrit. Avant de présenter les résultats obtenus, formulons quelques remarques.

2.2.2 Remarques

La première remarque concerne la discrétisation de l'espace. En effet, elle présente la particularité d'être indépendante de la fréquence. Dans une méthode des moments classique [44], le côté d de la maille est déterminé pour chaque fréquence. Le critère de Shannon peut, par exemple, nous donner le nombre de points par longueur d'onde. Nous avons opté pour un pas de discrétisation d fixe quelle que soit la fréquence. Nous le choisissons de sorte que le champ électrique à basses fréquences soit sur-échantillonné. Ainsi, nous observerons une augmentation de l'erreur relative de la solution dans le domaine fréquentiel quand la fréquence augmentera. Cependant, elle sera compensée par la décroissance du module du champ incident, comme nous l'illustrerons par la suite.

La deuxième différence par rapport à la méthode des moments est que nous ne calculons pas le champ électrique à l'intérieur de la maille, mais à ses quatre sommets. Cela n'introduit pas d'approximation supplémentaire.

Pour terminer cette comparaison, nous pouvons remarqué que l'erreur commise en résolvant (2.10) est de l'ordre de grandeur de $\mathcal{O}(d^2 \ln(d))$ d'après [4] au lieu de $\mathcal{O}(d)$ avec une méthode des moments classique.

La seconde remarque concerne la résolution proprement dite de l'équation (2.10). Comme dans la première partie pour la résolution de l'équation (1.12), nous avons choisi de la résoudre de manière itérative, en mettant en œuvre un gradient conjugué. Nous ne détaillerons pas cette méthode ici, car le lecteur la trouvera en annexe. Les différents opérateurs dont nous avons besoin sont obtenus de la même façon que précédemment en les étendant à une dimension supérieure et les produits de convolution se feront à l'aide d'algorithme T.F.R. (grâce à la structure de convolution). Il faudra effectuer ces opérations à chaque fréquence $s_n = \beta + i\omega_n$ ($\omega_n = \omega_{n-1} + 2\pi\delta f$). À l'instar du chapitre précédent, nous mettons en œuvre une procédure d'interpolation pour obtenir une estimation initiale. Elle est construite sur le même schéma que (1.16) mais au lieu d'effectuer une extrapolation sur les sources (il n'y en a qu'une seule), nous la ferons sur les fréquences. Ainsi, l'estimation initiale x_0 du champ électrique pour traiter le problème à la fréquence s_n est une combinaison linéaire des résultats obtenus aux fréquences inférieures, et s'écrit :

$$x_0(s_n) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k x(s_{n-k}). \tag{2.12}$$

La détermination des coefficients α_k est exposée en annexe de ce manuscrit.

Nous allons maintenant chercher une première validation de l'algorithme de résolution d'un problème direct de diffraction électromagnétique, en comparant qualitativement nos résultats avec ceux que l'on peut trouver dans [4]. En effet, puisque nous nous sommes inspirés de ces travaux, nous devrions obtenir les même résultats.

2.3 Résultats en configuration «espace homogène»

Avant d'exposer les résultas numériques obtenus, attachons-nous à présenter les diffuseurs utilisés et la forme du champ électrique incident.

2.3.1 Présentation des résultats

Diffuseurs et champ incident

Pour tester le code de calcul, nous simulons l'interaction entre un champ électrique incident et trois objets de formes canoniques. Tout d'abord, nous utilisons un diffuseur diélectrique, homogène, de permittivité relative $\varepsilon_r = 6$, non conducteur, de section droite carrée et de côté unité. Dans la suite de ce manuscrit, cet objet sera appelé diffuseur diélectrique. Ensuite, nous remplacerons cette première cible par un diffuseur de même géométrie mais de permittivité relative $\varepsilon_r = 1$ et de conductivité $\sigma = 10/(Z_0)\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$, où Z_0 représente l'impédance du vide ($Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$). Nous le qualifierons par la suite de conducteur. Enfin, le troisième objet utilisé, que nous nommerons objet circulaire, est un cylindre de section droite circulaire, de rayon $a = 0.5$ m, inhomogène, de permittivité relative $\varepsilon_r = 2.25 + 4\sin^2(\frac{\pi\rho}{a})$ et non conducteur.

Le champ électrique est calculé en tous les points de l'espace Ω, mais nous n'exposerons ici son évolution au cours du temps qu'en trois points d'observation situés sur la face avant (1), au centre (2) et sur la face arrière (3) du diffuseur comme nous le montre la Fig.2.1.

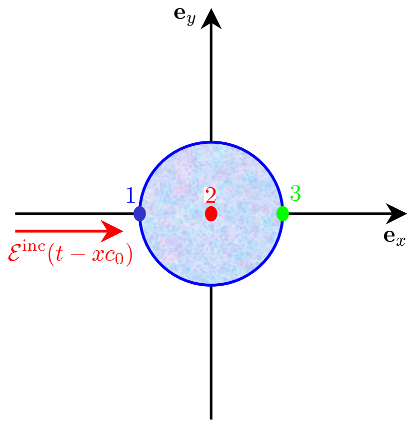


FIG. 2.1 – *Localisation des points d'observation du champ électrique. Le point* 1 *correspond à la face avant du diffuseur, le point* 2 *au centre, et le point* 3 *à la face arrière.*

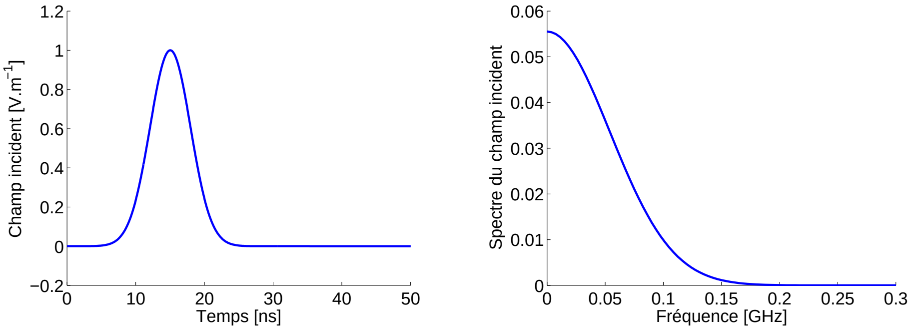
Nous utiliserons comme champ électrique incident une impulsion gaussienne. Nous l'écrirons alors sous la forme :

$$\mathcal{E}_z^{\text{inc}}(x,y,t) = \exp[-16(t - \tau - \frac{x}{c_0})^2/\tau^2]. \tag{2.13}$$

Il s'agit d'une onde plane. La durée de l'impulsion est controlée par le paramètre τ et nous le choisirons en fonction des diffuseurs utilisés. L'impulsion incidente est de la même forme que celle de [4]. Cette impulsion n'est pas très réaliste d'un point de vue expérimental car elle contient un terme statique. Nous l'utilisons afin de retrouver les résultats de [4]. La Fig. 2.2 permet de visualiser la forme du champ incident en fonction du temps ainsi que la forme du spectre du champ incident en fonction de la fréquence.

Nous pouvons alors vérifier que le module du champ incident est une fonction décroissante de ω, comme nous l'annoncions plus haut.

Enfin, nous devons préciser la taille du domaine Ω, qui, rappelons-le, correspond au domaine de l'espace à l'intérieur duquel nous calculons le champ électrique. Il s'agit d'un carré de 2 m de coté, que nous discrétisons en $N_c = 56 \times 56$ mailles. Avec la collocation aux sommets des mailles, cela revient à déterminer le champ en (57×57) points. Toutes ces précisions étant apportées, nous pouvons présenter les résultats obtenus.



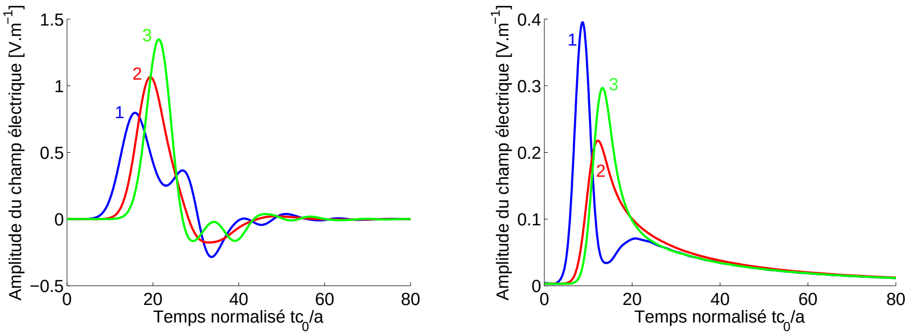
(a) (b)

FIG. 2.2 – *Champ incident définie par (2.13) avec* $\tau = 50$ *ns. (a) : enveloppe du champ incident. (b) : module du spectre du champ incident.*

Diffuseurs de section carrée

Pour commencer, nous simulons l'interaction entre le champ électrique incident défini par (2.13), et le diffuseur diélectrique. Pour cette géométrie particulière, la durée τ de l'impulsion gaussienne est choisie de telle sorte que la relation $c_0\tau/a = 10$ soit vérifiée. Ainsi, τ est pris comme égal à 1.67 ns. Nous choisissons cette valeur particulière pour pouvoir comparer nos résultats avec ceux obtenus dans [4]. La Fig. 2.3 montre le champ électrique aux trois points d'observation définis sur la Fig. 2.1, en fonction du temps pour le diffuseur diélectrique (a). Nous constatons qu'après quelques oscillations, le champ électrique tend très vite vers zéro. Le premier pic (courbe 1) correspond à l'arrivée de l'onde sur la face avant du diffuseur, le deuxième (courbe 2) à l'arrivée de $\mathcal{E}$ au centre de la cible, et le troisième (courbe 3) à l'arrivée sur la face arrière. Quant au quatrième (courbe 1), qui est beaucoup moins prononcé, il correspond à un écho de l'onde : elle a rebondi sur la face arrière, puis est revenue sur la face avant. Cette figure permet aussi de retrouver la taille du diffuseur en étudiant le temps de vol. En effet, connaissant la vitesse c de propagation de l'onde à l'intérieur du diffuseur $c = \dfrac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$, nous sommes capables de déterminer la distance parcourue pendant un intervalle de temps donné. Par exemple, en mesurant le temps qui s'est écoulé entre le premier et le second pic, nous trouvons environ 4 ns, ce qui correspond à une distance de 49 cm, dans le milieu considéré. Nous retrouvons quasiment la distance séparant les points d'observation 1 et 2, qui est de 50 cm.

La Fig. 2.3 montre aussi en (b), l'évolution du champ électrique aux mêmes points d'observation en fonction du temps, mais après une interaction entre le champ incident et le cylindre conducteur.



(a) (b)

FIG. 2.3 – *Évolution en fonction du temps du champ électrique total calculé aux trois points d'observation en fonction du temps normalisé. (a) :* diffuseur diélectrique*. (b) :* diffuseur conducteur*.*

Cette fois-ci, la décroissance du champ est douce, et se fait sans oscillations puisque l'onde est absorbée.

Diffuseur de section circulaire

L'exemple suivant est plus intéressant. Cette fois-ci, le diffuseur utilisé est le diffuseur circulaire. Nous choisissons une impulsion plus étroite dans le temps, telle que $\tau = 0.5$ ns, toujours pour pouvoir comparer avec les résultats de [4]. Pour avoir un vision plus globale, nous représentons l'évolution du champ électrique en fonction du temps dans tout le domaine Ω, sous la forme de cartes de champ à des instants astucieusement choisis. Ces cartes sont regroupées dans la Fig. 2.4.

Pour que les cartes soient plus lisibles, nous avons représenté la valeur absolue du champ électrique en fonction des points de l'espace pour différents instants. L'onde arrive sur la face avant du diffuseur (a), puis nous pouvons voir le front d'onde se déformer à la traversée du cylindre (b-c). Une fois arrivée sur la face arrière, une partie de l'onde traverse de nouveau l'objet par le centre et le reste tourne autour de l'objet (d-f). En effet, avec un diffuseur de section circulaire et inhomogène, nous nous attendons à observer des ondes rampantes, qui vont courir le long de sa frontière $\partial\mathcal{D}$ [45]. Ensuite, seules ces ondes rampantes persistent (g-i) en s'éteignant petit à petit. Regardons plus précisément l'évolution du champ électrique en fonction du temps aux trois points définis sur la Fig. 2.1. Nous les reportons sur la Fig. 2.5.

Nous vérifions sur la Fig. 2.5 la présence d'un champ électrique non nul, à des instants grands devant la durée de l'impulsion incidente, qui correspond aux ondes rampantes le long du cylindre. Nous pouvons remarquer que lorsque le champ électrique est non nul sur la face avant, il l'est sur la

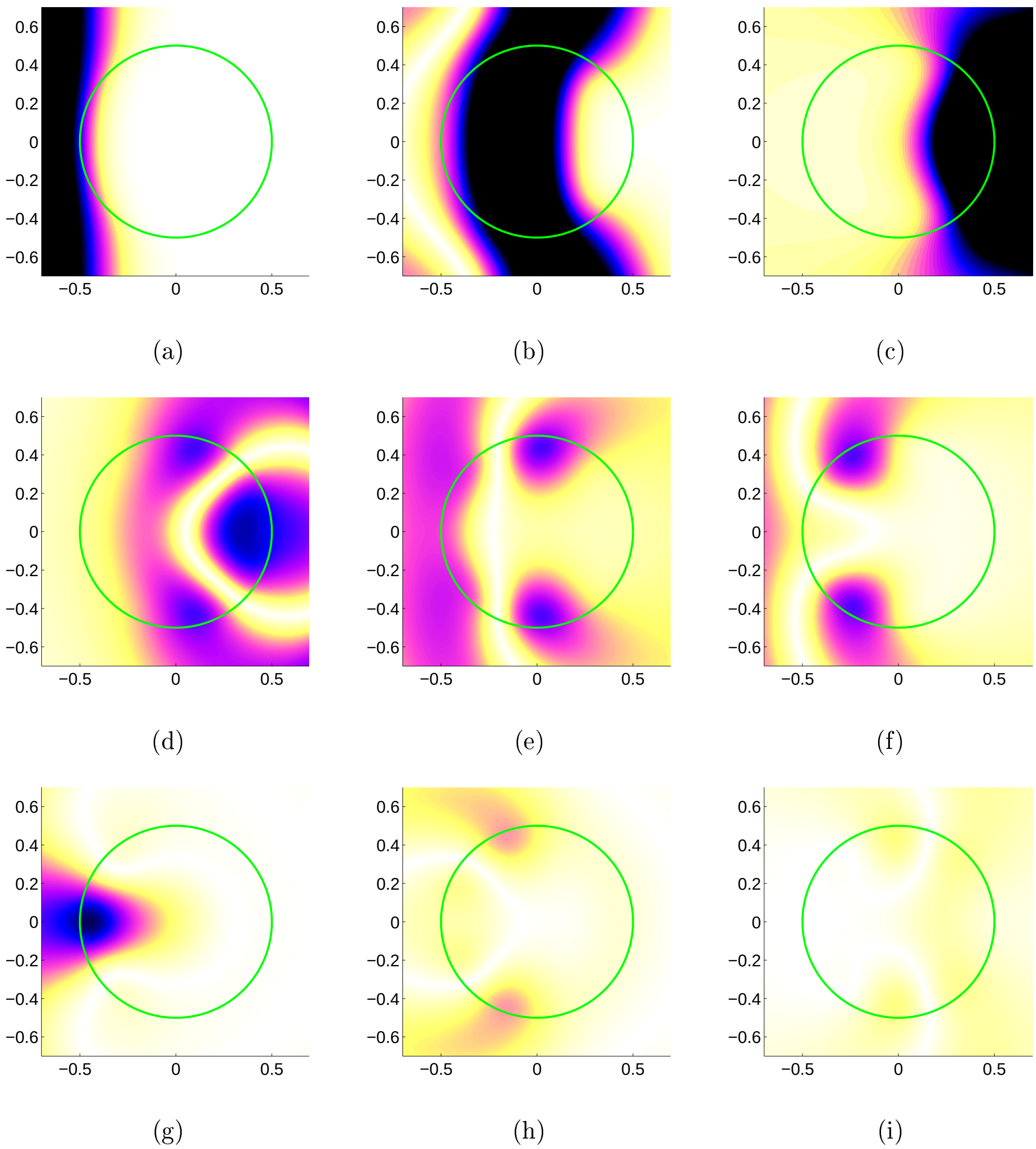
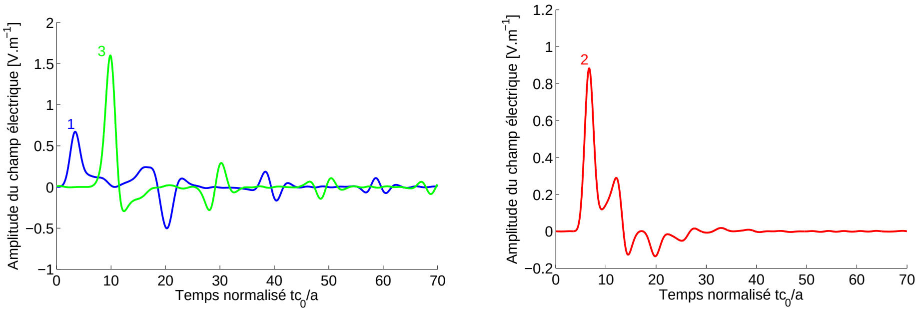


FIG. 2.4 – *Cartes du module du champ électrique pour différents instants pour le* diffuseur circulaire. *(a) : $t = 2.2$ ns. (b) : $t = 5.4$ ns. (c) : $t = 8.6$ ns. (d) : $t = 11.6$ ns. (e) : $t = 13.9$ ns. (f) : $t = 15.1$ ns. (g) : $t = 17.5$ ns. (h) : $t = 19.8$ ns. (i) : $t = 22.1$ ns.*

face arrière, et réciproquement. Par contre, nous pouvons vérifier sur la Fig. 2.4 que la symétrie du problème par rapport à l'axe $\mathbf{e}_x$ est conservée sur le champ électrique. Comme leur nom l'indique, les ondes rampantes ne se propagent qu'à la surface du diffuseur. Elles ne sont pas visibles sur la courbe de la Fig. 2.5-(b), laquelle montre le champ électrique au centre de l'objet en fonction du temps. Aussi, après un temps suffisamment long, le champ électrique se propage exclusivement le



(a) (b)

Fig. 2.5 – *Évolution en fonction du temps du champ électrique total pour le* diffuseur circulaire. *(a) : face avant (courbe bleue) et arrière (courbe verte). (b) : centre (courbe rouge).*

long du contour du diffuseur.

Les résultats exposés ici correspondent à ceux présents dans [4]. En effet, nous les avons comparés qualitativement et quantitativement, et nous pouvons dire qu'ils sont identiques. Cela nous donne une première validation du code de calcul. La seconde consistera en la comparaison des champs calculés avec les champs mesurés dans la chambre anéchoïque dont dispose le laboratoire. Avant cela, nous allons discuter du choix de certains paramètres, tels que la partie réelle β de la fréquence s, le nombre de points de discrétisation de l'espace et le choix du nombre de terme dans la combinaison linéaire générant l'estimation initiale.

2.3.2 Étude paramétrique

L'algorithme de résolution du problème de diffraction électromagnétique, tel que nous l'avons présenté ici, contient plusieurs paramètres, tels que β, N_c, et K qui, judicieusement choisis, permettent de minimiser le temps de calcul. Nous testerons, grace à une étude paramétrique l'influence de ces différents paramètres. Commençons par β qui correspond à la partie réelle de la fréquence complexe s.

Influence de β

Comme nous l'avons précisé plus haut dans ce manuscrit, β est une grandeur réelle positive, qui correspond à la partie réelle de la fréquence complexe s. Il doit être choisi de manière à éviter les zéros du déterminant de la matrice $\mathbf{A}(s)$, définie par (1.15) et ainsi éviter les fréquences de résonance. Cela permet de diminuer le nombre d'itérées nécessaires à la convergence de la méthode du gradient conjugué et ainsi accélérer la résolution du problème. Au lieu de donner des temps de calcul qui dépendent de la machine utilisée, nous allons exposer des graphiques représentant le nombre d'itérées en fonction de la fréquence traitée, pour des valeurs de β différentes. En effet, le nombre d'itérées est lié linéairement au temps de calcul. Remarquons tout de suite, que pour $\beta = 0$, la transformée de Laplace se confond avec la transformée de Fourier. Pour cette étude paramétrique nous avons essentiellement utilisé le diffuseur de section circulaire, car c'est pour ce diffuseur que les effets et l'influence des paramètres sont les plus visibles. Pour les autres diffuseurs, les résultats et les conclusions sont identiques.

Nous nous efforçons de trouver, de manière empirique, l'ordre de grandeur de β qui minimise le nombre d'itérées et par la même occasion le temps de calcul. Nous testons l'influence de ce paramètre pour des valeurs comprises entre 0 et $2.25\ 10^7\ \mathrm{s}^{-1}$. Nous reportons sur la Fig. 2.6 le nombre d'itérées nécessaires à la résolution du système d'équations en fonction de la fréquence pour $\beta = 0$; $\beta = 5\ 10^6$; et $\beta = 2.25\ 10^7\ \mathrm{s}^{-1}$.

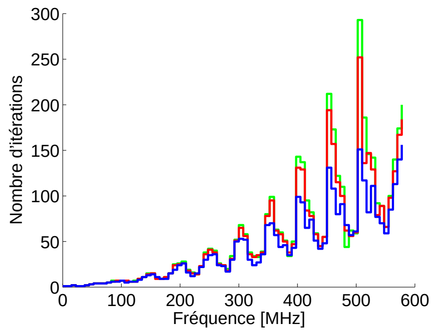
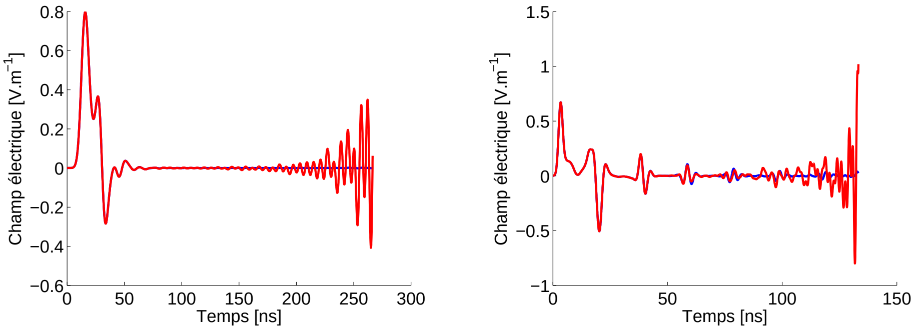


FIG. 2.6 – *Nombre d'itérées nécessaire à la résolution du système d'équations en fonction de la fréquence traitée pour le* diffuseur circulaire, *pour trois valeurs de β. En bleu :* $\beta = 2.25\ 10^7\ \mathrm{s}^{-1}$, *en rouge :* $\beta = 5\ 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$, *en vert :* $\beta = 0\ \mathrm{s}^{-1}$.

Quelque soit la fréquence réelle f ($f = \dfrac{\omega}{2\pi}$), nous constatons que le nombre d'itérées diminue au fur et à mesure que β croit. Ceci s'explique par le fait que les fréquences de résonance, pour des diffuseurs sans pertes, sont proches de l'axe imaginaire des fréquences complexes s [4]. Ainsi, plus β sera grand, moins il y aura d'itérées à faire. En contrepartie, pour des valeurs de β trop grandes, la présence d'un terme en $\exp(\beta t)$ dans le calcul de la transformée de Laplace inverse (2.11) va augmenter de manière considérable l'erreur commise aux grands instants. Le champ électrique va alors diverger et nous allons voir apparaître des oscillations pour les instants élevés. Nous le vérifions sur les courbes de la Fig. 2.7, qui représente le champ électrique $\mathcal{E}$ en fonction du temps pour le diffuseur diélectrique (a) avec $\beta = 5\ 10^6$ (en bleu) et $\beta = 2.5\ 10^7$ s (en rouge), et pour le diffuseur circulaire (b) avec $\beta = 2.25\ 10^7$ (en bleu) et $\beta = 5.25\ 10^7\ \mathrm{s}^{-1}$ (en rouge).



(a) (b)

FIG. 2.7 – *Évolution en fonction du temps du champ électrique total sur la face avant des cylindres. (a) :* diffuseur diélectrique *avec $\beta = 5\ 10^6\ s^{-1}$ en bleu et $\beta = 2.5\ 10^7 s^{-1}$ en rouge. (b) :* diffuseur circulaire *avec $\beta = 2.25\ 10^7\ s^{-1}$ en bleu et $\beta = 5.25\ 10^7 s^{-1}$ en rouge.*

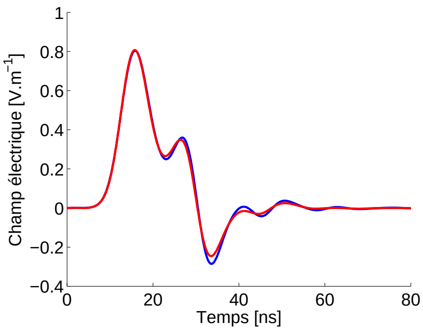
Nous devrons prendre β suffisamment grand pour s'éloigner de l'axe imaginaire, et des fréquences de résonance, mais pas trop non plus, pour ne pas faire diverger le champ reconstruit aux instants élevés. Nous retrouvons ici les conclusions de [4].

Influence du nombre de mailles

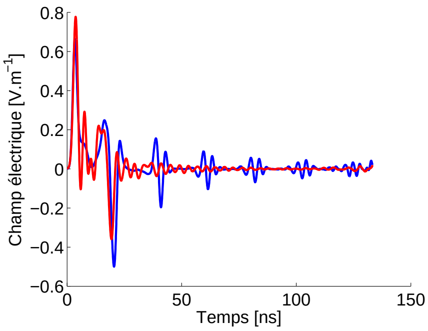
Après avoir regardé l'influence de β, nous nous intéressons à un autre paramètre qui intervient dans le temps de calcul : le nombre de mailles de discrétisation de l'espace. En effet, le choix de ce paramètre est important car, plus il y aura de points, plus le système d'équations (2.10) sera grand. Nous pouvons déjà remarquer que pour N_c mailles dans une direction, nous devons évaluer le champ électrique en $N_c + 1$ points car nous le calculons aux sommets de ces mailles. Nous allons chercher le plus petit nombre de mailles nécessaire à l'obtention d'un champ électrique conforme aux résultats obtenus en échantillonnant très finement le domaine Ω. Le théorème d'échantillonnage de Shannon nous donne un pas d'échantillonnage par longueur d'onde λ. Or, nous choisissons de travailler avec un maillage fixe indépendant de la fréquence, et donc de λ. Nous choisissons de respecter le critère de Shannon pour la fréquence centrale de l'impulsion incidente. Ainsi, à basses fréquences le domaine est sur-échantillonné, et pour les hautes fréquences il est sous-échantillonné. Cependant, la décroissance du spectre du champ incident limite l'erreur commise pour les hautes fréquences.

De plus, le choix du nombre de mailles de discrétisation dépend fortement de la forme du diffuseur. En effet, nous pourrons nous contenter d'un petit nombre pour un diffuseur de section carrée ou rectangulaire, alors que pour un diffuseur de section circulaire, il faudra le prendre plus grand. Dans le premier cas, nous pourrons faire en sorte que le maillage épouse parfaitement la frontière $\partial\mathcal{D}$ de l'objet. Par conséquent, il ne sera pas nécessaire de l'approcher par un polygône et nous ne ferons pas d'approximation supplémentaire. Alors que dans le second cas, la frontière $\partial\mathcal{D}$ circulaire est approchée par des segments de droite, comme nous l'avons expliqué auparavant. Le maillage doit donc être plus fin, afin de commettre le moins d'erreurs possible.

Nous considérons que pour $N_{56} = (56 \times 56)$ mailles pour le domaine Ω de 2 m de coté, nous le sur-échantillonnons. En effet, il est discrétisé à environ $\frac{\lambda_{min}}{14}$, où λ_{min} correspond à la plus petite longueur d'onde considérée (pour éviter des problèmes numériques et le cas purement statique, nous ne commençons pas rigoureusement à $f = 0$). Le champ électrique obtenu pour cette discrétisation sera pris comme champ de référence. Nous reportons sur la Fig.2.8 l'évolution en fonction du temps des champs électriques calculés sur la face avant du cylindre diélectrique (a) et circulaire (b) pour N_{56} et N_8.



(a)



(b)

FIG. 2.8 – *Évolution en fonction du temps du champ électrique calculé sur la face avant du* diffuseur dielectrique *(a) et du* diffuseur circulaire *(b). En bleu : N_{56} =(56 × 56). En rouge : N_8 =(8 × 8).*

En bleu, nous visualisons le champ calculé avec $N_{56} = (56 \times 56)$ mailles de discrétisation, et en rouge, le champ calculé avec $N_8 = (8 \times 8)$ mailles. Pour les deux objets, les deux courbes ne se superposent pas, mais l'écart entre les courbes semble plus important pour le diffuseur circulaire. Pour quantifier cette erreur, nous définissons le scalaire err_t de la manière suivante :

$$err_t = \frac{\int_0^{+\infty} \| \mathcal{E}(\mathbf{r},t)_{ref} - \mathcal{E}(\mathbf{r},t)_{test} \|^2 \, \mathrm{d}t}{\int_0^{+\infty} \| \mathcal{E}(\mathbf{r},t)_{ref} \|^2 \, \mathrm{d}t}, \tag{2.14}$$

où $\mathcal{E}_{ref}$ et $\mathcal{E}_{test}$ correspondent respectivement au champ électrique calculé avec N_{56} mailles et au champ électrique calculé avec moins de mailles (ici N_8).

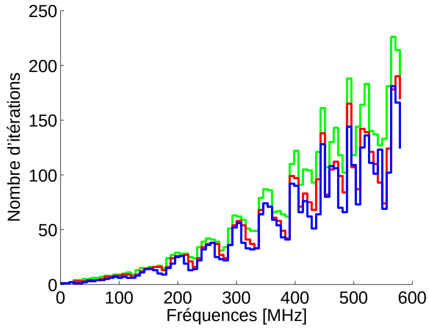
Le théorème de Parseval nous indique que l'erreur en fréquence, qui correspond à l'erreur que nous effectuons pendant la résolution itérative du système d'équations (2.10), et l'erreur dans le domaine temporel doivent être du même ordre de grandeur. Pour ces deux exemples, nous fixons le critère d'arrêt en fréquence à 10^{-3}, ce qui correspond à une erreur en fréquence de 0.1%. Pour le diffuseur diélectrique, err_t vaut 0.6%. Nous devons donc échantillonner plus finement le domaine Ω. L'erreur err_t devient inférieure à 0.1% dès que l'on utilise N_{16} mailles, et les deux erreurs en temps et en fréquence sont du même ordre de grandeur.

Quant au cylindre circulaire, err_t vaut 46%. L'utilisation d'un maillage plus fin permet de la diminuer considérablement. Ainsi, avec N_{16} mailles, elle a chuté de moitié. En affinant encore plus, nous obtenons une erreur de 0.7% avec N_{32} mailles. Pour obtenir un champ quasiment identique à celui pris comme référence, nous devons utiliser N_{48} mailles. L'erreur est alors inférieure à 0.1% et est donc du même ordre de grandeur que l'erreur en fréquence.

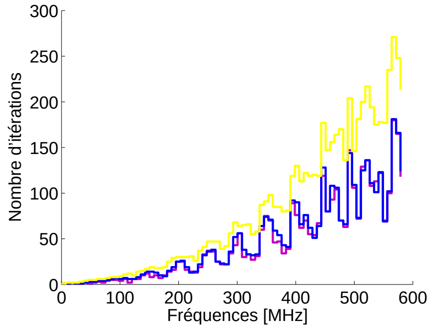
Influence du choix de l'estimation initiale

Le dernier paramètre dont nous testons l'influence est le choix de l'estimation initiale, nécessaire dans toute résolution itérative. Comme nous l'avons précisé plus haut dans ce manuscrit, nous n'utilisons pas une estimation initiale classique. En effet, le champ incident sert généralement de point de départ à la méthode itérative, car il serait le champ qui se propagerait s'il n'y avait pas de diffuseur (approximation de Born). Afin d'améliorer les performances de l'algorithme et limiter le temps de calcul, nous utilisons une procédure d'extrapolation: «marching-on-in frequency» [41, 4]. Nous avons déjà remarquer que cette procédure d'extrapolation pouvait être mise en œuvre sur d'autres paramètres physiques tels que la position des sources si nous faisons une étude sous différentes incidences. L'estimation initiale, pour résoudre le problème à la fréquence s_n est une K-combinaison linéaire des résultats obtenus aux fréquences précédentes, comme décrit par la formule (2.12). Pour tester l'influence de cette estimation initiale, nous calculons le nombre d'itérées nécessaire pour converger vers la solution pour des valeurs de K comprises entre 0 et 4 (0 correspond à l'utilisation du champ incident). Les résultats obtenus sont exposés sur la Fig. 2.9, qui représente le nombre d'itérées nécessaire en fonction de la fréquence traitée pour différentes valeurs de K.

Sur la Fig. 2.9-(a), nous pouvons constater que quelque soit la fréquence, le nombre d'itérées est minimal pour $K = 3$. En regardant le graphique Fig. 2.9-(b), nous ne pouvons qu'apprécier l'intérêt de la combinaison linéaire à trois termes par rapport au champ incident. En considérant



(a)



(b)

FIG. 2.9 – *Nombre d'itérées nécessaire pour résoudre le système d'équations en fonction de la fréquence pour le* diffuseur circulaire. *(a) : $K = 3$ (bleu), $K = 2$ (rouge) et $K = 1$ (vert). (b) : $K = 3$ (bleu), $K = 4$ (magenta) et $K = 0$ (jaune).*

une combinaison linéaire à quatre termes, il y a redondance et nous n'apportons plus suffisamment d'information pour que l'influence de ce terme supplémentaire se fasse sentir. Nous le vérifions sur la Fig. 2.9-(b), où, quelque soit la fréquence, le nombre d'itérées pour une combinaison linéaire à trois et quatre termes sont quasiment les mêmes. Ainsi, l'estimation initiale qui minimise le nombre d'itérées est bien obtenue par une combinaison linéaire des trois résultats calculés aux trois fréquences précédentes.

Pour se convaincre de l'intérêt par rapport au temps de calcul du choix de l'estimation initiale, nous proposons le graphique de la Fig. 2.10, où nous reportons le nombre total Nb d'itérées pour les cinq différentes estimations initiales utilisées. Ils sont normalisés par le nombre Nb obtenu pour $K = 3$.

Ainsi, nous pouvons en déduire qu'il faut 1.6 fois plus de temps pour obtenir la solution en utilisant le champ incident comme estimation initiale, qu'en utilisant l'extrapolation avec $K = 3$. En utilisant seulement le résultat obtenu à la fréquence inférieure ($K = 1$), nous mettons 1.4 fois plus de temps que pour notre référence. Par contre, en utilisant l'extrapolation avec $K = 2$, le temps de calcul est très voisin du temps de référence, mais il lui reste supérieur. Et avec $K = 4$, le nombre total d'itérées ne varie quasiment plus.

L'étude paramétrique menée ici nous permet de tester l'influence de certains paramètres. Nous avons cherché de manière empirique à minimiser le temps de calcul, en cherchant à minimiser le nombre d'itérées nécessaire pour résoudre le système d'équations (2.10), tout en s'efforçant d'ob-

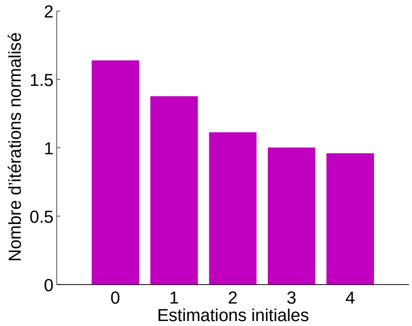


FIG. 2.10 – *Nombre total d'itérées normalisé pour cinq estimations initiales. (0) : champ incident. (1) : combinaison linéaire à $K = 1$ termes. (2) : combinaison linéaire à $K = 2$ termes. (3) : combinaison linéaire à $K = 3$ termes. (4) : combinaison linéaire à $K = 4$ termes.*

tenir des résultats convenables. Le temps de calcul s'avère être un véritable goulet d'étranglement lorsque l'on cherche à résoudre un problème de diffraction inverse de manière itérative, et particulièrement pour certaines méthodes qui nécessitent de résoudre un problème direct à chaque itérée.

La totalité du travail présenté jusqu'à maintenant a été obtenue par simulation sur ordinateur (données synthétiques). Mais la Physique est une science expérimentale et la comparaison entre des grandeurs issues de l'Expérience et celles calculées numériquement est un point essentiel. Nous avons en plus la chance de pouvoir bénéficier d'une chambre anéchoïque et de pouvoir faire des mesures. Nous utilisons donc les installations mises à disposition et ce chapitre sera consacré à la présentation de mesures effectuées. Signalons dès maintenant que nous n'avons pas fait les mesures nous-mêmes, mais ce sont Jean-Michel Geffrin, Christelle Eyraud et Pierre Sabouroux qui s'en sont chargés. Dans un premier temps, nous donnerons quelques indications sur le dispositif expérimental. Ensuite, nous parlerons des problèmes liés au calibrage des champs et nous terminerons par des comparaisons entre les champs mesurés et les champs simulés.

2.3.3 La chambre anéchoïque

La chambre anéchoïque est un outil de travail indispensable et son domaine d'application est très vaste. Sans présenter ni détailler toutes les possibilités qu'elle offre, nous pouvons citer, par exemple, les mesures de surfaces équivalentes radar [46], les diagrammes de rayonnement d'antennes [47], la caractérisation de matériaux [48, 49], et l'application qui nous intéresse ici, les mesures de champs diffractés par des objets bidimensionnels ou tridimensionnels [50]. Les mesures de diffraction à deux dimensions ont été regroupées dans une première base de données en 2001 [36], laquelle permet de confronter différents algorithmes d'inversion à des champs mesurés. Une seconde campagne de mesures a été effectuée en 2004 [51], et nous présenterons, dans un prochain chapitre, les résultats de nos inversions.

Le dispositif expérimental consiste en une cage de Faraday de 14.50 m de long, 6.50 m de large, et 6.50 m de haut, recouverte d'absorbants pour supprimer les réflexions sur la paroi, comme nous le montre la Fig. 2.11. La gamme de fréquences de travail est comprise entre 300 MHz et 26.5 GHz. À l'intérieur de la chambre, se trouvent plusieurs éléments. Tout d'abord, une arche métallique fixe sur laquelle deux chariots peuvent se déplacer. Sur chacun de ces chariots, nous pouvons placer une antenne susceptible de jouer le rôle de source ou de récepteur. Cela permet d'éclairer le diffuseur sous diverses incidences et de mesurer le champ diffracté suivant plusieurs directions, ce qui est intéressant pour des mesures de diffraction tridimensionnelle. La manière dont nous l'utilisons est décrite dans [36, 52]. Pour notre série de mesures (étude bidimensionnelle), le chariot supportant la source sera fixe, et positionné à mi-hauteur de l'arche. Le second ne sera pas utilisé, il sera placé au zénith de l'arche. Le diffuseur est situé sur un dispositif rotatif pour le faire tourner et ainsi de l'éclairer sous plusieurs incidences. Un second dispositif concentrique au premier, de rayon environ 2 m, supporte le récepteur et permet de le faire tourner dans le plan azimutal. Nous pouvons alors mesurer le champ tout autour de l'objet, à l'exception d'une zone d'exclusion de 120^o due à la présence de l'arche. L'ensemble des 241 positions discrètes que peut prendre le récepteur revient à considérer un réseau virtuel d'antennes réceptrices situé tout autour du diffuseur. L'ensemble du dispositif, tel que nous l'utilisons, est représenté sur la Fig. 2.12. En fin de chaîne d'acquisition, un analyseur de réseaux nous donne la partie réelle et la partie imaginaire du champ électrique mesuré. Les détails du traitement électronique et notamment les problèmes liés à la mesure de la phase ne sont pas exposés ici; ils font l'objet d'une thèse au laboratoire [53].

Le dispositif présenté ici ne permet pas de mesurer directement des champs diffractés. En effet, les antennes reçoivent un champ total, somme de deux contributions : le champ incident, provenant directement de l'antenne émettrice et le champ diffracté par l'objet. Cela nous oblige à faire deux fois les mesures. Durant la première série, la chambre est vide : il n'y a pas de diffuseur. Nous mesurons alors le champ incident. Pour la seconde série de mesure, nous plaçons le diffuseur, et nous mesurons le champ total. Le champ diffracté recherché se déduit par différence entre ces deux mesures.

Nous pouvons encore faire une dernière remarque. Avec le matériel dont nous disposons, les mesures effectuées dans la chambre sont faites en régime harmonique. Or notre étude porte sur l'analyse de la diffraction électromagnétique bidimensionnelle en régime temporel. Pour rester cohérent avec la théorie exposée plus haut, l'alternative choisie a été de faire de la synthèse de

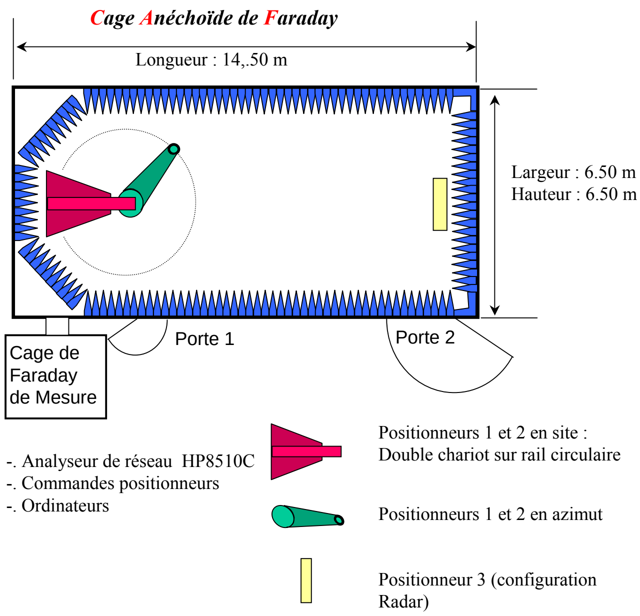


FIG. 2.11 – *Schéma de la chambre anéchoïque, située au CCRM, à Marseille.*

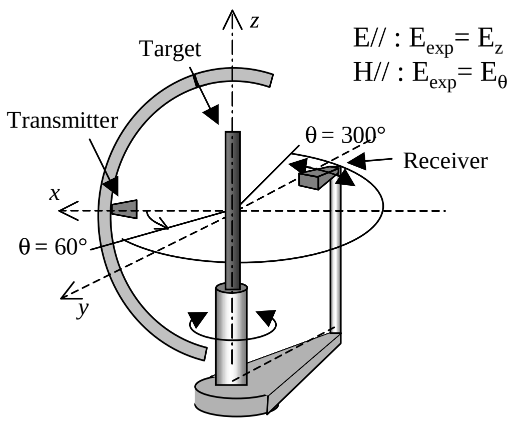


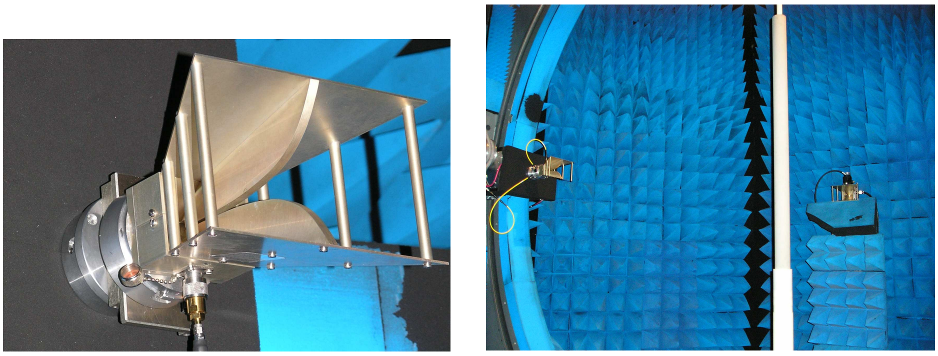
FIG. 2.12 – *Dispositif de mesure pour un problème de diffraction bidimensionnel.*

fréquences. Ainsi, pour chacune des 241 positions du récepteur, nous mesurons pour chaque fréquence choisie dans une gamme définie au préalable, le champ incident et le champ total en module et en phase. Il est à noter que nous sommes limités par l'analyseur de réseau à 792 fréquences. Ensuite, les valeurs mesurées seront pondérées par la forme du spectre du champ incident choisi. Il ne nous restera alors plus qu'à revenir dans le domaine temporel, par transformation de Laplace (ou Fourier) inverse de la forme (2.11).

Avant de comparer les résultats obtenus numériquement et les champs mesurés, nous devons discuter le problème du calibrage des champs qui permet d'adapter l'amplitude et la phase des champs mesurés et simulés.

2.3.4 Calibrage des champs

Dans la manipulation, le champ incident est rayonné par le cornet double-rigide représenté sur la Fig. 2.13-(a). Nous pouvons travailler entre 1 et 18 Ghz.



(a) (b)

FIG. 2.13 – *Photographies de l'intérieur de la chambre anéchoïque. (a) : antenne utilisée. (b) : cette photographie permet de voir l'arche métallique, l'antenne source, l'antenne réceptrice et le diffuseur.*

Pour avoir une idée du rayonnement de l'antenne, nous représentons sur la Fig. 2.14 le module du champ incident mesuré sur les 241 récepteurs pour 792 fréquences réparties entre 1 et 18 GHz. Sur cette figure, le champ incident est normalisé, fréquence par fréquence, par le maximum de signal. En abscisse sont reportées les fréquences, et en ordonnée les positions des récepteurs repérés par l'angle θ défini sur la Fig. 2.12. Ainsi, en suivant une ligne verticale, nous suivons l'évolution à une fréquence donnée du module du champ incident mesuré sur les 241 récepteurs. En suivant une ligne horizontale, nous avons le module du champ électrique incident mesuré sur un récepteur pour les 792 fréquences. Par la suite, nous nommerons abusivement le diagramme de la Fig. 2.14 diagramme de rayonnement de l'antenne.

Au lieu de chercher à modéliser le rayonnement de l'antenne, nous optons pour un modèle en ligne source. Bien que cela puisse paraître surprenant, il a été utilisé avec succès lors de l'inversion des mesures de la base de données [36]. Nous supposons que le champ incident est proportionnel à la fonction de Hankel $H_0^{(2)}$. Cependant, le diagramme de rayonnement la Fig. 2.14 est loin de ressembler au rayonnement d'une ligne source et il ne présente pas les propriétés de symétrie de

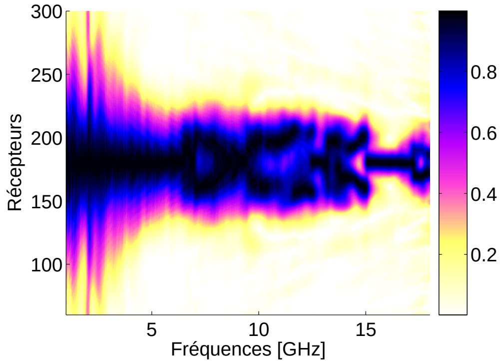


FIG. 2.14 – *«Diagramme de rayonnement» de l'antenne utilisée pour les mesures. Module du champ incident normalisé, mesuré sur tous les récepteurs (en abscisse) et pour les* 792 *fréquences (en ordonnées) comprises entre* 1 *et* 18 *GHz. Le champ es normalisé à chaque fréquence par le maximum de signal à la fréquence considérée.*

$H_0^{(2)}$. Pour y remédier, nous calibrons les champs, ce qui permet de fixer l'origine des phases et d'adapter l'amplitude des signaux. Cela revient à multiplier les champs mesurés (incidents et totaux) par un coefficient complexe fonction de la fréquence $\gamma(\omega)$, de sorte que le champ incident mesuré puis calibré soit égal au champ incident rayonné par le modèle choisi. Ceci ne se fera que par rapport à un seul réceptqeur, et nous choisissons comme point de référence celui situé en face de la source car il correspond normalement au maximum de signal. La fonction γ est alors définie par:

$$\gamma(\omega) = \frac{E_{\mathrm{s}}^{\mathrm{inc}}(\theta = \pi,\omega)}{E_{\mathrm{mes}}^{\mathrm{inc}}(\theta = \pi,\omega)}, \tag{2.15}$$

où $E_{\mathrm{s}}^{\mathrm{inc}}$ et $E_{\mathrm{mes}}^{\mathrm{inc}}$ représentent respectivement les champs incidents simulés et mesurés. L'angle θ est l'angle entre la position de la source et celle du récepteur, comme sur la Fig. 2.12. Nous aurions pu calibrer les champs simulés (au lieu de calibrer les champs mesurés) en les multipliant par $\frac{1}{\gamma}$, mais le problème étant linéaire, cette opération est équivalente à l'alternative choisie.

Nous pouvons faire deux remarques. Tout d'abord, il aurait été préférable de calibrer nos mesures par rapport à un point situé «à l'intérieur» de l'objet. En effet, nous avons opté pour une représentation intégrale des champs, ce qui nécessite de connaître le champ incident à l'intérieur du domaine d'investigation Ω. D'un point de vue pratique, il aurait fallu placer le cornet récepteur à la place de l'objet pour faire la mesure en chambre vide, puis le remettre sur son bras pour faire les mesures en présence du diffuseur. Cela pose alors plusieurs problèmes. Tout d'abord le déplacement du récepteur de son bras à la position du diffuseur est très contraignant et très long à faire. Ensuite, il faut être capable de connaître avec précision la position du récepteur utilisé pour calibrer les champs, ce qui est impossible compte tenu des dimensions du cornet et du diffuseur (l'antenne est beaucoup plus volumineuse que le diffuseur et nous ne connaissons pas son centre de phase). Enfin, en rapprochant le récepteur de la source, nous observerions un couplage entre les deux cornets.

Une autre façon de calibrer serait d'utiliser un diffuseur étalon. Cependant, nous n'avons pas exploré ces deux autres façons de calibrer les champs car celle choisie a donné d'excellents résultats notamment lors des inversions des champs de la base de données de 2001.

La seconde remarque concerne le choix du point de référence. Les mesures sont calibrées par rapport au point situé en face de la source. Le cornet étant sensé être directionnel et donc émettre un champ électrique essentiellement dans une direction, nous nous attendions à avoir le maximum de signal sur ce point-là. En regardant la Fig. 2.14, nous constatons que ce n'est pas le cas pour toutes les fréquences traitées. Ce «diagramme de rayonnement» nous permet de définir six gammes de fréquences. Entre 1 et 7 GHz, l'antenne émet principalement dans la direction $\theta = \pi$ et de manière symétrique. Dans cette gamme de fréquences, le choix du point de référence semble astucieux. Il en est de même entre 8 à 10 GHz et entre 15 et 17 GHz. Ensuite, dans les trois autres bandes de fréquences, soit entre 7 et 8 GHz, entre 10 et 15 GHz et après 17 GHz, il existe deux lobes, et le point par rapport auquel nous calibrons les champs ne correspond plus à un maximum de signal. Pour ces fréquences-là, notre référence pour calibrer les champs est discutable. Cependant, vu la petite taille des diffuseurs que nous utilisons (nous les détaillerons par la suite), le champ mesuré sur le point situé en face de la source représente plutôt bien l'excitation que reçoit le cylindre.

Une fois les champs calibrés, nous pouvons exposer les résultats obtenus et les comparer avec la simulation.

2.3.5 Présentation des résultats expérimentaux

Nous allons présenter ici les résultats qui ont été obtenus à partir de mesures effectuées dans la chambre anéchoïque. Cela se fera en deux parties. Dans un premier temps, nous décrirons les différentes cibles utilisées et nous préciserons le protocole expérimental. Quant à la seconde partie, elle sera consacrée à la présentation proprement dite des résultats. Nous exposerons ici des champs électriques diffractés et non plus des champs électriques totaux.

Mode opératoire et diffuseurs

Le dispositif expérimental ne permet pas de faire directement des mesures de champs diffractés en régime temporel. Le régime temporel sera obtenu par synthèse de fréquences. Les mesures ont été réalisées pour 792 fréquences équiréparties entre 1 et 18 GHz. Le champ électrique harmonique est recueilli tout autour de l'objet, excepté dans la zone d'exclusion due à la présence de l'arche, avec un pas angulaire de 1^o. Le champ diffracté a été obtenu par soustraction entre le champ mesuré sans objet $\mathcal{E}^{\text{inc}}$ (champ incident) et le champ mesuré en présence de l'objet $\mathcal{E}$ (champ total). Ainsi, pour chacun des 241 points, il faut faire deux mesures, pour chacune des 792 fréquences. Ensuite, après les avoir calibrés, il faut pondérer les résultats par la forme du spectre du champ incident choisi, puis en prendre la transformée de Laplace inverse pour obtenir des champs temporels. La source est située à $D_{source-objet} = 1.80$ m de l'objet, et le récepteur se déplace le long d'un arc de cercle ayant pour centre le diffuseur, et dont le rayon varie entre 1.765 et 1.815 m selon les jeux de mesures.

Les deux diffuseurs utilisés qui sont représentés sur la Fig. 2.15. Il s'agit de cylindres de hauteur 1500 mm, de section circulaire, de diamètre 80 mm. Remarquons dès maintenant que la hauteur des diffuseurs est environ 5 fois plus grande que la plus grande longueur d'onde utilisée ($\lambda_{max} \approx 300$ mm), ce qui valide l'approximation bidimensionnelle que nous faisons.

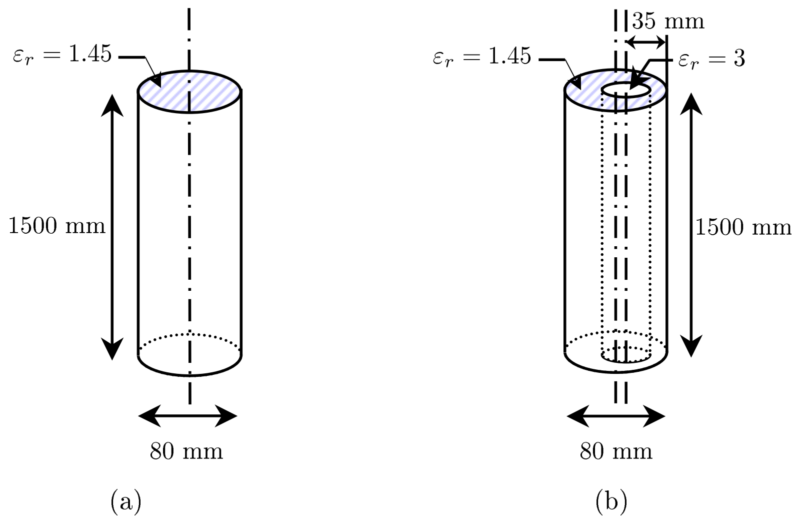


FIG. 2.15 – *Géométrie des diffuseurs utilisés. (a) :* diffuseur homogène. *(b) :* diffuseur inhomogène.

Le premier diffuseur utilisé, décrit sur la Fig. 2.15-(a), est une mousse homogène de permittivité $\varepsilon_r = 1.45$ et de conductivité nulle. Le second, représenté sur la Fig. 2.15-(b), est quant à lui inhomogène et il est constitué de deux cylindres, tous deux homogènes et non conducteurs. Un cylindre en nylon, de rayon 15 mm et de permittivité $\varepsilon_r = 3$, est imbriqué à l'intérieur de la mousse de permittivité $\varepsilon_r = 1.45$. Les centres des deux cylindres sont distants de 5 mm.

Il ne nous reste plus qu'à définir la forme de l'impulsion incidente. Pour des raisons de simplicité, nous choisissons de travailler avec la même impulsion gaussienne que précédemment, soit celle donnée par (2.13). Par contre, cette fois, nous la modulons autourd d'une fréquence f_0 par l'intermédiare d'une fonction sinusoïdale. Elle s'écrit alors :

$$\mathcal{E}_z^{\text{inc}}(x,y,t) = \exp[-16(t - \tau - \frac{x}{c_0})^2/\tau^2].\sin(2\pi f_0 t). \tag{2.16}$$

Nous choisissons différentes valeurs de f_0 et de τ, afin d'avoir soit un spectre très large bande, et ainsi tenir compte d'un grand nombre de fréquences, soit un spectre dont le support est plus étroit, afin de sélectionner des gammes de fréquences particulières, compte tenu des remarques faites sur le rayonnement de l'antenne.

Comparaisons mesures-simulations

Pour commencer, nous travaillons avec le diffuseur homogène et choisissons une impulsion large bande, centrée en $f_0 = 8.5$ GHz avec $\tau = 0.5$ ns et nous considérons les 792 fréquences. La distance $objet - récepteurs$ est ici égale à 1.815 m. Les champs diffractés mesurés et calculés sont comparés sur les 241 récepteurs, mais nous ne présentons ici que les résultats obtenus en trois points particuliers. En effet, nous nous intéressons particulièrement aux points situés à $\theta = \pi$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, et $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Le premier point est choisi car il correspond au point de référence pour le calibrage des champs. Sur les deux autres, nous vérifirons certaines symétries, et que, même en des récepteurs éloignés du point de référence, le modèle du champ incident en $H_0^{(2)}$ donne de bons résultats. Les résultats sont reportés sur la Fig. 2.16.

Qualitativement, la simulation et la mesure se superposent. Nous pouvons ensuite remarquer que la correspondance est plus marquée sur le point situé en face de la source. Cela est dû au fait que ce point est celui qui sert de référence pour calibrer les champs. Avec ces résultats, nous vérifions, dans un premier temps, la symétrie par rapport à l'axe défini par $\theta = \pi$ du problème. En effet, les graphiques Fig. 2.16-(a) et Fig. 2.16-(b), qui représentent les champs diffractés mesurés et simulés aux points situés à $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$ semblent être identiques. Pour quantifier l'écart entre les grandeurs issues de la mesure et de la simulation, nous calculons l'erreur quadratique $err_t(\mathbf{r}_j \in \Gamma)$ sur le récepteur j définie par :

$$err_t(\mathbf{r}_j \in \Gamma) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{E}_{\text{mes}}(\mathbf{r}_j \in \Gamma,t) - \mathcal{E}_{\text{simu}}(\mathbf{r}_j \in \Gamma,t))^2 \, \mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_{\text{simu}}^2(\mathbf{r}_j \in \Gamma,t) \, \mathrm{d}t}, \tag{2.17}$$

où $\mathcal{E}_{\text{mes}}$, et $\mathcal{E}_{\text{simu}}$ représentent respectivement les champs diffractés temporels mesurés et simulés.

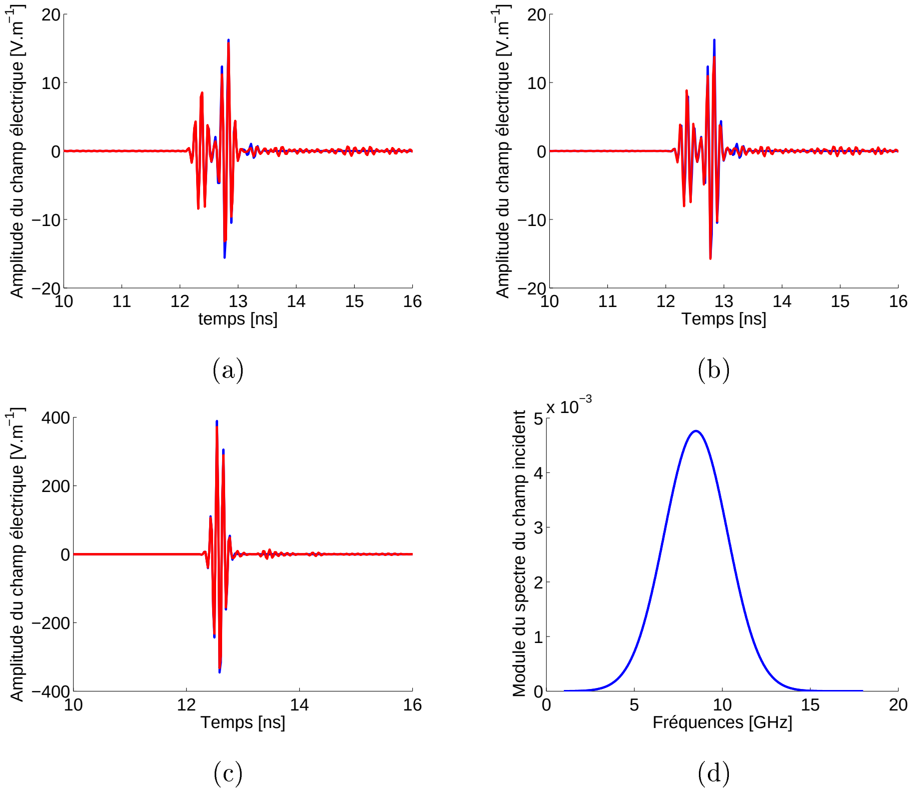


FIG. 2.16 – *Résultats de la comparaison entre les mesures et la simulation, pour une impulsion centrée en* 8.5 *GHz avec* $\tau = 0.5$ *ns.* Diffuseur homogène. *En rouge : champs mesurés. En bleu : champs simulés. (a) :* $\theta = \frac{\pi}{2}$. *(b) :* $\theta = \frac{3\pi}{2}$. *(c) :* $\theta = \pi$. *(d) : spectre du champ incident.*

Nous reportons en bleu sur la Fig. 2.17 err_t ainsi définie pour l'impulsion large bande.

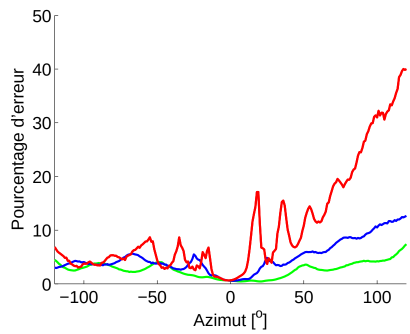


FIG. 2.17 – *Erreur quadratique commise entre la mesure et la simulation, normalisée, pour différentes impulsions pour le* diffuseur homogène. *En bleu : impulsion large bande. En vert : impulsion centrée en* $f_0 = 4.5$ *GHz. En rouge : impulsion centrée en* $f_0 = 12$ *GHz . .*

Nous vérifions bien que l'erreur est minimale pour le récepteur en face de la source. Ce résultat était prévisible, car ce point est utilisé pour le calibration des champs. Cependant, elle reste acceptable quelque soit le récepteur. Par contre, err_t n'est pas symétrique par rapport à l'azimut 0^o (qui correspond au point en face de la source). Or les résultats obtenus devraient présenter les mêmes symétries que le problème étudié. Une interprétation possible peut être que le champ rayonné par notre antenne n'est pas symétrique comme la Fig. 2.14 l'indiquait. De plus, en regardant la Fig. 2.18, qui présente le module du champ incident en décibels mesuré en fonction de la fréquence aux points d'observation situés en $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ et $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$, nous vérifions que le rayonnement de cette antenne n'est pas symétrique. Ainsi, ce dissymétrie du champ rayonné par le cornet brise la symétrie du problème. De plus, il n'est pas certain que la mousse soit exactement positionnée au centre du repère.

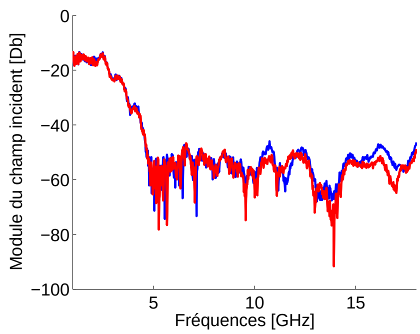


FIG. 2.18 – *Module en décibels du champ incident harmonique mesuré en fonction de la fréquence pour deux récepteurs. En bleu : $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. En rouge : $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$.*

L'analyse dans le domaine temporel nous permet de prévoir à partir de quels instants le signal doit être non nul. Si l'on considère le problème d'un point de vue «optique géométrique», nous sommes en mesure de déterminer l'instant auquel le champ diffracté doit arriver sur le récepteur. Dans la chambre anéchoïque, l'onde électromagnétique se déplace à la vitesse c_0. Avant d'arriver sur le récepteur, elle doit passer par l'objet pour être considérée comme champ diffracté. En effet, la contribution directe $source - récepteur$ est éliminée lors de la soustraction entre les champs sans objet et les champs totaux ($\mathcal{E}^{\mathrm{d}} \overset{déf}{=} \mathcal{E} - \mathcal{E}^{\mathrm{inc}}$). Ainsi, la distance D qui nous intéresse est la même quelque soit le récepteur, et vaut $D_{source-objet} + D_{objet-récepteur}$, soit $D = 3.615$ m. Pour parcourir une telle distance, l'onde va mettre environ 12 ns. Nous le vérifions sur les graphiques de la Fig. 2.16 : pour t plus petit que 12 ns, le signal sur les récepteurs est nul.

Ensuite, nous changeons la fréquence centrale f_0, ainsi que la durée τ de l'impulsion, afin de sélectionner des gammes de fréquences particulières. La Fig. 2.19 et la Fig. 2.20 présentent les résultats des comparaisons entre la mesure et la simulation aux mêmes points que précédemment, pour une durée d'impulsion $\tau = 0.83$ ns, et pour des fréquences centrales valant respectivement $f_0 = 4.5$ GHz, et $f_0 = 12$ GHz. Pour ces deux exemples, nous utilisons aussi les 792 fréquences.

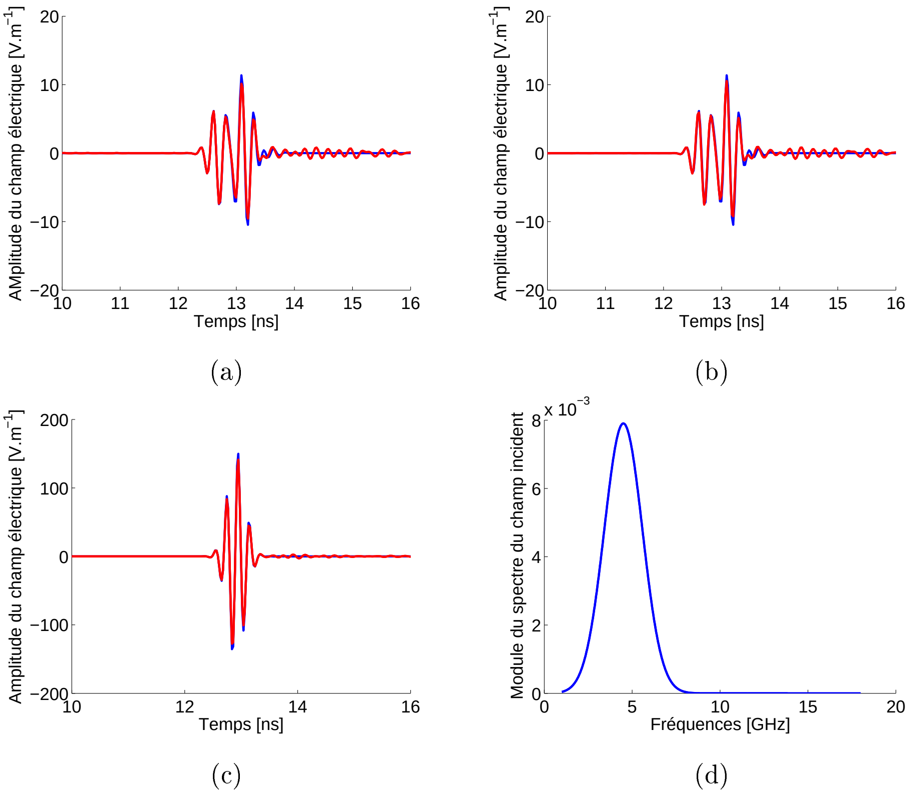


FIG. 2.19 – *Résultats de la comparaison entre les mesures et la simulation, pour une impulsion centrée en* 4.5 *GHz avec* $\tau = 0.83$ *ns.* Diffuseur homogène. *En rouge : champs mesurés. En bleu : champs simulés. (a) :* $\theta = \frac{\pi}{2}$. *(b) :* $\theta = \frac{3\pi}{2}$. *(c) :* $\theta = \pi$. *(d) : spectre du champ incident.*

D'un point de vue qualitatif, ces résultats sont très encourageants, ce qui est moins évident en regardant l'erreur quadratique err_t reportée sur la Fig. 2.17. Nous vérifions que l'erreur est là encore minimale pour le point situé en face de la source, et que les signaux ne sont pas symétriques. Pour les autres récepteurs, l'impulsion centrée sur $f_0 = 4.5$ GHz (courbe verte) donne de très bons résultats, alors que l'impulsion centrée sur une plus haute fréquence $f_0 = 12$ GHz (courbe rouge) ne donne des résultats acceptables qu'autour de l'azimut 0°. Ceci s'explique par le fait qu'il est plus difficile de mesurer avec précision des champs électromagnétiques à hautes fréquences. De plus, il est possible que les centres de phase des antennes varient en fonction de la fréquence. Une étude sur ce sujet est actuellement en cours au laboratoire [51].

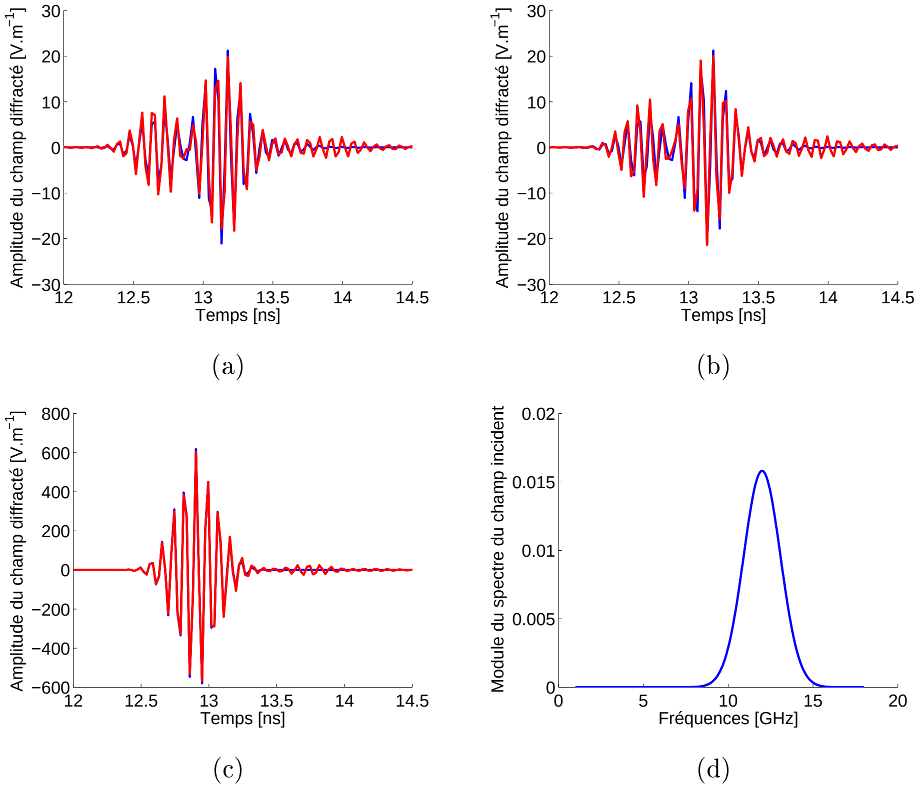


FIG. 2.20 – *Résultats de la comparaison entre les mesures et la simulation, pour une impulsion centrée en* 12 *GHz avec* $\tau = 0.83$ *ns.* Diffuseur homogène. *En rouge : champs mesurés. En bleu : champs simulés. (a) :* $\theta = \frac{\pi}{2}$*. (b) :* $\theta = \frac{3\pi}{2}$*. (c) :* $\theta = \pi$*. (d) : spectre du champ incident.*

Après avoir exploité les mesures sur le diffuseur homogène, intéressons-nous au second objet, cette fois-ci inhomogène. Compte tenu de ce que nous avons dit précédemment, nous nous limitons aux deux impulsions qui donnaient des erreurs acceptables, l'impulsion large bande, et celle centrée en 4.5 GHz. Cette fois-ci, la distance $objet - récepteurs$ est de 1.765 m. Les résultats sont reportés sur la Fig. 2.21 et la Fig. 2.22.

La correspondance est moins évidente, excepté sur le point situé en face de la source, et ce pour des raisons liées au calibrage des champs. Comme précédemment le signal est nul pour tous les instants inférieurs à 12 ns. Les champs en $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$ semblent décalés d'un ou plusieurs pas de temps. Nous pouvons proposer une explication, liée à la géométrie du diffuseur. Nous supposons connue la position du centre de la mousse, ce qui n'est déjà pas certain. Par contre, celle du centre du diffuseur en nylon est une source d'erreur importante. Nous mesurons un angle d'environ 22° entre la direction $\theta = \pi$ et le centre du diffuseur en nylon. Aux fréquences utilisées, un décalage de

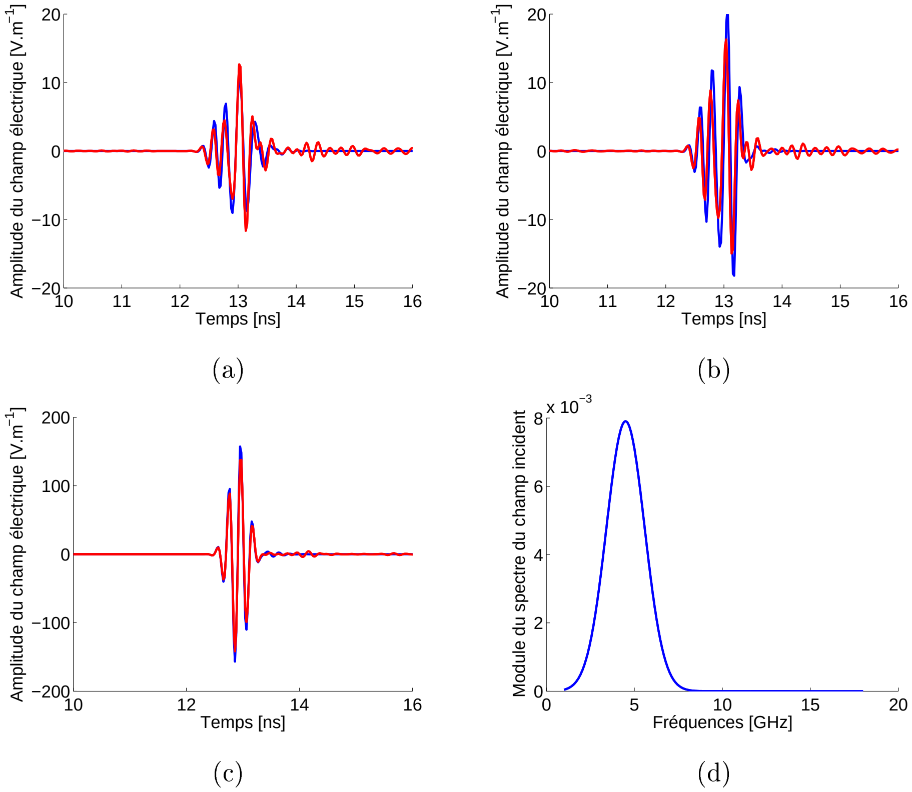


FIG. 2.21 – *Résultats de la comparaison entre les mesures et la simulation, pour une impulsion centrée en* 4.5 *GHz avec* $\tau = 0.83$ *ns.* Diffuseur inhomogène. *En rouge : champs mesurés. En bleu : champs simulés. (a) :* $\theta = \frac{\pi}{2}$*. (b) :* $\theta = \frac{3\pi}{2}$*. (c) :* $\theta = \pi$*. (d) : spectre du champ incident.*

quelques millimètres n'est pas négligeable devant les longueurs d'ondes. Pour quantifier les écarts commis entre la mesure et la simulation, regardons la Fig. 2.23, sur laquelle est représentée l'erreur quadratique (2.17) pour les deux impulsions incidentes.

Nous vérifions alors que l'erreur est acceptable au voisinage de la direction $\theta = \pi$, et qu'elle augmente de manière considérable lorsque l'on regarde les champs près de la source.

Nous venons de présenter dans cette partie une comparaison entre les champs électriques mesurés dans la chambre anéchoïque et les champs électriques simulés à l'aide du code de calcul. Nous avons proposé une alternative aux problèmes de modélisation du rayonnement du cornet en calibrant tous les champs mesurés. Nous avons ensuite exposé les résultats qui sont très encourageants, et qui donnent une seconde validation du code de calcul. Regardons maintenant les résultats obtenus dans la configuration «objets enfouis».

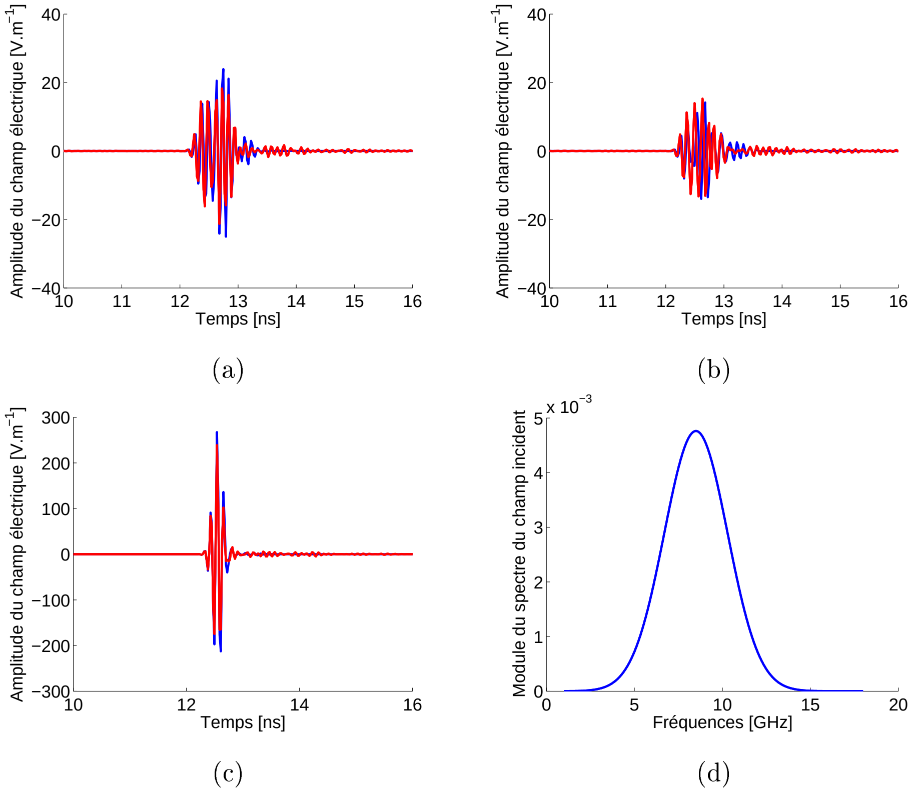


FIG. 2.22 – *Résultats de la comparaison entre les mesures et la simulation, pour une impulsion centrée en* 8.8 *GHz avec* $\tau = 0.5$ *ns.* Diffuseur inhomogène. *En rouge : champs mesurés. En bleu : champs simulés. (a) :* $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. *(b) :* $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$. *(c) :* $\theta = \pi$. *(d) : spectre du champ incident.*

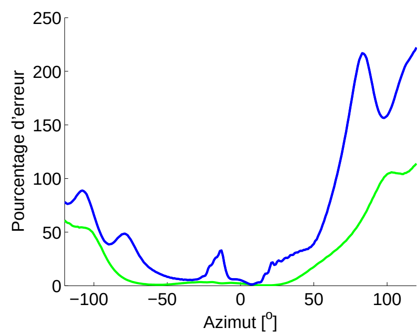


FIG. 2.23 – *Erreur quadratique commise entre la mesure et la simulation pour différentes impulsions.* Diffuseur inhomogène. *En bleu : impulsion large bande. En rouge : impulsion centrée en* $f_0 = 4.5$ *GHz.*

2.4 Résultats en configuration «objets enfouis»

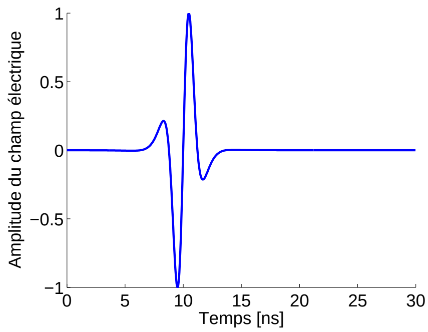
Après avoir décrit les diffuseurs utilisés, et précisé les différentes grandeurs électromagnétiques et géométriques, nous chercherons une validation du code de calcul en comparant nos résultats avec ceux donnés par d'autres algorithmes existant au laboratoire.

2.4.1 Champ incident et géométrie

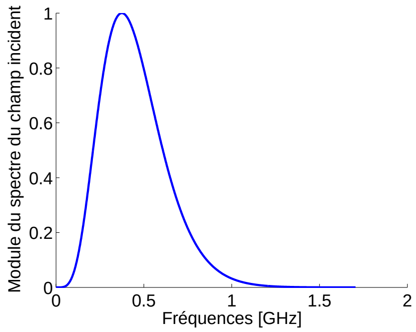
Commençons par définir la forme d'impulsion incidente. Nous avons choisi d'utiliser le champ incident de [10], dont le spectre est donné par :

$$S_E(f) = \frac{-256i\pi}{3}\left(\frac{f}{f_0}\right)^5 \exp(-4f/f_0). \tag{2.18}$$

La forme de l'impulsion et son spectre sont représentés sur la Fig. 2.24, où $f_0 = 300$ MHz. Ces deux grandeurs sont normalisées. Pour la suite, nous nous laissons la possibilité de modifier la valeur de f_0, selon le type de diffuseur, sa profondeur, les caractéristiques du milieu ambiant ...



(a)



(b)

FIG. 2.24 – *Forme de l'impulsion définie par (2.18), pour $f_0 = 300$ MHz. (a) : champ incident normalisé. (b) : module du spectre du champ incident normalisé.*

Fixons maintenant les paramètres géométriques et électromagnétiques. Dans les exemples exposés ici, le milieu supérieur est le vide, et sa permittivité ε vaut ε_0. Il s'agit bien évidemment d'un milieu sans pertes. Le milieu inférieur a une permittivité $\varepsilon_{r2} = 3$, ce qui modélise un sol sec. Il est lui aussi sans pertes. Avec cette configuration «objets enfouis», nous ne pouvons pas mesurer le champ diffracté tout autour de l'objet. Ainsi, il est calculé sur une ligne de mesure horizontale située au-dessus de l'interface. Les cylindres utilisés sont tous de section circulaire. Nous utilisons trois géométries représentées sur la Fig. 2.25.

Nous considérons la Fig. 2.25-(a), où un cylindre diélectrique, de section circulaire, de rayon 10 cm et de permittivité $\varepsilon_r = 2$, est enfoui à 1 m sous l'interface. La ligne de mesure de 3 m de longueur, supportant les 17 récepteurs, est placée à 50 cm au-dessus de l'interface. Le centre de la ligne de mesure est situé au-dessus du centre du diffuseur. La source est localisée à l'extrême

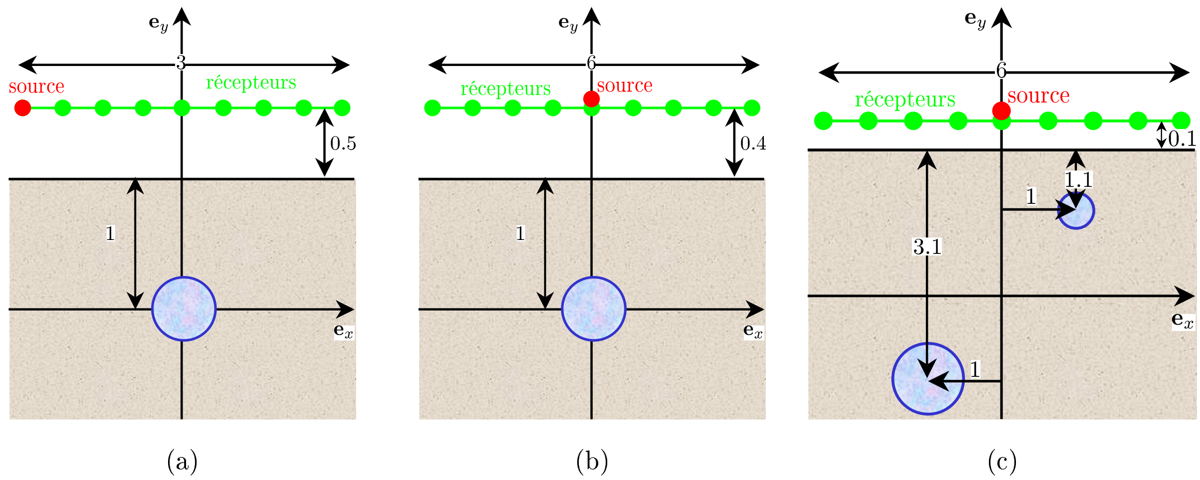


FIG. 2.25 – *Différentes géométries utilisées dans la configuration «objets enfouis».*

gauche de Γ. Bien que le champ diffracté soit calculé sur toute la ligne de mesure, nous nous contenterons de regarder le champ diffracté sur le récepteur situé à l'extrême droite de Γ. Nous utilisons l'impulsion décrite par (2.18), avec une fréquence f_0 égale à 300 MHz. Ce cas simple nous permet de comparer nos résultats avec ceux obtenus avec un autre algorithme (STACK) [54], que nous ne détaillerons pas ici. Bien que STACK soit une méthode approchée, elle a été validée par le passé et c'est pour cela que nous l'avons choisie comme référence.

Puis, nous nous plaçons dans la configuration de la Fig. 2.25-(b). Nous remplaçons le diffuseur par un cylindre de même rayon mais conducteur de conductivité $\sigma = 40$ S.m^{-1}. À la fréquence centrale $f_0 = 300$ MHz, l'épaisseur de peau de la cible vaut environ 4 cm, ce qui est faible devant la longueur d'onde à cette fréquence (≈ 57 cm). La source est placée à 1 cm au dessus du centre de la ligne de mesure que nous étendons à 6 m et que nous rapprochons à 40 cm au dessus de l'interface. Le champ diffracté a été calculé en 17 récepteurs équirépartis sur Γ. Le spectre du champ incident est de la forme (2.18).

Ensuite, nous utilisons la même géométrie que celle de la Fig. 2.25-(b), avec le même champ incident, avec le même cylindre, à la différence près qu'il n'était plus conducteur, mais diélectrique, de permittivité relative $\varepsilon_r = 6$.

Enfin, nous considérons deux objets de conductivités $\sigma = 40$ S.m^{-1}, et de permittivité relative $\varepsilon_r = 3$, comme décrit sur la Fig. 2.25-(c). Une ligne de mesure de 6 m de long sur laquelle 17 récepteurs sont équirépartis, est placée à 10 cm au-dessus de l'interface, séparant les deux milieux comme le montre la Fig. 2.25-(c). La source est placée 1 cm au-dessus du centre de ligne de mesure. Le plus grand des deux cylindres (rayon 10 cm) est enfoui à 3.1 m sous l'interface et 1 m à gauche de la source. Quant au plus petit (rayon 5 cm), il est placé à 1.1 m sous l'interface et 1 m à droite de la source. Le spectre du champ incident est donné par (2.18), avec $f_0 = 300$ MHz. Cette configuration devrait nous permettre de séparer les contributions de chacun des diffuseurs.

Les diffuseurs et le champ incident étant décrits, nous pouvons maintenant présenter les résultats obtenus par les calculs.

Pour commencer, et pour valider le code de calcul, nous comparons nos résultats avec ceux obtenus par un autre algorithme. Nous nous plaçons alors dans la configuration de la Fig. 2.25-(a). Avec une configuration «objets enfouis», nous nous attendons à observer trois contributions pour le champ total. La plus importante en amplitude, et celle qui doit arriver en premier sur le récepteur, correspond à la propagation directe entre la source et le récepteur. Il s'agit du terme G^{11}_{hom} de la fonction de Green G^{11}_{R} (1.37). Ensuite, nous observerons l'écho de l'interface, qui provient du terme G^{11}_{inter}, puis la réponse du diffuseur. Avec le choix des distances et des indices des milieux, que nous avons effectué, nous ne pouvons pas séparer dans le temps la propagation directe, et celle qui rebondi sur l'interface. Nous ne représenterons que la contribution de l'interface, et celle de l'objet, qui sont séparées. En utilisant une théorie des rayons d'optique géométrique, nous pouvons prévoir que l'écho de l'interface arrivera à 10 ns, et que le champ diffracté par l'objet sera sur le récepteur aux alentours de 20 ns. La Fig. 2.26, sur laquelle nous représentons les contributions de l'interface et de l'objet, pour les deux algorithmes utilisés, calculées sur le récepteur le plus à droite, nous permet de vérifier que l'écho de l'interface et le champ diffracté sont séparés dans le temps. Le premier signal correspond à la réponse de l'interface, et le second à celle de l'objet. Les instants auxquels ils arrivent sur le récepteur correspondent à ceux annoncés. De plus, les deux courbes se superposent parfaitement, ce qui permet de valider le code de calcul.

Nous nous plaçons ensuite dans la configuration de la Fig. 2.25-(b). Nous ne représenterons que le champ électrique reçu sur le dernier récepteur situé à l'extrême droite de la ligne de mesure Γ.

La Fig. 2.27 représente le champ électrique (contribution de l'interface et du diffuseur) reçu sur le récepteur situé à l'extrême droite de Γ en fonction du temps, pour le diffuseur de conductivité $\sigma = 40$ S.m^{-1}. L'évolution dans le temps de la contribution de l'interface et du champ diffracté se ressemblent énormément. Nous observons que le niveau de signal beaucoup plus bas pour le champ diffracté. Une étude au sens de l'optique géométrique, ou sur la causalité des signaux, nous permet de déterminer l'instant auquel le signal doit arriver sur le récepteur. En ce qui concerne l'écho de l'interface, il suffit de calculer le temps nécessaire à l'onde électromagnétique pour partir

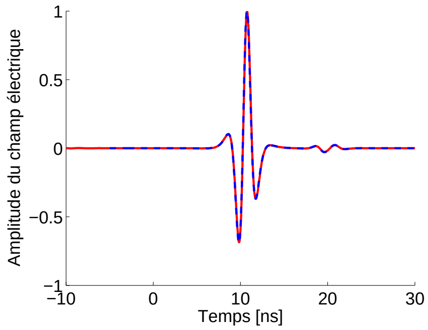


FIG. 2.26 – *Champ électrique observé sur le récepteur à l'extrême droite de la ligne de mesure dans la configuration de la Fig. 2.25-(a). Seules les contributions de l'interface et de l'objet sont représentées. En rouge : résultat obtenu à partir de notre code de calcul. En bleu : résultat obtenu avec STACK. Les champs ont été normalisés.*

de la source, rebondir sur l'interface et arriver sur le récepteur. Cela doit se faire en environ 10 ns. Pour ce qui est du champ diffracté, il faut tenir compte des différentes vitesses de propagation dans les différents milieux. Nous trouvons environ 23 ns. La Fig. 2.27 nous montre donc que tous nos résultats sont en accord avec la prédiction de l'optique géométrique.

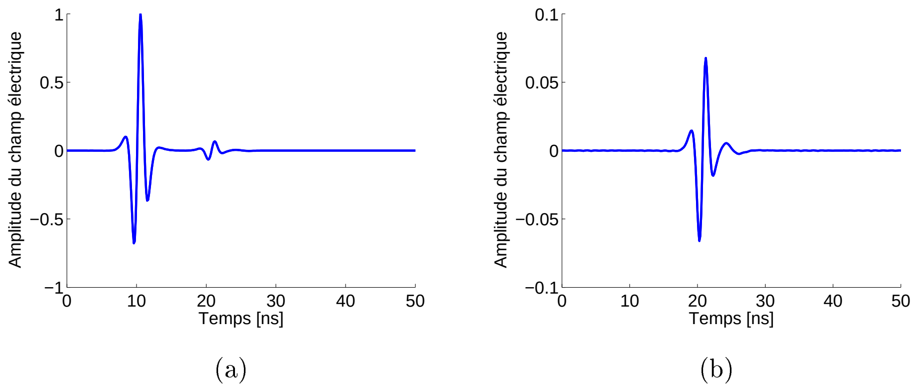
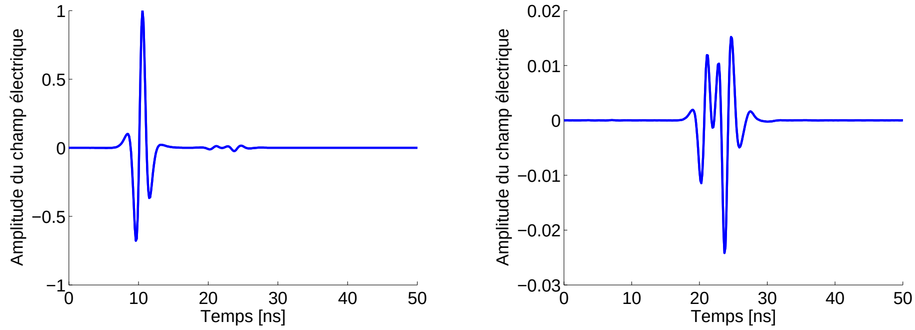


FIG. 2.27 – *Évolution du champ électrique calculé sur le récepteur situé à l'extrême droite de* Γ *en fonction du temps pour le diffuseur de conductivité* $\sigma = 40\ S.m^{-1}$ *dans la configuration de la Fig. 2.25-(b). (a) : contribution de l'interface et du diffuseur. (b) : contribution du diffuseur. Le champ est normalisé par le maximum de signal.*

Regardons maintenant ce qui se passe pour le diffuseur non conducteur. La Fig. 2.28 représente le champ électrique (contribution de l'interface et du diffuseur) reçu sur le récepteur situé à l'extrême droite de Γ en fonction du temps. Nous constatons que la réponse du diffuseur est beaucoup plus perturbée. Cette fois-ci le champ électrique ne fait pas que rebondir sur la frontière du diffuseur, mais il traverse l'objet, et nous pouvons observer plusieurs rebonds entre la face supérieure et la face inférieure. Comme précédemment, l'écho de l'interface doit arriver à $t = 10$ ns, et le champ diffracté à $t = 23$ ns, et c'est ce que nous vérifions.



(a) (b)

FIG. 2.28 – *Évolution du champ électrique calculé sur le récepteur situé à l'extrême droite de Γ en fonction du temps pour le diffuseur non conducteur dans la configuration de la Fig. 2.25-(b). (a) : contribution de l'interface et du diffuseur. (b) : contribution du diffuseur. Le champ est normalisé par le maximum de signal.*

Regardons maintenant le champ diffracté par deux objets de la configuration de la Fig. 2.25-(c). Le résultat est exposé dans la Fig. 2.29, sur laquelle nous représentons le champ diffracté par les deux cylindres en fonction du temps sur le récepteur situé à l'extrême droite de Γ. Comme nous l'avons prévu, les contributions des deux diffuseurs sont parfaitement séparables. Les deux diffuseurs étant loin l'un de l'autre, nous n'observons pas de couplage entre eux. De plus, pour ce récepteur, le premier écho correspond au champ diffracté par le diffuseur enfoui le moins profondément, et le second écho est la réponse de l'autre cylindre. Le petit objet étant plus près du récepteur, il est donc attendu que ce soit sa contribution qui arrive en premier.

2.5 Conclusion

Dans toute cette partie, nous avons proposé une méthode de résolution d'un problème direct de diffraction électromagnétique en régime transitoire pour les deux configurations d'intérêt pratique. La résolution du problème direct ne s'est pas faite directement dans le domaine temporel, mais par un passage dans le domaine fréquentiel.

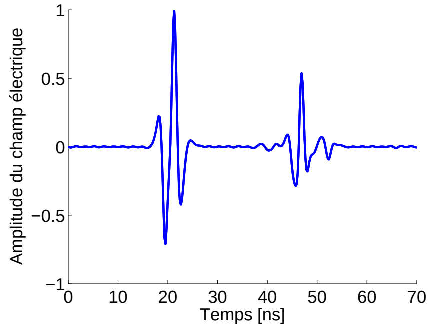


FIG. 2.29 – *Évolution du champ électrique calculé sur le récepteur situé à l'extrême droite de* Γ *en fonction du temps pour les diffuseurs de la configuration de la Fig. 2.25-(c). Le champ est normalisé par le maximum de signal.*

La méthode de résolution de l'équation intégrale est basée sur deux idées originales. Tout d'abord, le pas de discrétisation d du domaine $\mathcal{D}$ est choisi indépendamment de la fréquence, ce qui nous conduit à une erreur relative qui varie en $\mathcal{O}(d^2 \ln(d))$ [4]. Il est choisi de sorte que les basses fréquences soient sur-échantillonnées, et que les hautes fréquences soient sous-échantillonnées. L'erreur commise à hautes fréquences sera alors compensée par une décroissance du spectre du champ incident.

Ensuite, nous avons choisi de résoudre pour chaque fréquence de manière itérative le système d'équations, à l'aide de la méthode du gradient conjugué. Le choix de l'estimation initiale n'est pas classique. Pour chaque fréquence $s_n = \beta + i\omega_n$, nous utilisons une combinaison linéaire des résultats obtenus aux fréquences inférieures s_{n-k}, et non pas le champ incident comme cela se fait habituellement.

Ensuite, en «espace homogène», nous nous sommes efforcés de retrouver les résultats de [4], afin d'obtenir une première validation de notre code de calcul. Puis, une étude paramétrique nous a permis de déterminer la valeur de plusieurs paramètres pour pouvoir minimiser le temps de calcul. Pour en terminer avec la résolution du problème direct en «espace homogène», nous avons confronté nos résultats avec des champs électromagnétiques mesurés dans la chambre anéchoïque dont dispose le laboratoire. Cette étude comparative a permis de valider une seconde fois l'algorithme et de nous confronter avec le monde expérimental, et les problèmes qui lui sont liés.

Concernant la configuration «objets enfouis», nous avons d'abord comparé nos données avec celles obtenues par un autre code (STACK). Bien qu'étant une méthode approchée, les résultats de

STACK, qui ont été au préalable validés par des méthodes de type éléments finis dont dispose le laboratoire, nous ont permis de valider notre algorithme. L'institut Fresnel ne disposant pas encore du matériel requis pour faire des mesures dans la configuration «objets enfouis», nous nous sommes tournés vers le département de Information Technology (I.N.T.E.C.) de l'Université de Gand, Belgique. Une collaboration a pu débuter dans le cadre de l'action intégrée européenne Tournesol. Le professeur Ann Franchois a mis au point un dispositif bistatique planaire qui a pour but de mener des expériences d'imagerie, par exemple pour le contrôle non destructif du béton armé [55]. Malheureusement, nous n'avons pas eu, pour le moment, le temps d'échanger des mesures convenables pour diverses raisons techniques.

Maintenant que le problème direct est résolu en régime harmonique et transitoire pour les deux configurations d'étude, il est temps de nous intéresser à la résolution des problèmes de diffraction inverse en électromagnétique.

Problèmes inverses

Chapitre 3

Description des algorithmes

Sommaire

3.1 Introduction

Le but des problèmes inverses est de déterminer la distribution du contraste $\chi(\mathbf{r})$ dans un domaine de recherche Ω de sorte que le champ diffracté par le contraste reconstruit corresponde au champ diffracté mesuré $E^{\mathrm{d;mes}}$ pour des champs harmoniques et $\mathcal{E}^{\mathrm{d;mes}}$ pour des champs transitoires. Plusieurs méthodes itératives ont été développées au cours de ces dernières années. Dans celles-ci, le paramètre d'intérêt (ici la permittivité complexe) est ajusté pas à pas, à partir d'une estimation initiale, en minimisant une fonction coût qui représente la différence entre le champ diffracté E^{d} (ou $\mathcal{E}^{\mathrm{d}}$) calculé avec la meilleure estimation du paramètre et le champ diffracté mesuré $E^{\mathrm{d;mes}}$ (ou $\mathcal{E}^{\mathrm{d;mes}}$).

Comme nous l'avons dit dans l'introduction de ce manuscrit, les problèmes inverses sont, en général, non linéaires. Pour les résoudre, nous trouvons dans la littérature consacrée aux méthodes itératives essentiellement deux types d'approches. Dans la première catégorie, le problème inverse est linéarisé en considérant le champ électrique à l'intérieur du domaine de recherche comme fixe à chaque itérée. Il est déterminé en résolvant, à chaque itérée, le problème direct associé à l'estimation du contraste de permittivité obtenue à l'itérée précédente. Pour cela, nous pouvons utiliser par exemple l'approximation de Born, l'approximation de Rytov, ou l'approximation de Born étendue [20, 21, 22]. La Distorted Wave Born [17] et la méthode de Newton-Kantorovich [14], qui sont deux méthodes équivalentes [19], entrent aussi dans cette classe de méthodes linéarisées.

Une autre façon de faire est de considérer le champ électrique comme une inconnue que l'on détermine en même temps que le contraste dans la procédure de minimisation. La Modified Gradient Method [23, 24], que nous détaillerons par la suite, fait partie de cette catégorie de méthodes non linéarisées.

Des méthodes hybrides, qui combinent les idées des précédentes approches, ont alors été étudiées dans [28].

Pour améliorer l'efficacité des différents algorithmes, il est parfois utile d'incorporer de l'information *a priori*. Nous pouvons par exemple rechercher des objets binaires [32], ou alors imposer une contrainte de positivité sur la susceptibilité électrique et la conductivité, ou même sur le contraste [37]. Il est aussi possible de mettre en œuvre une procédure de régularisation [29, 27, 30, 31].

Dans ce chapitre, nous allons présenter les différents algorithmes que nous avons développés. Il en existe bien évidemment d'autres, tels que le Level Set [33] et la Contrast Source Inversion [25, 26]. Dans un premier temps, après avoir posé le problème, nous décrirons les principes de bases des algorithmes d'inversion que nous avons développés et utilisés. Ensuite, nous suggérerons trois différentes façons d'augmenter le pouvoir de résolution.

3.2 Description du problème

Avant de présenter les algorithmes d'inversion proprement dit, nous devons dans un premier temps poser le problème étudié. Le formalisme présenté dans cette partie est indépendant de la configuration étudiée : l'objet inconnu pourra être présent soit dans un espace homogène et infini, comme décrit sur la Fig. 1.1, soit enfoui dans un demi-espace séparé du milieu supérieur par une interface plane, comme décrit sur la Fig. 1.4. Pour passer d'une configurtion à l'autre, il suffit d'utiliser les fonctions de Green associées, pour la configuration «espace homogène» (1.5), et pour la configuration «objets enfouis» (1.31) et (1.32). Dans cette partie, nous noterons $\varepsilon_b = \varepsilon_{rb}\varepsilon_0$ la permittivité du milieu dans lequel se trouve le diffuseur.

Pour poser les bases des différentes méthodes d'inversion que nous développerons par la suite, nous supposons que l'objet est éclairé par un champ électromagnétique harmonique à la fréquence f. Le champ diffracté sera alors mesuré en N récepteurs situés sur une ligne Γ. Nous envisagerons deux possibilités pour la forme de la ligne de mesure, en fonction de la configuration étudiée. Pour la configuration «espace homogène», Γ sera un cercle entourant le diffuseur, et nous parlerons de données complètes. Dans le cas de la configuration «objets enfouis», puisqu'il est impossible de tourner autour du diffuseur, Γ sera une ligne horizontale placée au-dessus de l'interface. Nous parlerons alors de données limitées en aspect. Une configuration en puits de forage est aussi possible, mais nous ne l'avons pas étudiée dans ce manuscrit. Comme pour le problème direct, nous nous limiterons au cas de polarisation $E_{//}$.

Dans le cas de la configuration «objets enfouis», il est important de rappeler ce que nous appelons champ incident et champ diffracté. Le champ incident correspond au champ que l'on observerait sans diffuseur. Ainsi, pour cette configuration, il comprendra donc la propagation directe entre la source et le récepteur, ainsi que la réflexion sur l'interface. Le champ diffracté correspond alors à la seule réponse des diffuseurs. Nous devons donc être capable, lors de l'utilisation de champs mesurés, de séparer les différentes contributions. Une possibilité consiste à utiliser une impulsion temporelle et ensuite filtrer dans le temps la contribution de l'interface et celle de la cible. Cela suppose que la cible est enfouie à une distance relativement importante.

Comme nous l'avons vu dans la première partie de ce manuscrit, le problème de diffraction peut s'écrire sous la forme d'un système d'équations couplées (1.8) et (1.9) que nous rappelons ici. L'équation de couplage (3.1) permet de calculer le champ total à l'intérieur du domaine Ω, et l'équation d'observation (3.2) relie le champ diffracté sur un récepteur au champ dans le domaine test.

$$E(\mathbf{r} \in \Omega) = E^{\mathrm{inc}}(\mathbf{r}) + k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\mathbf{r}')E(\mathbf{r}')G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathrm{d}\mathbf{r}'. \tag{3.1}$$

$$E^{\mathrm{d}}(\mathbf{r} \in \Gamma) = k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\mathbf{r}')E(\mathbf{r}')K(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathrm{d}\mathbf{r}'. \tag{3.2}$$

Dans ces deux équations, χ représente le contraste de permittivité relative et G et K les fonctions de Green associées à la configuration étudiée. Le scalaire k_0 correspond au nombre d'onde dans le vide. Dans un souci de simplicité, nous opterons, dans la suite de ce manuscrit, pour une notation sous forme d'opérateur. Ainsi, les équations (3.1) et (3.2) s'écrirons :

$$E = E^{\mathrm{inc}} + \mathbf{G}\chi E, \tag{3.3}$$

$$E^{\mathrm{d}} = \mathbf{K}\chi E. \tag{3.4}$$

Pour effectuer ces opérations de convolution et de convolution-corrélation, nous utilisons bien évidemment les techniques développées dans le premier chapitre de ce manuscrit sur le calcul des opérateurs. Les produits de convolution et/ou corrélation seront évalués à l'aide d'algorithmes de T.F.R.. Ceci permettra de limiter le temps de calcul.

Les notations étant définies, nous pouvons maintenant présenter les algorithmes d'inversion proprement dits.

3.3 Les différents algorithmes

Nous allons maintenant présenter les différents algorithmes que nous avons utilisés et modifiés au cours de nos travaux de thèse. Nous nous sommes appuyés sur les travaux présentés dans [28], en ne considérant dans un premier temps qu'une seule source et qu'une seule fréquence. Ces différentes méthodes ont en commun la détermination du contraste χ, et diffèrent par la manière de calculer le champ total dans Ω. Elles sont toutes itératives. Il faudra construire une suite χ_n, associée au contraste, et une suite E_n, associée au champ électrique.

3.3.1 Détermination du contraste

Quelque soit la méthode que nous utiliserons par la suite, l'estimation du contraste χ_n est déterminée à chaque itérée de la manière suivante :

$$\chi_n = \chi_{n-1} + \beta_n v_{n;\chi}. \tag{3.5}$$

Dans cette relation récurrente, $v_{n;\chi}$ est une direction de descente, que nous discuterons par la suite, associée au contraste. Le scalaire complexe β_n est choisi de sorte qu'il minimise à chaque itérée n une fonction coût $\mathcal{F}_n$ définie par :

$$\mathcal{F}_n(E_n;\chi_n) = W_\Omega \mid\mid h_n^{(1)} \mid\mid_\Omega^2 + W_\Gamma \mid\mid h_n^{(2)} \mid\mid_\Gamma^2 . \tag{3.6}$$

Les fonctions $h_n^{(1)}$ et $h_n^{(2)}$ représentent les erreurs résiduelles des équations de couplage (3.3) et d'observation (3.4). Elles sont définies par les relations (3.7) et (3.8) :

$$h_n^{(1)} = E_n - E^{\mathrm{inc}} - \mathbf{G}\chi_n E_n, \tag{3.7}$$

$$h_n^{(2)} = E^{\mathrm{d;mes}} - \mathbf{K}\chi_n E_n, \tag{3.8}$$

où $E^{\mathrm{d;mes}}$ représente le champ diffracté mesuré, nos données d'entrée, et E_n correspond à l'estimation de E à l'itérée n. Nous dicuterons dans la suite de ce manuscrit trois façons différentes de déterminer E_n. Les coefficients de normalisations W_Ω et W_Γ sont définis de la manière suivante :

$$W_\Omega = \frac{1}{\| E^{\mathrm{inc}} \|_\Omega^2}, \tag{3.9}$$

$$W_\Gamma = \frac{1}{\| E^{\mathrm{d;mes}} \|_\Gamma^2}. \tag{3.10}$$

Les indices Ω et Γ sont inclus dans la norme $\| \,.\, \|$ et plus tard dans les produits scalaires $< . >$ pour indiquer le domaine d'intégration. Nous choisissons comme définition du produit scalaire :

$$< u \mid v >_{\Omega,\Gamma} = \int_{\Omega,\Gamma} u^\star v, \quad \text{et} \quad \| u \|_{\Omega,\Gamma}^2 = < u \mid u >_{\Omega,\Gamma} . \tag{3.11}$$

Rappelons que $\star$ représente le complexe conjugué.

Afin d'améliorer les performances des algorithmes, il est intéressant de rajouter de l'information *a priori*. Nous supposons que les objets que nous recherchons ont une susceptibilité électrique positive. Nous excluons ainsi les diffuseurs ayant une permittivité relative plus petite que 1. De plus, nous imposons une contrainte de positivité sur la conductivité du diffuseur. Le contraste s'écrit alors de la manière suivante :

$$\chi \overset{\text{déf}}{=} \varepsilon_r - \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0} - \varepsilon_{rb} = 1 + \xi^2 - i\eta^2 - \varepsilon_{rb}. \tag{3.12}$$

Les fonctions ξ et η sont des fonctions réelles. L'équation (3.5), qui définissait la relation de récurrence sur le contraste, se coupera en deux nouvelles relations associées à ξ (3.13) et à η (3.14), toutes deux réelles, selon le même schéma que pour χ (3.5).

$$\xi_n = \xi_{n-1} + \beta_{n;\xi} v_{n;\xi}, \tag{3.13}$$

$$\eta_n = \eta_{n-1} + \beta_{n;\eta} v_{n;\eta}. \tag{3.14}$$

Une fois les directions de descente déterminées, la fonction coût $\mathcal{F}_n$ devient une fonction de deux variables réelles $\beta_{n;\xi}$ et $\beta_{n;\eta}$.

Discutons maintenant des directions de descente. Nous avons choisi pour $v_{n;\xi}$ et $v_{n;\eta}$ de prendre les directions de descente données par le gradient conjugué de type Polak-Ribière, définies par :

$$v_{n,\xi} = g_{n;\xi} + \gamma_{n;\xi} v_{n-1;\xi} \quad \text{avec} \quad \gamma_{n;\xi} = \frac{< g_{n;\xi} \mid g_{n;\xi} - g_{n-1;\xi} >_\Omega}{\| g_{n-1;\xi} \|_\Omega^2}, \tag{3.15}$$

$$v_{n;\eta} = g_{n;\eta} + \gamma_{n;\eta} v_{n-1;\eta} \quad \text{avec} \quad \gamma_{n;\eta} = \frac{< g_{n;\eta} \mid g_{n;\eta} - g_{n-1;\eta} >_\Omega}{\| g_{n-1;\eta} \|_\Omega^2}, \tag{3.16}$$

où $g_{n;\xi}$ et $g_{n;\eta}$ sont les gradients de la fonction coût $\mathcal{F}_n$ par rapport à ξ_n et à η_n. Ils sont calculés à l'itérée $(n-1)$ pour un champ total constant dans le domaine test Ω. Le résultat du calcul des gradients donnent :

$$g_{n;\xi} = 2\xi_{n-1}\Re e\left(W_\Omega E^\star_{n-1}\mathbf{G}^\dagger h^{(1)}_{n-1} + W_\Gamma E^\star_{n-1}\mathbf{K}^\dagger h^{(2)}_{n-1}\right), \tag{3.17}$$

$$g_{n;\eta} = -2\eta_{n-1}\Im m\left(W_\Omega E^\star_{n-1}\mathbf{G}^\dagger h^{(1)}_{n-1} + W_\Gamma E^\star_{n-1}\mathbf{K}^\dagger h^{(2)}_{n-1}\right). \tag{3.18}$$

Rappelons que $\star$ fait référence au complexe conjugué et $\dagger$ à l'adjoint. Après avoir décrit la manière de déterminer le contraste, qui, rappelons-le, est la même quelque soit les méthodes que nous utilisons, intéressons-nous maintenant au calcul du champ électrique dans le domaine Ω.

3.3.2 Détermination du champ électrique dans le domaine de recherche

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction de ce chapitre, nous trouvons dans la littérature trois types d'approches pour déterminer E_n.

Approche linéarisée

Dans cette première approche, le problème inverse est linéarisé en considérant le champ électrique fixe à chaque itérée. Une solution consiste à utiliser l'approximation de Born. Le champ électrique est alors solution de :

$$E = E^{\text{inc}} + \mathbf{G}\chi E^{\text{inc}}. \tag{3.19}$$

Cette approximation est valable pour des diffuseurs faiblement contrastés ou de petite taille. Une autre possibilité pour linéariser le problème inverse consiste à déterminer le champ électrique en résolvant, à chaque itérée, le problème direct associé à l'estimation du contraste. Il est obtenu de la manière suivante :

$$\tilde{E}_{n-1} = \left(1 - \mathbf{G}\chi_{n-1}\right)^{-1} E^{\text{inc}}. \tag{3.20}$$

Le contraste χ_n est alors déterminé en remplaçant E_{n-1} par $\tilde{E}_{n-1}$ dans (3.17) et (3.18). Dans la suite de ce manuscrit, nous appellerons cette méthode la Born Method (B.M.).

Approche non linéarisée

Dans cette deuxième classe de méthodes, le problème inverse n'est pas linéarisé. Le champ électrique est considéré comme une inconnue que nous déterminons en même temps que le contraste dans la procédure de minimisation. Pour cela nous construisons une relation de récurrence définie de la manière suivante :

$$E_n = E_{n-1} + \alpha_n v_{n;E}. \tag{3.21}$$

Le coefficient complexe α_n est déterminé en minimisant la fonction coût (3.6). Elle s'écrit alors sous la forme d'un polynôme de deux variables réelles $\beta_{n;\xi}$ et $\beta_{n;\eta}$ et d'une variable complexe α_n. La direction de descente $v_{n;E}$ associée au champ électrique est donnée par le gradient conjugué de type Polak-Ribière, à savoir :

$$v_{n;E} = g_{n;E} + \gamma_{n;E} v_{n-1;E} \quad \text{avec} \quad \gamma_{n;E} = \frac{< g_{n;E} \mid g_{n;E} - g_{n-1;E} >_\Omega}{\| g_{n-1;E} \|_\Omega^2}, \tag{3.22}$$

où $g_{n;E}$ est le gradient de la fonction coût $\mathcal{F}_n$ évalué à l'itérée $(n-1)$, avec ξ_{n-1} et η_{n-1} constant :

$$g_{n;E} = W_\Omega \left(\chi_{n-1}^\star \mathbf{G}^\dagger h_{n-1}^{(1)} - h_{n-1}^{(1)} \right) - W_\Gamma \chi_{n-1}^\star \mathbf{K}^\dagger h_{n-1}^{(2)}. \tag{3.23}$$

Par la suite, nous appellerons cette méthode d'inversion la Modified Gradient Method (M.G.M.) [23, 24].

Méthodes hybrides

Les méthodes hybrides combinent les idées des deux approches que nous venons de présenter. Dans la première, que nous appellerons par la suite la Modified Born Method (M.B.M.), le champ électrique dans le domaine Ω est calculé d'après la relation de récurrence suivante :

$$\tilde{E}_n = E_{n-1} + \alpha_{n;w} w_n, \tag{3.24}$$

avec :

$$w_n = \tilde{E}_{n-1} - E_{n-1}. \tag{3.25}$$

Le coefficient complexe $\alpha_{n;w}$ est calculé en même temps que les coefficients réels $\beta_{n;\xi}$ et $\beta_{n;\eta}$, en minimisant la fonction coût (3.6), et $\tilde{E}_{n-1}$ est donné par (3.20). Ainsi, comme pour la M.G.M., le champ est considéré comme une inconnue que nous déterminons dans la procédure de minimisation en même temps que le contraste. La direction de descente qui lui est associée dépend du champ calculé dans la B.M..

La seconde méthode hybride que nous présentons ici est en fait une combinaison du M.G.M. et du M.B.M.. Le champ électrique dans Ω est calculé en utilisant la relation de récurrence suivante :

$$E_n = E_{n-1} + \alpha_{n;v} v_{n;E} + \alpha_{n;w} w_n. \tag{3.26}$$

Les coefficients complexes $\alpha_{n;v}$ et $\alpha_{n;w}$ sont déterminés en même temps que les réels $\beta_{n;\xi}$ et $\beta_{n;\eta}$, en minimisant la fonction coût (3.6). Les directions de descente $v_{n;E}$ et w_n sont données respectivement par (3.22) et (3.25). Nous pouvons remarquer que cette méthode, que nous appellerons par la suite Modified Modified Gradient Method (M.^{2}G.M.) est en fait une combinaison de toutes les méthodes que nous venons de présenter. En effet, en forçant les coefficients $\alpha_{n;v}$ et $\alpha_{n;w}$

à être nul ou égaux à l'unité, nous retrouvons, à partir de (3.26), les différentes façons de calculer le champ électrique E_n données par (3.20), (3.21) et (3.24).

3.4 Différentes façons d'augmenter le pouvoir de résolution

En générale, utiliser une seule source et une seule fréquence n'est pas suffisant pour obtenir des reconstructions acceptables et précises. Pour illustrer ces propos, il faut regarder la sphère d'Ewald, qui représente la quantité d'information accessible. L'étude menée sur la tomographie par diffraction [56] a permis de constater que, dans le cadre de l'approximation de Born, l'information (support spectral du contrast) disponible était contenue sur un cercle, comme décrit sur la Fig. 3.1. La position du centre de ce cercle dépend de l'angle d'incidence du champ sur le diffuseur et de la fréquence, et le rayon est relié à la fréquence. Ainsi, pour une seule source et une fréquence, nous n'avons de l'information que sur un cercle comme représenté sur la Fig. 3.1-(a). Nous devons augmenter la quantité d'information pour obtenir des résultats quantitatifs. Nous allons explorer trois voies. Dans la première, nous supposons que le diffuseur est successivement éclairé par plusieurs sources générant un champ incident harmonique. L'information accessible est alors sur plusieurs cercles de même rayon, comme reproduit sur la Fig. 3.1-(b). Une autre possibilité consiste à utiliser une seule source générant un champ incident transitoire. En considérant la synthèse de fréquence, cela revient à illuminer l'objet par plusieurs champs harmoniques à plusieurs fréquences différentes et d'amplitudes différentes. Nous trouverons alors l'information sur plusieurs cercles de rayon de plus en plus petit comme représenté sur la Fig. 3.1-(c). Enfin, la dernière solution que nous envisageons, est une combinaison des deux précédentes : la cible est éclairée par plusieurs sources générant chacune un champ transitoire. Nous cumulerons ainsi l'information venant de plusieurs sources et de plusieurs fréquences en même temps, et nous remplirons tout le domaine reporté en bleu sur la Fig. 3.1-(d).

Dans cette section, nous allons présenter les modifications à apporter aux schémas d'inversion pour tenir compte du caractère multi-sources et/ou multi-fréquences. Nous ne développerons les modifications que sur la M.^{2}G.M.. Pour les autres méthodes, tout se déduira sans difficulté.

3.4.1 Inversion de données harmoniques

Dans un premier temps, nous supposons que le diffuseur est éclairé successivement par L sources rayonnant un champ harmonique à la fréquence f. Chacune de ces L sources est située en $(\mathbf{r}_l)_{l=1\ldots L}$ et sera repérée par le nombre l (l variant de 1 à L). Dans ces conditions, nous minimisons la fonction

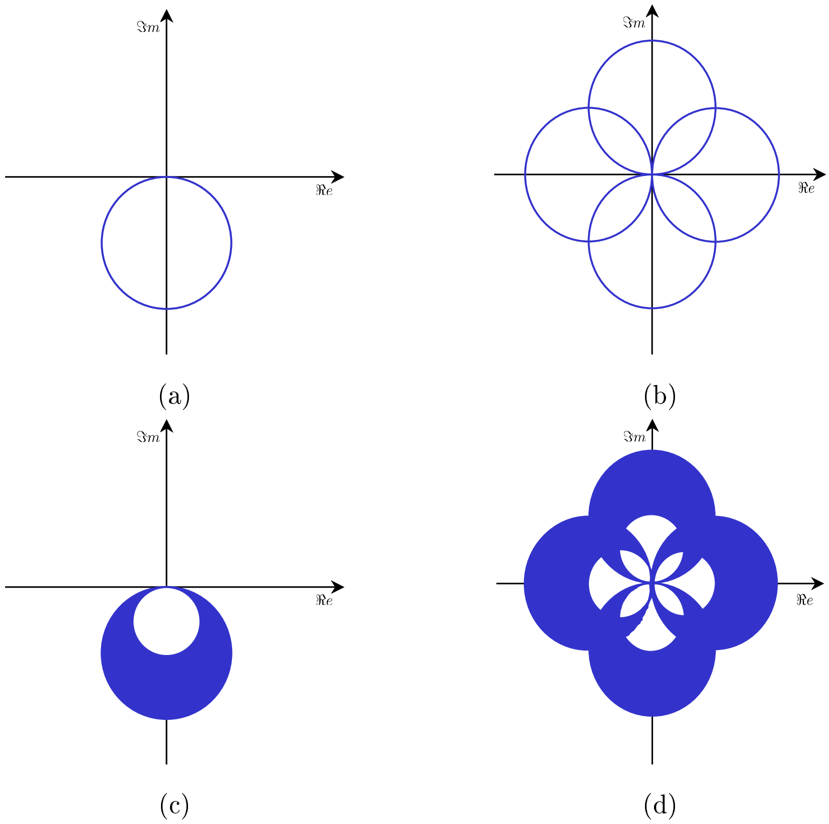


FIG. 3.1 – *Support spectral du contraste dans le cadre de l'approximation de Born. (a) : approche mono-source et mono-fréquence. (b) : approche multi-sources et mono-fréquence. (c) : approche mono-source et multi-fréquences. (d) : approche multi-sources et multi-fréquences.*

coût :

$$\mathcal{F}_n(E_{l,n};\chi_n) = W_\Omega \sum_{l=1}^{L} \| h_{l,n}^{(1)} \|_\Omega^2 + W_\Gamma \sum_{l=1}^{L} \| h_{l,n}^{(2)} \|_\Gamma^2 . \tag{3.27}$$

Les coefficients de normalisation deviennent :

$$W_\Omega = \frac{1}{\sum_{l=1}^{L} \| E_l^{\mathrm{inc}} \|_\Omega^2}, \quad \text{et} \quad W_\Gamma = \frac{1}{\sum_{l=1}^{L} \| E_l^{\mathrm{d;mes}} \|_\Gamma^2}. \tag{3.28}$$

Les erreurs résiduelles $h_{l,n}^{(1)}$ et $h_{l,n}^{(2)}$ se déduisent de (3.7) et (3.8), où nous devons tenir compte du fait que les champs incidents E_l^{inc} et totaux $E_{l,n}$ dépendent de la source l. Les directions de descente associées à ξ et η sont inchangées. Par contre, les gradients doivent tenir compte du caractère multi-sources, et s'écrivent:

$$g_{n;\xi} = 2\xi_{n-1}\Re e \left(W_\Omega \sum_{p=1}^{L} E_{l,n-1}^{\star}\mathbf{G}^{\dagger} h_{l,n-1}^{(1)} + W_\Gamma \sum_{p=1}^{L} E_{l,n-1}^{\star}\mathbf{K}^{\dagger} h_{l,n-1}^{(2)} \right), \tag{3.29}$$

$$g_{n;\eta} = -2\eta_{n-1}\Im m\left(W_\Omega \sum_{p=1}^{L} E_{l,n-1}^{\star}\mathbf{G}^\dagger h_{l,n-1}^{(1)} + W_\Gamma \sum_{p=1}^{L} E_{l,n-1}^{\star}\mathbf{K}^\dagger h_{l,n-1}^{(2)}\right). \tag{3.30}$$

Pour le champ total, nous utilisons les directions de descente (3.22) et (3.25). Il suffira de les calculer pour chaque incidence l. Nous aurons à déterminer L directions de descente $v_{l,n;E}$, et L directions de descente $w_{l,n}$. La fonction coût (3.27) est alors un polynôme de 2 coefficients réels ($\beta_{n;\xi}$ et $\beta_{n;\eta}$), et de $(2 \times L)$ coefficients complexes ($\alpha_{l,n;v}$ et $\alpha_{l,n;w}$).

3.4.2 Inversion de données temporelles

Nous supposons maintenant que le diffuseur est éclairé par une seule source rayonnant un champ incident transitoire. Après avoir transposé les données temporelles en régime harmonique à l'aide de la transformée de Laplace (2.4), nous obtenons, pour chacun des récepteurs, le champ diffracté pour un ensemble de fréquences. Le nombre P de fréquences que nous devons considérer dépend de la forme de l'impulsion incidente. Le pas δf en fréquence étant fixé par la durée Δt du signal temporel ($\Delta t.\delta f$=1), il faut prendre un nombre de fréquences P suffisant pour que le spectre du champ incident soit nul aux plus hautes et aux plus basses fréquences considérées. Dans ces conditions, cela revient à éclairer successivement le diffuseur par P champs harmoniques à P fréquences différentes rayonnées par une seule source. Par la suite, nous repérerons les fréquences par un indice p (p variant de 1 à P). Dans ces conditions, nous minimisons la fonction coût :

$$\mathcal{F}_n(E_{p,n};\chi_{p,n}) = W_\Omega \sum_{p=1}^{P} \| h_{p,n}^{(1)} \|_\Omega^2 + W_\Gamma \sum_{p=1}^{P} \| h_{p,n}^{(2)} \|_\Gamma^2 , \tag{3.31}$$

et les coefficients de normalisation deviennent :

$$W_\Omega = \frac{1}{\sum_{p=1}^{P} \| E_p^{\text{inc}} \|_\Omega^2}, \quad \text{et} \quad W_\Gamma = \frac{1}{\sum_{p=1}^{P} \| E_p^{\text{d;mes}} \|_\Gamma^2}. \tag{3.32}$$

Les erreurs résiduelles $h_{p,n}^{(1)}$ et $h_{p,n}^{(2)}$ se déduisent de (3.7) et (3.9). Nous devons tenir compte du fait que les champs incidents E_p^{inc} et totaux $E_{p,n}$, les opérateurs de Green $\mathbf{G}_p$ et $\mathbf{K}_p$ ainsi que le contraste $\chi_{p,n}$ dépendent de la fréquence p. Une attention particulière du point de vue numérique a été apportée sur l'évaluation des fonctions de Green et sur le stockage de ces matrices.

Les grandeurs que nous cherchons à reconstruire (permittivité et conductivité) sont indépendantes de la fréquence. Or, en utilisant un modèle ohmique, le contraste dépend de la fréquence. Il nous faut donc revenir sur l'information *a priori* que nous avons incorporée. Nous modifions la relation (3.12) de sorte que η^2 représente maintenant la conductivité. Le contraste s'écrit alors :

$$\chi_p \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon_r - \frac{i\sigma}{\omega_p\varepsilon_0} - \varepsilon_{rb} = 1 + \xi^2 - \frac{i\eta^2}{\omega_p\varepsilon_0} - \varepsilon_{rb}. \tag{3.33}$$

Les directions de descente associées à ξ_n et η_n sont déterminées de la même façon que (3.13) et (3.14). Par contre les gradients associés doivent tenir compte du caractère multi-fréquences. Ils se calculent alors de la manière suivante :

$$g_{n;\xi} = 2\xi_{n-1}\Re e\left(W_\Omega \sum_{p=1}^{P} E^{\star}_{p,n-1}\mathbf{G}^{\dagger}_p h^{(1)}_{p,n-1} + W_\Gamma \sum_{p=1}^{P} E^{\star}_{p,n-1}\mathbf{K}^{\dagger}_p h^{(2)}_{p,n-1}\right), \tag{3.34}$$

$$g_{n;\eta} = -2\eta_{n-1}\Im m\left(W_\Omega \sum_{p=1}^{P} \frac{1}{\omega_p\varepsilon_0} E^{\star}_{p,n-1}\mathbf{G}^{\dagger}_p h^{(1)}_{p,n-1} + W_\Gamma \sum_{p=1}^{P} \frac{1}{\omega_p\varepsilon_0} E^{\star}_{p,n-1}\mathbf{K}^{\dagger}_p h^{(2)}_{p,n-1}\right). \tag{3.35}$$

Quant aux directions de descente associées au champ total, les équations (3.22) et (3.25) restent inchangées. Il suffit de les calculer pour chaque fréquence. Nous aurons ainsi P directions de descente $v_{p,n;E}$, et P directions de descente $w_{p,n}$. La fonction coût (3.31) devient alors un polynôme de 2 coefficients réelles ($\beta_{n;\xi}$ et $\beta_{n;\eta}$), et de $(2 \times P)$ coefficients complexes ($\alpha_{p,n;v}$ et $\alpha_{p,n;w}$).

3.4.3 Prise en compte de plusieurs sources en régime transitoire

La dernière approche que nous présentons ici est une combinaison des deux exposées précédemment. Nous supposons maintenant que le diffuseur est successivement éclairé par L sources rayonnant chacune un champ incident transitoire. En considérant la synthèse de fréquences, le diffuseur se trouve être éclairé successivement par $(L \times P)$ champs harmoniques à P fréquences. La fonction coût que nous minimisons est alors modifiée de la manière suivante :

$$\mathcal{F}_n(E_{l,p,n};\chi_{p,n}) = W_\Omega \sum_{l=1}^{L}\sum_{p=1}^{P} \| h^{(1)}_{l,p,n} \|^2_\Omega + W_\Gamma \sum_{l=1}^{L}\sum_{p=1}^{P} \| h^{(2)}_{l,p,n} \|^2_\Gamma , \tag{3.36}$$

et les coefficients de normalisation deviennent :

$$W_\Omega = \frac{1}{\sum_{l=1}^{L}\sum_{p=1}^{P} \| E^{\mathrm{inc}}_{l,p} \|^2_\Omega}, \quad \text{et} \quad W_\Gamma = \frac{1}{\sum_{l=1}^{L}\sum_{p=1}^{P} \| E^{\mathrm{d;mes}}_{l,p} \|^2_\Gamma} \tag{3.37}$$

Les erreurs résiduelles $h^{(1)}_{l,p,n}$ et $h^{(2)}_{l,p,n}$ se déduisent de (3.7) et (3.8). Cette fois-ci, le contraste $\chi_{p,n}$ et les opérateurs de Green $\mathbf{G}_p$ et $\mathbf{K}_p$ dépendent de la fréquence p, et les champs incidents $E^{\mathrm{inc}}_{l,p}$ et totaux $E_{l,p,n}$ dépendent à la fois de la fréquence p, mais aussi de la source l.

Les directions de descente associées à ξ_n et η_n sont données par (3.13) et (3.14), et les gradients se calculent de la façon suivante :

$$g_{n;\xi} = 2\xi_{n-1}\Re e\left(W_\Omega \sum_{p=1}^{P}\sum_{l=1}^{L} E^{\star}_{l,p,n-1}\mathbf{G}^{\dagger}_p h^{(1)}_{l,p,n-1} + W_\Gamma \sum_{p=1}^{P}\sum_{l=1}^{L} E^{\star}_{l,p,n-1}\mathbf{K}^{\dagger}_p h^{(2)}_{l,p,n-1}\right), \tag{3.38}$$

$$g_{n;\eta} = -2\eta_{n-1}\Im m \left(W_\Omega \sum_{p=1}^{P} \frac{1}{\omega_p \varepsilon_0} \sum_{l=1}^{L} E^\star_{l,p,n-1} \mathbf{G}_p^\dagger h^{(1)}_{l,p,n-1} + W_\Gamma \sum_{p=1}^{P} \frac{1}{\omega_p \varepsilon_0} \sum_{l=1}^{L} E^\star_{l,p,n-1} \mathbf{K}_p^\dagger h^{(2)}_{l,p,n-1} \right). \tag{3.39}$$

Les directions de descente associées aux champs $E_{l,p,n}$ se calculent en utilisant (3.22) et (3.25). Nous aurons ainsi $(L \times P)$ directions de descente $v_{l,p,n;E}$, et $(L \times P)$ direction de descente $w_{l,p,n}$. La fonction coût (3.36) est alors un polynôme de 2 coefficients réels ($\beta_{n;\xi}$ et $\beta_{n;\eta}$), et de $(2 \times L \times P)$ coefficients complexes ($\alpha_{l,p,n;v}$ et $\alpha_{l,p,n;w}$).

Nous venons de présenter trois façons différentes d'enrichir la quantité d'information nécessaire à l'obtention de reconstructions de qualité. Avant de pouvoir mettre en application nos différents schémas d'inversion, nous devons définir une estimation initiale, indispensable à tout processus itératif. Une solution consiste à prendre ξ_0 et η_0 constants. Cependant cela pose le problème du choix de ces constantes, sachant que nous devons éviter $\xi_0 = 0$ et $\eta_0 = 0$ car les gradients $g_{1;\xi}$ et $g_{1;\eta}$ seraient nuls. Nous proposons alors d'utiliser la méthode de rétro-propagation qui fournit, à partir des champs diffractés, une estimation du contraste et du champ électrique dans le domaine test Ω. S'agissant d'une méthode classique [57, 15], nous ne la détaillons pas ici, mais la rappelons en annexe de ce manuscrit.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé plusieurs méthodes pour résoudre des problèmes de diffraction inverse en électromagnétique. Dans la première, la B.M., le problème inverse est linéarisé en considérant, à chaque itérée n, le champ électrique comme étant solution du problème direct associé au contraste χ_{n-1}. Nous avons aussi présenté une méthode, la M.G.M., où le champ électrique est déterminé dans la procédure de minimisation, en même temps que le contraste. Puis nous avons exposé deux méthodes hybrides, la M.B.M. et la M.^{2}G.M., qui combinent les idées des deux autres approches.

Nous avons ensuite proposé trois manières d'augmenter la quantité d'information nécessaire à l'obtention de résultats précis. Dans la première, nous supposons que le diffuseur est successivement éclairé par L sources générant un champ harmonique à une seule fréquence. Il s'agira alors d'inversion de données harmoniques. Pour obtenir des résultats acceptables, nous montrerons dans la suite de ce manuscrit, que cette méthode doit être couplée avec une marche récurrente en fréquences.

La deuxième solution proposée consiste à éclairer la cible par une seule source générant un champ transitoire, ce qui revient à illuminer le diffuseur par un grand nombre de champs harmoniques à des fréquences différentes. Nous parlerons d'inversion de données temporelles.

Enfin, la dernière solution est une combinaison des deux précédentes, et le diffuseur est alors illuminé par L sources générant chacune un champ transitoire.

Chapitre 4

D.O.R.T. et retournement temporel

Sommaire

4.1 Introduction

Avant de se lancer dans l'inversion proprement dite, il est essentiel, vu le formalisme utilisé (intégrale de domaine), de connaître la position de l'objet que l'on cherche à reconstruire, ou au moins d'être capable de définir un domaine de taille raisonnable à l'intérieur duquel le diffuseur est confiné. Sans cela, il nous faudrait mailler une très grande zone de l'espace, et les algorithmes se perdraient dans des temps de calcul infiniment longs.

La localisation des diffuseurs peut être obtenue à partir de la rétro-propagation, qui, rappelons-le, nous donne l'estimation initiale nécessaire à la mise en œuvre des algorithmes d'inversion. Cependant, il nous a semblé intéressant d'explorer d'autre méthodes, et nous avons étudié la méthode de Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel (D.O.R.T.). Remarquons qu'à basse fréquence et pour des problèmes à deux dimensions en polarisation $\mathcal{E}_{//}$, ces deux méthodes sont équivalentes (le coefficient γ défini par (F.5) est égal à l'inverse de la valeur propre de l'Opérateur de Retournement Temporel). Cette méthode D.O.R.T. nous permet de dénombrer et de localiser des diffuseurs, mais elle nous fournit surtout une onde qui focalise de manière sélective sur chacune des cibles présentes. C'est cette onde focalisante qui nous intéressera particulièrement, car elle permet d'apporter de l'énergie exclusivement sur un diffuseur sans éclairer ce qu'il y a autour. Par la suite nous l'incorporerons dans les processus d'inversion, afin d'améliorer les reconstructions. Ceci se révélera être particulièrement intéressant quand les diffuseurs seront enfouis dans un milieu présentant un bruit de structure important.

Dans ce chapitre, nous décrirons rapidement la méthode D.O.R.T., qui utilise des données harmoniques, puis nous rappellerons les principaux résultats. Ensuite, nous présenterons ceux que nous avons obtenus dans les deux configurations d'études. Enfin, nous proposerons une méthode qui permet de synthétiser une onde à partir de données transitoires.

4.2 Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel

Dans ce chapitre, nous n'avons pas l'ambition de reprendre le travail effectué dans les thèses de Gilles Micolau [10] et de Stéphane Bonnard [12]. Nous rappellerons quelques résultats, puis nous présenterons ceux que nous avons obtenus, aussi bien en configuration «espace homogène», qu'«objets enfouis».

4.2.1 Présentation de la méthode D.O.R.T.

La méthode D.O.R.T. est une méthode d'investigation en régime harmonique qui permet de détecter et localiser un ou plusieurs diffuseurs. Elle fournit aussi un champ qui focalise sur chacune des cibles présentes dans le domaine test. Développée en acoustique [8, 9], elle a ensuite été appliquée à l'électromagnétisme [10, 11, 12]. Elle s'appuie sur la propriété d'invariance du changement de t en $-t$ dans l'équation des ondes (4.1), que satisfait un champ ϕ (acoustique ou électromagnétique) susceptible de se propager dans des milieux sans pertes.

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{4.1}$$

Nous savons que cette équation, associée à des conditions limites particulières, admet une solution unique. Ainsi, si nous sommes capables de mesurer le champ ϕ sur un contour fermé, il sera possible de retrouver le passé de l'onde.

D'un point de vue pratique, il s'agit de construire un opérateur dont les invariants (valeurs propres et vecteurs propres) nous renseignent sur le nombre de diffuseurs, et sur leur position. Numériquement, la construction de l'opérateur de retournement temporel se fait de la façon suivante. L sources émettent successivement un champ incident monochromatique, et nous mesurons L champs diffractés sur les N récepteurs de la ligne Γ. Nous considérerons ici que les antennes jouent le rôle de sources et de récepteurs, et donc $L = N$. Une fois toutes les mesures effectuées, nous obtenons une matrice $\mathcal{K}$ carrée et symétrique, en vertu du théorème de réciprocité, dont l'élément $\mathcal{K}(l,j)$ correspond au champ diffracté mesuré sur le récepteur l, quand la source j émet. Le retournement temporel consiste à permuter le rôle des sources et des récepteurs, et à conjuguer la phase. D'un point de vue matriciel, cela revient à considérer la matrice $\mathcal{K}^{\dagger}$, matrice transposée conjuguée de $\mathcal{K}$ (opérateur adjoint). Nous appellerons Opérateur de Retournement Temporel (O.R.T.) la matrice $\mathcal{Z} = \mathcal{K}^{\dagger}\mathcal{K}$. Par construction, l'O.R.T. est un opérateur hermitien. Ces valeurs propres sont donc réelles et positives. Ce sont les invariants de cette matrice qui nous fournissent les renseignements que nous cherchons ici, à savoir le nombre de diffuseurs et leurs positions.

Rappelons maintenant les résultats de [10] relatifs à l'interprétation des valeurs propres et des vecteurs propres. Nous le ferons en deux étapes. Tout d'abord nous traiterons du cas où il n'y a qu'un seul diffuseur, en configuration «espace homogène» et «objets enfouis». Ensuite, nous rappellerons ce qui se passe lorsque l'on utilise plusieurs diffuseurs, pour ces deux configurations.

4.2.2 Résultats pour un seul diffuseur

Considérons un seul diffuseur présent soit dans un espace infini, comme décrit sur la Fig. 1.1, soit dans un demi-espace, comme décrit sur la Fig. 1.4. Dans le premier cas, les récepteurs sont placés tout autour de l'objet, et la ligne de mesure Γ est un cercle. Dans la seconde configuration, la ligne de mesure Γ est une ligne horizontale placée au dessus de l'interface.

À basse fréquence, la règle de l'acoustique «une valeur propre non nulle pour un diffuseur» reste vraie, et ce quelque soit la géométrie des problèmes à deux dimensions en polarisation $\mathcal{E}_{//}$.

Lorsque la fréquence augmente, le dénombrement des diffuseurs devient plus difficile sans autre source d'information. Dans [10], il a été établi que les valeurs propres étaient reliées aux coefficients de la matrice de diffraction $\mathcal{S}$ que nous ne rappelons pas ici. À hautes fréquences, tous les termes $\mathcal{S}$ vont augmenter. Nous aurons autant de valeurs propres non négligeables que de termes de $\mathcal{S}$ non négligeables. Nous aurons donc plusieurs valeurs propres pour un seul diffuseur.

Lorsque l'on utilise une configuration limitée en aspect (ligne de mesure horizontale, arc de cercle), le comportement des valeurs propres dépend de l'angle sous lequel le diffuseur voit le réseau d'antennes. Si celui-ci est petit ($\theta < 90^o$), nous observons le même comportement qu' à basse fréquence. Pour des angles plus grands, les deux premières valeurs propres sont du même ordre de grandeur, et pour savoir si elles sont associées au diffuseur, il faut regarder les vecteurs propres associés. Le dénombrement est donc meilleur avec une ligne de mesure courte.

Concernant les vecteurs propres associés aux valeurs propres émergentes, nous pouvons les voir comme des vecteurs courants. Si on fait se propager un champ créé par les antennes, chacune d'elles alimentée par un courant ayant pour amplitude complexe la coordonnée correspondante du vecteur propre, alors le champ présente un maximum là où se trouve le diffuseur. Ce champ retourné s'écrit donc, par définition :

$$E^{\mathrm{inc;dort}}(\mathbf{r}) = i\omega\mu_0 \sum_{l=1}^{N} V_l M(\mathbf{r};\mathbf{r}_l), \tag{4.2}$$

où V_l correspond à la l^{ime} composante du vecteur propre $\mathbf{V}$ considéré, $M(\mathbf{r};\mathbf{r}_l)$ est la fonction de Green permettant de passer de $\mathbf{r}_l$ à $\mathbf{r}$. Rappelons que $\mathbf{r}_l$ correspond à la position de l'antenne l. Il s'agit donc d'une combinaison linéaire des champs incidents E_l^{inc} utilisés lors de la première expérience qui sert à construire la matrice $\mathcal{K}$. En effet, le champ incident s'écrit :

$$E_l^{\mathrm{inc}}(\mathbf{r}) = i\omega\mu_0 M(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \tag{4.3}$$

et ainsi, (4.2) peut se mettre sous la forme :

$$E^{\mathrm{inc;dort}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{N} V_l E_l^{\mathrm{inc}}(\mathbf{r}). \tag{4.4}$$

Lorsqu'il n'y a qu'une seule valeur propre, il n'y a pas d'ambiguïté possible, et le champ retourné focalisera sur l'objet.

À plus haute fréquence et en données complètes, nous obtenons plusieurs valeurs propres. Nous observons un champ qui focalise sur le diffuseur, qui correspond à un rayonnement isotrope, et des champs anisotropes, qui correspondent aux développements d'ordre supérieur du champ diffracté. Ces derniers présentent un minimum sur le diffuseur. Ils seront associés aux valeurs propres suivantes.

En configuration «objets enfouis», nous parlerons de champ symétrique (qui focalise sur la cible), et de champ antisymétrique (qui présente un minimum sur la cible). Pour distinguer ces deux vecteurs propres, nous pouvons soit regarder les cartes de champs retournés, soit regarder la phase et le module des vecteurs propres. Pour le champ symétrique, la phase du vecteur propre présentera un minimum pour l'antenne la plus proche de l'objet, alors que pour le champ antisymétrique, elle présentera un saut de phase de π pour cette même antenne. Quant au module du vecteur propre, il sera maximal sur l'antenne la plus proche du diffuseur pour le vecteur symétrique, et nul sur cette antenne pour l'antisymétrique.

Ainsi, pour dénombrer et localiser des cibles, nous pouvons combiner les informations sur les valeurs propres, les phases et les modules des vecteurs propres, et les cartes de champs retournés. Avec tout cela, nous sommes capables de lever la plupart des ambiguïtés, et nous allons illustrer ces quelques résultats par des exemples pour les deux configurations d'étude. Avec toutes ces informations, nous pouvons synthétiser une onde qui va focaliser sur la cible.

Pour commencer nous plaçons, dans le vide, un cylindre homogène de section circulaire de rayon 10 cm, situé en $(-0.2$ m; -0.2 m$)$, non conducteur, de permittivité relative $\varepsilon_r = 3$. Nous travaillons à $f = 300\ MHz$, ce qui correspond à une basse fréquence. En fait, c'est le produit ka, où k est le module du vecteur d'onde et a le rayon du diffuseur qui est important. Si ce produit est plus petit que un, alors nous sommes en basse fréquence, ce qui était le cas ici. Les 20 antennes sont équiréparties sur un cercle centré sur l'origine du repère et de rayon 1.5 m. Le champ diffracté est calculé sur tous les récepteurs, et pour toutes les incidences. Nous construisons la matrice $\mathcal{Z}$ et nous calculons ses valeurs propres et ses vecteurs propres. Nous obtenons trois valeurs propres non nulles, dont une qui émerge largement des autres. En effet, elles valent 2.45 10^5, 7.58 10^2, et 7.44 10^2. La quatrième vaut 0.18. Même si elles ne sont pas nulles, les deuxième et troisième valeurs propres sont très petites devant la première. Nous vérifions donc la règle énoncée plus haut, à savoir «une valeur propre pour un diffuseur». À ces valeurs propres sont associés des vecteurs propres. Dans la suite, nous appellerons $\mathbf{V}_l$, le vecteur propre associé à la $l^{\text{ième}}$ valeur propre. En utilisant $\mathbf{V}_1$ comme vecteur courant, nous devons obtenir un champ isotrope, qui focalise sur le diffuseur. Les vecteurs $\mathbf{V}_2$, et $\mathbf{V}_3$ nous donnerons des champs anisotropes. Les cartes de champs de la Fig. 4.1, où tous les champs retournés sont reportés, illustre nos propos. La carte (a) montre le champ retourné en utilisant $\mathbf{V}_1$. L'onde focalise parfaitement sur le diffuseur avec un rayonnement isotrope. Les cartes (b), et (c) représentent les champs retournés en utilisant respectivement $\mathbf{V}_2$ et $\mathbf{V}_3$. Ils sont bien anisotropes, et présentent un minimum sur l'objet.

Nous avons ensuite voulu voir ce qui ce passait à plus haute fréquence. Au lieu de changer la fréquence, nous avons préféré prendre un objet plus volumineux. Nous plaçons alors au même endroit le même cylindre que précédemment, avec un rayon de 30 cm. Le produit ka est donc

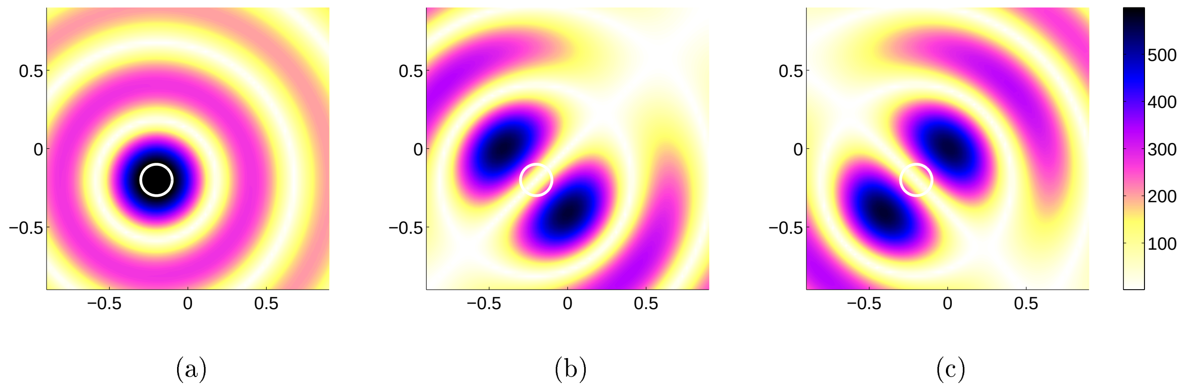


FIG. 4.1 – *Cartes de champs retournés pour différents vecteurs propres. (a) : utilisation de $\boldsymbol{V}_1$, et focalisation sur le diffuseur. (b) et (c) : utilisation de $\boldsymbol{V}_2$, et de $\boldsymbol{V}_3$, et observation de champs anisotropes.*

trois fois plus grand. Concernant les valeurs propres, nous constatons qu'il y en a 5 du même ordre de grandeur 6.61 10^5, 6.5 10^5, 5.37 10^5, 2.47 10^5, 2.46 10^5. Pour savoir quelle valeur propre correspond à un champ isotrope, il faut regarder les champs retournés. La Fig. 4.2 nous montre les cartes de champs retournés pour les cinq valeurs propres. Le champ retourné correspondant au vecteur courant $\mathbf{V}_1$ est sur (a), celui de $\mathbf{V}_2$ sur (b), celui de $\mathbf{V}_3$ sur (c), celui de $\mathbf{V}_4$ sur (d), et celui de $\mathbf{V}_5$ sur (e). Les résultats ainsi obtenus sont conformes aux résultats énoncés plus haut, à savoir que pour de gros diffuseurs ou pour de hautes fréquences, nous observons l'émergence de plusieurs valeurs propres. Le dénombrement devient plus délicat. Par contre, la localisation ne pose pas de problème comme nous constatons sur la Fig. 4.2-(c).

Résultats dans la configuration «objets enfouis»

Regardons maintenant ce qui se passe dans la configuration «objets enfouis». Considérons deux milieux séparés par une interface plane. Pour faire les simulations, le milieu supérieur est le vide, soit un milieu de permittivité relative $\varepsilon_r = 1$, non magnétique et non conducteur. Quant au milieu inférieur, il a une permittivité relative $\varepsilon_{rb} = 3$. Il est non magnétique et représente un sol sec. Le réseau de 20 antennes est placé à 10 cm au dessus de l'interface. Nous travaillons à 300 MHz, et les diffuseurs sont des cylindres de section circulaire.

Un trou d'air de section circulaire, de rayon 20 cm, est situé à 1.3 m sous le centre de la ligne de mesure. Dans un premier temps, nous utilisons une ligne de mesure courte, de 1 m de long. Nous avons alors une valeur propre qui émerge. Elle vaut 1.2 10^5. La deuxième vaut 130. Il n'y a donc pas d'ambiguïté : il n'y a qu'un seul diffuseur. Le champ associé à la première valeur propre

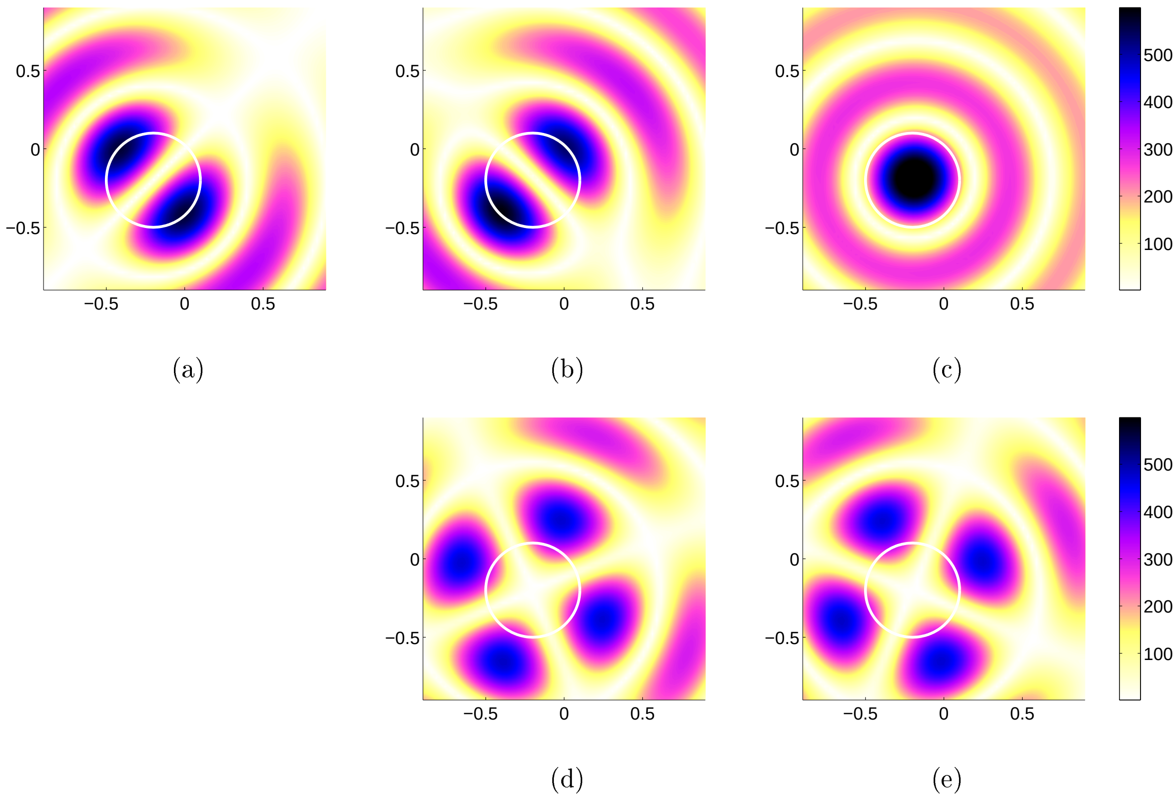


FIG. 4.2 – *Cartes de champs retournés pour différents vecteurs propres. (a) et (b) : utilisation de $\boldsymbol{V}_1$, et de $\boldsymbol{V}_2$ et observation d'un champ anisotrope. (c): utilisation de $\boldsymbol{V}_3$, et observation d'un champ isotrope, focalisant sur le diffuseur. (d) et (e): utilisation de $\boldsymbol{V}_4$, et de $\boldsymbol{V}_5$ et observation de champs anisotropes d'ordres supérieurs.*

doit donc être un champ symétrique, et celui associé à la deuxième valeur propre doit être un champ antisymétrique. Nous le vérifions sur les résultats reportés sur la Fig. 4.3. Les cartes (a) et (b) représentent les cartes de champs retournés obtenues en utilisant respectivement les vecteurs propres $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$. Comme nous l'annoncions plus haut, nous pouvons constater (c) que le module de $\mathbf{V}_2$ est quasi nul à cette abscisse. Quant à la phase de $\mathbf{V}_1$, elle est bien minimale en 0, alors que celle de $\mathbf{V}_2$ présente un saut de π (d).

Nous vérifions donc que la détection est ici évidente, mais la localisation pas très bonne, surtout dans la direction $\mathbf{e}_y$. Pour améliorer la localisation, nous étendons la ligne de mesure à 5 m.

Avec cette nouvelle configuration, nous obtenons toujours principalement deux valeurs propres, qui valent 7.9 10^4 et 5.7 10^3. Nous constatons donc que les deux valeurs propres se sont resserrées, ce qui ne facilite pas la détection. Par contre, en regardant la Fig. 4.4, nous pouvons voir que le

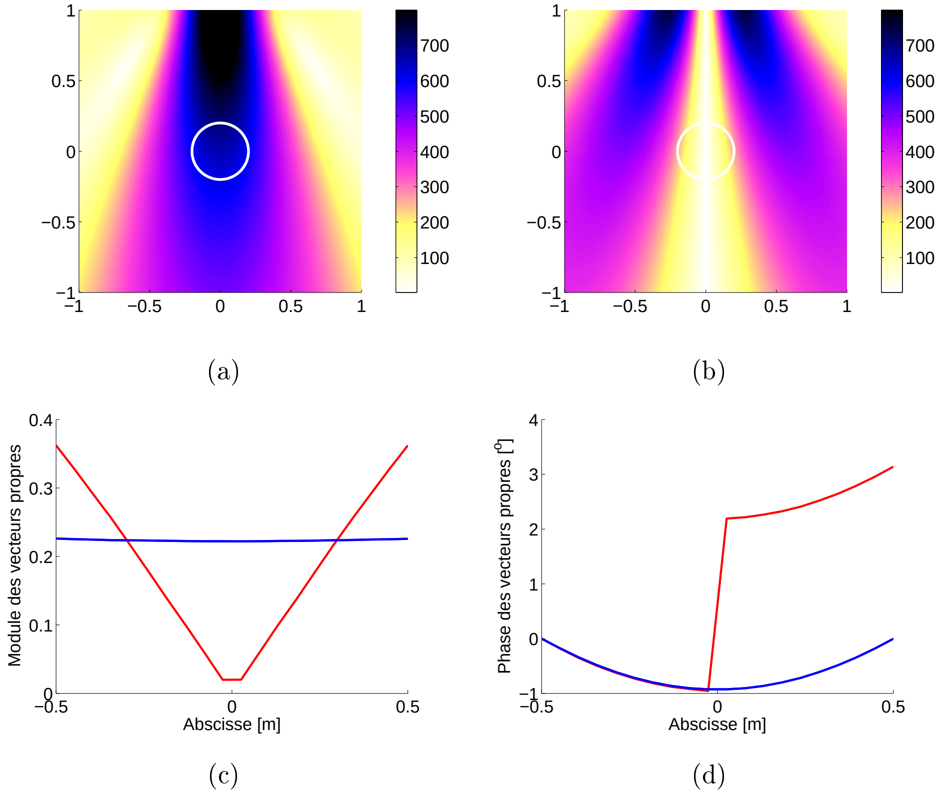


FIG. 4.3 – *Cartes de champs retournés pour différents vecteurs propres et variation du module et de la phase des vecteurs propres. (a) : utilisation de $\boldsymbol{V}_1$, et focalisation sur le diffuseur. (b) : utilisation de $\boldsymbol{V}_2$, et observation d'un champ antisymétrique de le diffuseur. (c) : module des vecteur propre. (d) : phase des vecteurs propres $\boldsymbol{V}_1$. En bleu : $\boldsymbol{V}_1$. En rouge : $\boldsymbol{V}_2$.*

diffuseur est cette fois-ci parfaitement localisé. Nous vérifions que pour l'antenne la plus proche du diffuseur, la phase saute de π et le module est nul, pour $\mathbf{V}_2$, qui est un vecteur antisymétrique. Sur la courbe (d) nous représentons la variation de la phase des deux premiers vecteurs propres. Nous ne l'avons pas tracée sur un intervalle de 2π, car nous avons dû la dérouler, pour s'affranchir des sauts de 2π dûs à la définition de la fonction *atan*, et de la coupure pour les points situés sur le demi-axe réel négatif.

Avec un seul objet, nous venons de vérifier les propriétés des valeurs propres et des vecteurs propres de l'O.R.T. pour nos deux configurations d'étude. À basse fréquence, il n'y a pas d'ambiguïté, et la règle "une valeur propre pour un diffuseur" reste valable. A plus haute fréquence, nous avons bien observé un resserrement vers le haut des valeurs propres, et plusieurs du même ordre de grandeur émergent. Cependant le dénombrement reste faisable en combinant toutes les informations. Enfin, nous avons constaté que, dans la configuration «objets enfouis», une ligne de mesure

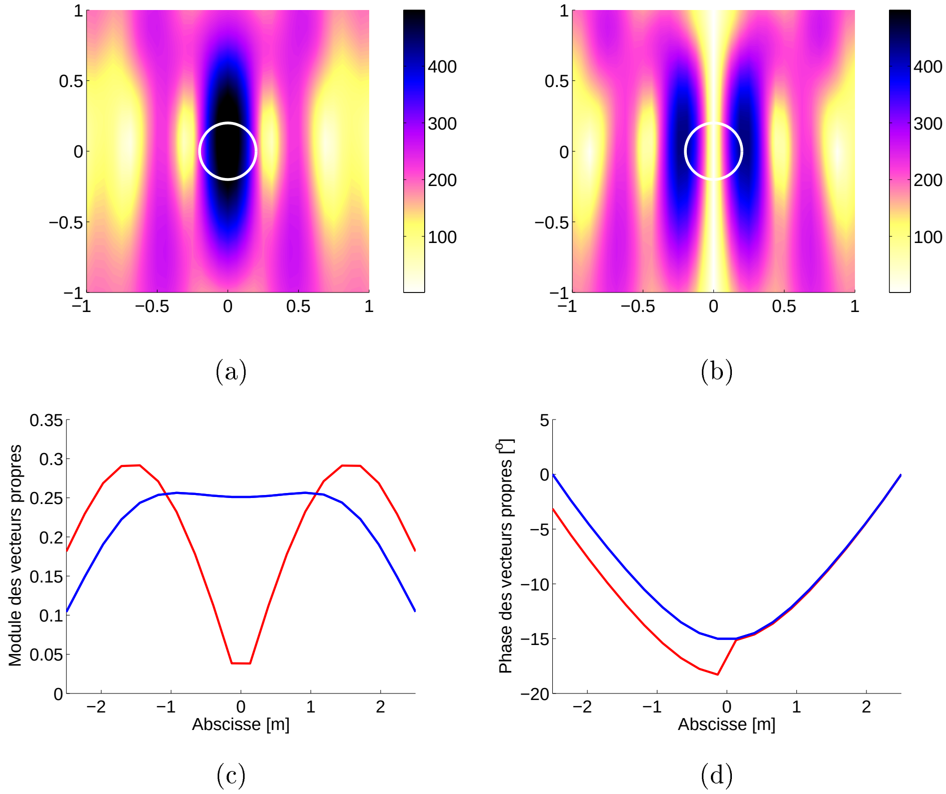


FIG. 4.4 – *Cartes de champs retournés pour différents vecteurs propres et variation du module et de la phase des vecteurs propres. (a) : utilisation de $\boldsymbol{V}_1$. (b) : utilisation de $\boldsymbol{V}_2$. (c) : module des vecteurs propres. (d) : phase des vecteurs propres. En bleu : $\boldsymbol{V}_1$. En rouge : $\boldsymbol{V}_2$.*

courte favorisait le dénombrement, et au contraire, une ligne de mesure plus longue permettait une meilleure localisation. De plus, nous avons été capable à chaque fois de synthétiser une onde qui focalise sur le diffuseur.

Appliquons maintenant cette méthode à une configuration contenant deux diffuseurs.

4.2.3 Résultats pour deux diffuseurs

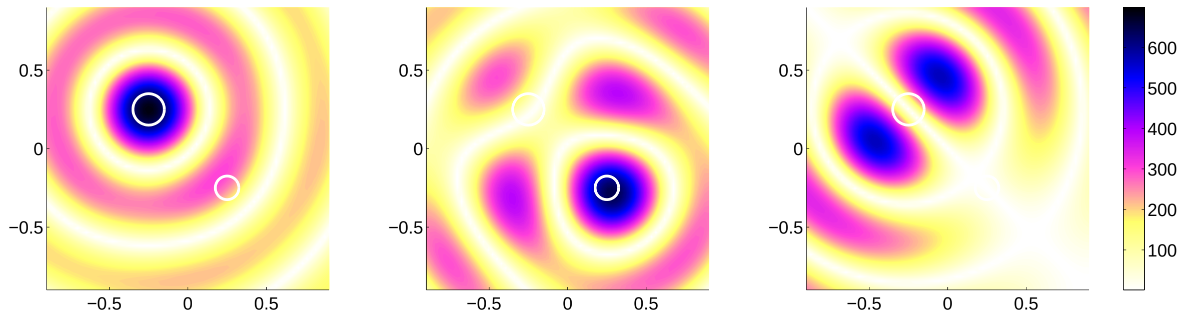
Considérons maintenant deux diffuseurs A et B que nous plaçons soit dans un espace homogène, soit dans un demi-espace. Deux cas sont alors envisageables. Dans le premier, nous considérons que les deux diffuseurs sont quasiment identiques, alors que dans le second cas, les deux cibles sont différentes, et A est le plus diffractant.

Notons α_A (resp. α_B) la valeur propre que nous obtiendrions si le diffuseur A (resp. B) était seul. Lorsque l'on utilise deux diffuseurs identiques, α_A et α_B sont sensiblement les mêmes. Il a été montré dans [10] que dans le cas général, avec deux diffuseurs, la première valeur propre de l'O.R.T. tend vers $\alpha_A \approx \alpha_B$, alors que la seconde tend vers zéro. Il sera alors compliqué de dénombrer les deux diffuseurs. De plus, la distance les séparant devient un paramètre important et il faudra coupler la méthode D.O.R.T. avec une étude sur plusieurs fréquences.

Dans le cas où les diffuseurs sont différents, la méthode D.O.R.T. nous permet de détecter et de localiser directement les diffuseurs. L'écartement entre les deux objets ne joue pas un rôle prépondérant pourvu qu'ils soient séparés de plus de $\frac{\lambda}{2}$, où λ représente la longueur d'onde. Nous obtenons deux valeurs propres émergentes, mais bien séparées, en données complètes. En configuration limitée en aspect, quatre valeurs propres peuvent émerger. Le vecteur propre associé à la valeur propre la plus importante nous donnera le champ focalisant sur A. Ensuite, la deuxième valeur propre correspondra soit au champ focalisant sur B, soit à un champ antisymétrique de A. La troisième sera le complémentaire de la deuxième. La quatrième valeur propre étant plus petite que les autres, le champ obtenu sera un champ antisymétrique de B. Il peut aussi arriver que les champs se mélangent si les valeurs propres sont du même ordre de grandeur. Ainsi, nous pourrons par exemple observer un champ retourné qui soit à la fois antisymétrique de A, et symétrique de B. Illustrons ces propositions.

Résulats en configuration «espace homogène»

Regardons ce qu'il se passe lorsque l'on place deux diffuseurs dans le vide. Les deux objets sont de section circulaire. Le premier, que nous appelons A, est placé en $(-0.25\ \text{m};\ 0.25\ \text{m})$, son rayon vaut 10 cm, et sa permittivité $\varepsilon_{rA} = 3$. Le second, que nous appelons B, est plus petit et moins contrasté. Il est situé en $(0.25\ \text{m};\ -0.25\ \text{m})$. Son rayon vaut 7.5 cm, et sa permittivité $\varepsilon_{rB} = 2$. Les deux cylindres ne sont pas conducteurs. Comme précédemment, nous travaillons à $f = 300\ MHz$, et les 20 antennes sont équiréparties sur un cercle de 1.5 m de rayon, centré sur l'origine du repère. En regardant les valeurs propres, nous constatons qu'il y en a quatre qui émergent. La première vaut $2.51\ 10^6$, la deuxième $1.87\ 10^5$, la troisième $7.75\ 10^2$, et la quatrième $6.14\ 10^2$. Nous devons donc observer, en utilisant $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$ comme vecteurs courants, un champ isotrope sur A et B respectivement, car les deux premières valeurs propres sont beaucoup plus grandes que les deux suivantes. Puis en utilisant $\mathbf{V}_3$ et $\mathbf{V}_4$ nous devons obtenir des champs anisotropes de A et/ou de B, qui correspondent aux développements d'ordre supérieur du champ diffracté. Les champs retournés sont représentés sur la Fig. 4.5. La première carte (a) est la carte du champ retourné en utilisant $\mathbf{V}_1$ comme vecteur courant, et nous obtenons un champ focalisant sur A. La deuxième (b) représente le champ retourné avec $\mathbf{V}_2$ comme vecteur courant, et il focalise sur B. Nous vérifions bien qu'ils sont tous les deux isotropes, chacun associé à un diffuseur. Enfin, la troisième carte (c) nous montre le champ retourné lorsque l'on utilise $\mathbf{V}_3$ comme vecteur courant, et nous obtenons un champ anisotrope de A. Les autres vecteurs propres nous donnent des champs anisotropes, soit de A, soit de B, et nous ne les représentons pas ici.

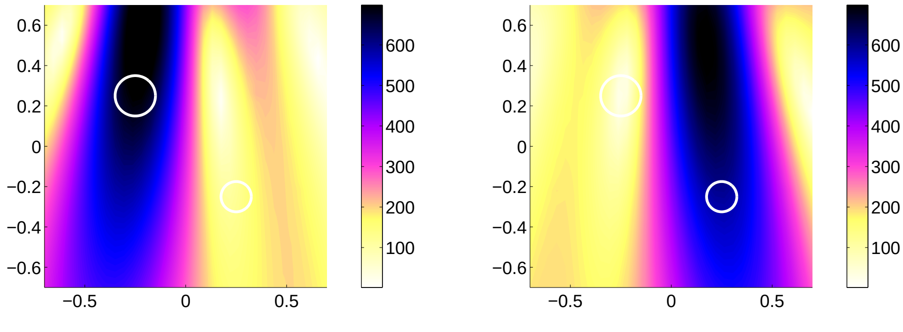


(a) (b) (c)

FIG. 4.5 – *Cartes de champs retournés pour différents vecteurs propres. (a) : utilisation de $\boldsymbol{V}_1$, et focalisation sur le diffuseur* A. *(b) : utilisation de $\boldsymbol{V}_2$, et focalisation sur le diffuseur* B. *(c) : utilisation de $\boldsymbol{V}_3$, et observation d'un champ anisotrope de* A.

Résultats en configuration «objets enfouis»

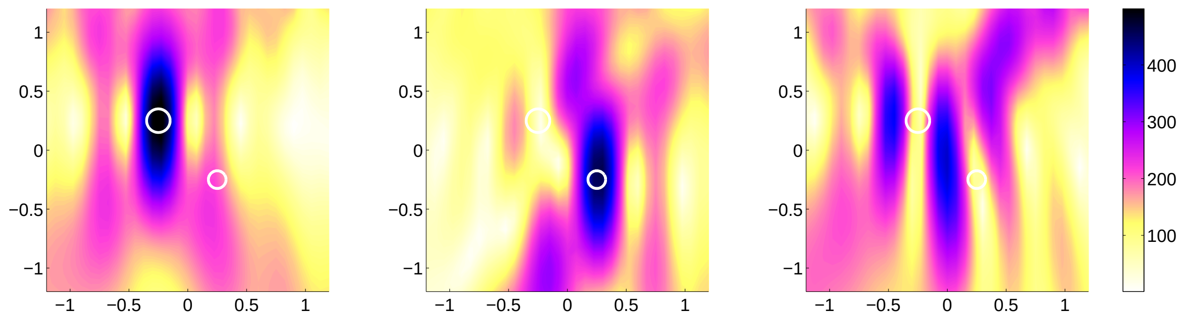
Tout d'abord, nous plaçons dans le milieu inférieur de permittivité $\varepsilon_{r2} = 3$ deux petits diffuseurs. Le plus gros des deux, A, a un rayon de 5 cm, et sa permittivité relative vaut $\varepsilon_{rA} = 1$. Il représente un trou d'air. Le second, B, plus petit et moins contrasté, a un rayon de 2.5 cm, et sa permittivité relative vaut $\varepsilon_{rB} = 2$. La ligne de mesure de 2 m de long, et se trouve à 10 cm au-dessus de l'interface. Le centre du diffuseur A est placé à 1.05 m sous l'interface et à 25 cm à gauche du centre de la ligne de mesure. Le centre du diffuseur B est placé à 1.55 m sous l'interface et à 25 cm à droite du centre de la ligne de mesure. Dans cette configuration, ces deux petits diffuseurs ne doivent pas interférer entre eux, et nous devons être capables de les détecter et de les localiser. Une fois le problème direct résolu pour toutes les incidences, nous calculons l'O.R.T., puis ses valeurs propres. Il y en a 2 qui émergent qui valent $1.05\ 10^4$, et $1.09\ 10^2$. La troisième valant $7.44\ 10^{-1}$, nous ne la prenons pas en compte. Les résultats sont reportés sur la Fig. 4.6. Le vecteur propre $\mathbf{V}_1$ associé à la plus grande valeur propre nous donne un champ symétrique focalisant sur le diffuseur A (a), et $\mathbf{V}_2$, associé à la seconde valeur propre, un champ symétrique focalisant sur le diffuseur B (b). Nous constatons que les diffuseurs sont parfaitement localisés en x, mais que nous faisons une erreur sur l'ordonnée des cylindres.



(a) (b)

FIG. 4.6 – *Cartes de champs retournés pour différents vecteurs propres. (a) : utilisation de* $\boldsymbol{V}_1$*, et focalisation sur le diffuseur* A. *(b) : utilisation de* $\boldsymbol{V}_2$*, et focalisation sur le diffuseur* B.

Pour améliorer la localisation, nous allongeons la ligne de mesure, sans changer le reste de la configuration. Cette fois-ci, la ligne de mesure Γ est de 6 m de long. Les 2 premières valeurs propres valent alors $3.19\ 10^3$, et $4.5\ 10^1$. Cette fois ci, la troisième valeur propre vaut 1.34, et elle n'est plus négligeable devant la deuxième. Pour vérifier si la localisation est meilleure, regardons la Fig. 4.7, sur laquelle nous représentons les cartes de champs retournés que nous obtenons en utilisant respectivement $\mathbf{V}_1$ pour (a), $\mathbf{V}_2$ pour (b), et $\mathbf{V}_3$ pour (c). Sur (a) et (b), nous avons des champs symétriques pour chacun des diffuseurs, et sur (c), nous obtenons un champ antisymétrique de A. De plus, nous constatons que les deux diffuseurs sont parfaitement localisés, aussi bien en abscisse qu'en ordonnée.



(a) (b) (c)

FIG. 4.7 – *Cartes de champs retournés pour différents vecteurs propres. (a) : utilisation de* $\boldsymbol{V}_1$*, et focalisation sur le diffuseur* A. *(b) : utilisation de* $\boldsymbol{V}_2$*, et focalisation sur le diffuseur* B. *(c) : utilisation de* $\boldsymbol{V}_3$*, et observation d'un champ antisymétrique de* A.

Ensuite, nous utilisons des diffuseurs plus gros. Toute la configuration reste inchangée, exceptée la taille des cylindres. Le rayon du cylindre A passe de 10 à 20 cm, et celui de B de 7.5 à 15 cm. Cette fois-ci, les diffuseurs sont couplés, c'est-à-dire que nous ne pouvons pas négliger l'interaction électromagnétique entre eux. Ainsi, le champ diffracté mesuré sur les récepteurs ne sera pas la somme des champs diffractés par chacun des diffuseurs pris séparément. Les 4 plus grandes valeurs propres valent respectivement 6.17 10^4, 8.55 10^3, 2.27 10^3, et 2.07 10^2. La suivante est de l'ordre de grandeur de l'unité. Les champs retournés en utilisant les vecteurs propres $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, et $\mathbf{V}_4$ comme vecteurs courants, sont représentés sur la Fig. 4.8. Sur la carte (a), nous voyons le champ symétrique focaliser sur le diffuseur A. Sur (b), nous constatons que les diffuseurs sont couplés. En effet, nous aurions dû retrouver ici, soit le champ symétrique de B, soit le champ antisymétrique de A. Or, en regardant bien, nous constatons que ces deux champs se sont mélangés. En effet, nous voyons un maximum de signal sur l'emplacement de B, et un champ qui ressemble à un champ antisymétrique autour de A. La carte (c) est plus difficile à interpréter. Là encore, il s'agit d'un mélange, et la distinction entre chaque contribution est délicate. Quant à la carte (d), elle nous montre que le champ antisymétrique de B, et le champ antisymétrique d'ordre supérieur de A se sont eux aussi mélangés. En effet, nous voyons deux lobes entourant un minimum au voisinage de B et aussi quatre lobes entourant A.

Nous venons de présenter la méthode D.O.R.T., qui nous permet de dénombrer et de localiser avec précision un ou plusieurs diffuseurs présents dans une zone test, à partir d'un champ diffracté harmonique. De plus, sur chacun de nos exemples, nous avons été capables de synthétiser une onde qui focalise de manière sélective sur chacun des diffuseurs excepté lorsque nous travaillons à haute fréquence pour deux diffuseurs comme exposé sur la Fig. 4.8. Dans ce cas, il faudrait effectuer l'étude à plusieurs fréquences. Regardons ce qui se passe pour des données transitoires.

4.3 Retournement temporel

La méthode D.O.R.T. n'a pas réellement d'équivalent en régime transitoire. Cependant, les propriétés d'invariance par changement de t en $-t$ dans l'équation des ondes (4.1) permettent par retournement temporel de synthétiser une onde temporelle qui va focaliser sur les cibles présentes dans un domaine de recherche.

4.3.1 Principe de la méthode

Le retournement temporel nécessite des données temporelles. Nous considérons une seule source qui rayonne un champ incident transitoire. Ainsi, sur chacun des N récepteurs, nous mesurons un

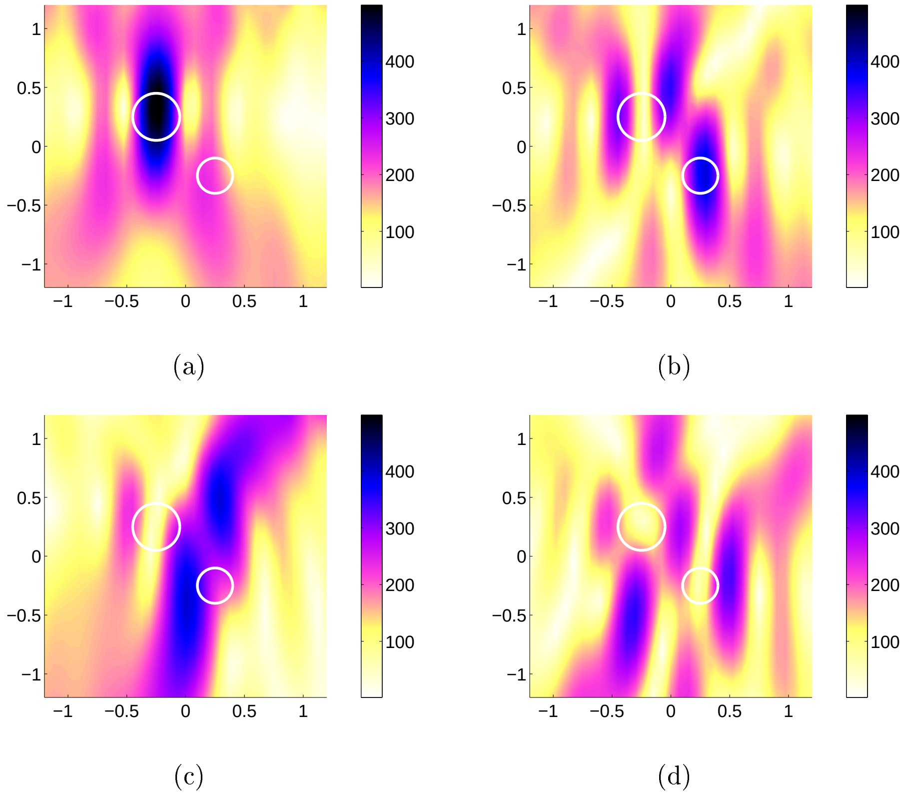


FIG. 4.8 – *Cartes de champs retournés pour différents vecteurs propres. (a) : utilisation de* $\boldsymbol{V}_1$*, et focalisation sur le diffuseur* A*. (b) : utilisation de* $\boldsymbol{V}_2$*, et mélange entre une onde focalisant sur le diffuseur* B*, et un champ antisymétrique de* A*. (c) : utilisation de* $\boldsymbol{V}_3$*. (d) : utilisation de* $\boldsymbol{V}_4$*, et mélange entre un champ antisymétrique d'ordre supérieur de* A*, et le champ antisymétrique de* B*.*

champ diffracté dans le domaine temporel. Pour synthétiser cette onde focalisante, il suffit de faire se rétro-propager les champs diffractés après avoir changé le sens du temps : les récepteurs deviennent sources et émettent en même temps le champ diffracté temporel qu'ils ont reçu, après avoir changé t en $-t$. Il s'agit alors d'un problème de propagation. Le jeu des interférences des N champs rétro-propagés va synthétiser une onde focalisante successivement dans le temps sur toutes les cibles présentes.

D'un point de vue numérique, il suffit de considérer, pour chacun des N récepteurs, repérés par l'indice m (m variant de 1 à N), la transformée de Fourier $\tilde{E}^{\mathrm{d}}_m$ du champ diffracté après avoir changé t en $-t$. Pour le récepteur m, nous obtenons ainsi P champs harmoniques $\tilde{E}^{\mathrm{d}}_{m,p}$, où P correspond au nombre de fréquences que l'on considère, pour que le spectre du signal soit bien représenté. Nous contruisons ensuite le champ $\tilde{E}_p$ de la manière suivante :

$$\tilde{E}_p = i\omega_p \sum_{l=1}^{L} \mathbf{M}\tilde{E}^{\mathrm{d}}_{l,p}. \tag{4.5}$$

Bien évidemment, il faut utiliser la fonction de Green $\mathbf{M}$ associée à la configuration étudiée.

Enfin, en considérant la transformée de Fourier inverse de $\tilde{E}_p$, nous obtenons pour tous les points, un champ temporel $\mathcal{E}^{\mathrm{retro}}$, qui doit focaliser sur les cibles.

4.3.2 Résultats numériques

Nous allons maintenant exposer des cartes de champs retournés établies à des instants judicieusement choisis. Nous allons voir naître une onde qui va ensuite focaliser sur le diffuseur avant de s'évanouir.

Résultats en configuration «espace homogène»

Dans cette partie, nous retournons temporellement des champs électriques mesurés dans la chambre anéchoïque. Nous utilisons les champs diffractés par l'objet homogène décrit sur la Fig. 2.15-(a), éclairé par l'impulsion gaussienne (2.16) centrée en $f_0 = 4.5$ GHz. Les champs diffractés sont représentés sur la Fig. 2.19. Une fois en possession des champs électriques, nous les retournons temporellement, puis ré-émettons, dans le domaine fréquentiel, pour pouvoir construire les interférences, avant de revenir dans le domaine temporel. Les résultats sont exposés sur les cartes de champs de la Fig. 4.9 où nous reportons le module du champ retourné. Nous retrouvons alors les trois phases attendues, à savoir la naissance de l'onde (a), la focalisation sur le diffuseur (b), puis l'évanouissement (c).

Nous remarquons que la tache de focalisation est du même ordre de grandeur que l'objet. Avec la zone d'observation choisie, nous ne pouvons pas voir naître l'onde retournée sur les récepteurs. Le signal semble venir des récepteurs situés en face de la source (qui est placée 1.815 m au-dessus de la cible). En fait, l'onde arrive de tous les récepteurs en même temps, mais nous avons pu observer sur la Fig. 2.19 que le signal est beaucoup plus important sur les récepteurs situés en face de la source que sur ceux placés aux angles θ_r voisin de $\pm\frac{\pi}{2}$. Enfin, nous pouvons constater que cette méthode est robuste vis-à-vis du bruit de mesure ($err_t \approx 5\%$).

Après avoir appliqué le retournement temporel à la configuration «espace homogène», intéressons nous maintenant au cas de le configuration «objets enfouis».

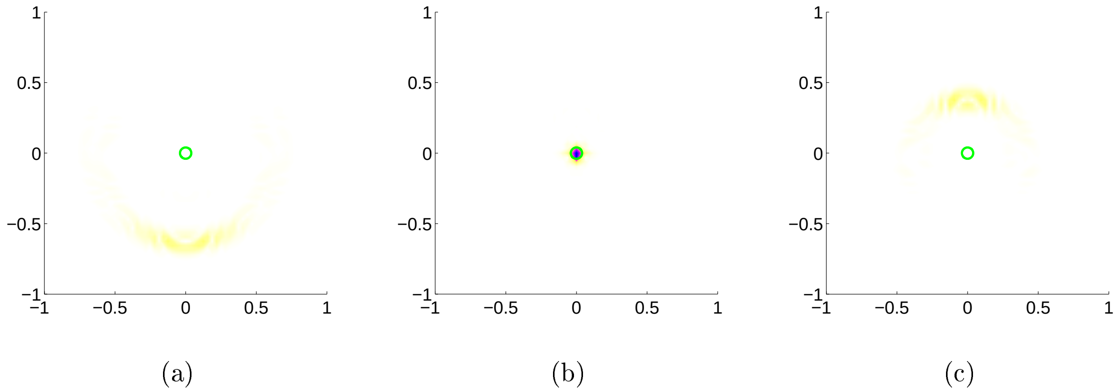


FIG. 4.9 – *Cartes de champ retourné. (a) : naissance de l'onde, $t = 36.4.7$ ns. (b) : focalisation de l'onde rétro-diffusée sur le diffuseur, $t = 39.5$ ns. (c) : évanouissement de l'onde rétro-diffusée, $t = 40.8$ ns.*

Résultats en configuration «objets enfouis»

Pour commencer, nous retournons les champs calculés précédemment avec le diffuseur de conductivité $\sigma = 40$ S.m^{-1} et exposés sur la Fig. 2.27. Comme pour la configuration «espace homogène», nous nous attendons à voir l'onde arriver de l'interface, focaliser sur le diffuseur, et s'évanouir. Les résultats sont reportés sur la Fig. 4.10. L'onde arrive (a), focalise avec un maximum de signal sur la cible (b), puis s'évanouit (c). L'instant de la focalisation correspond à un maximum de signal, mais aussi à un changement de convexité du front d'onde. En effet, avant, l'onde est concave, et après, elle est convexe. Ceci est dû à la configuration limitée en aspect.

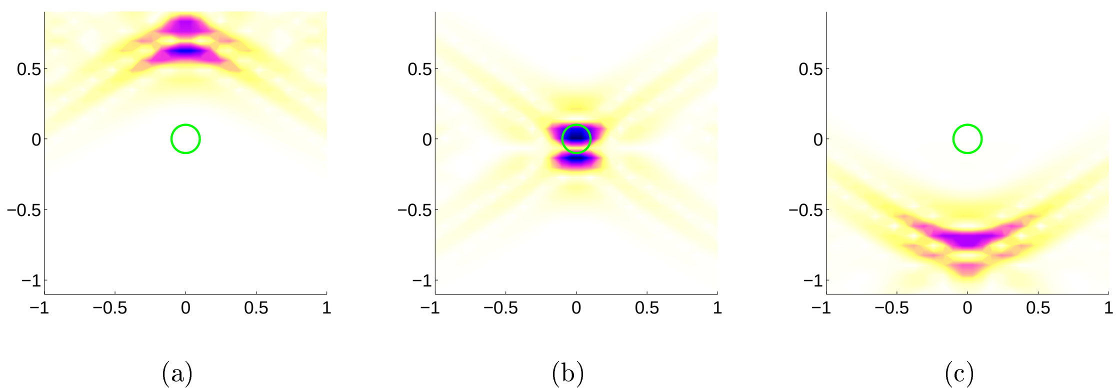
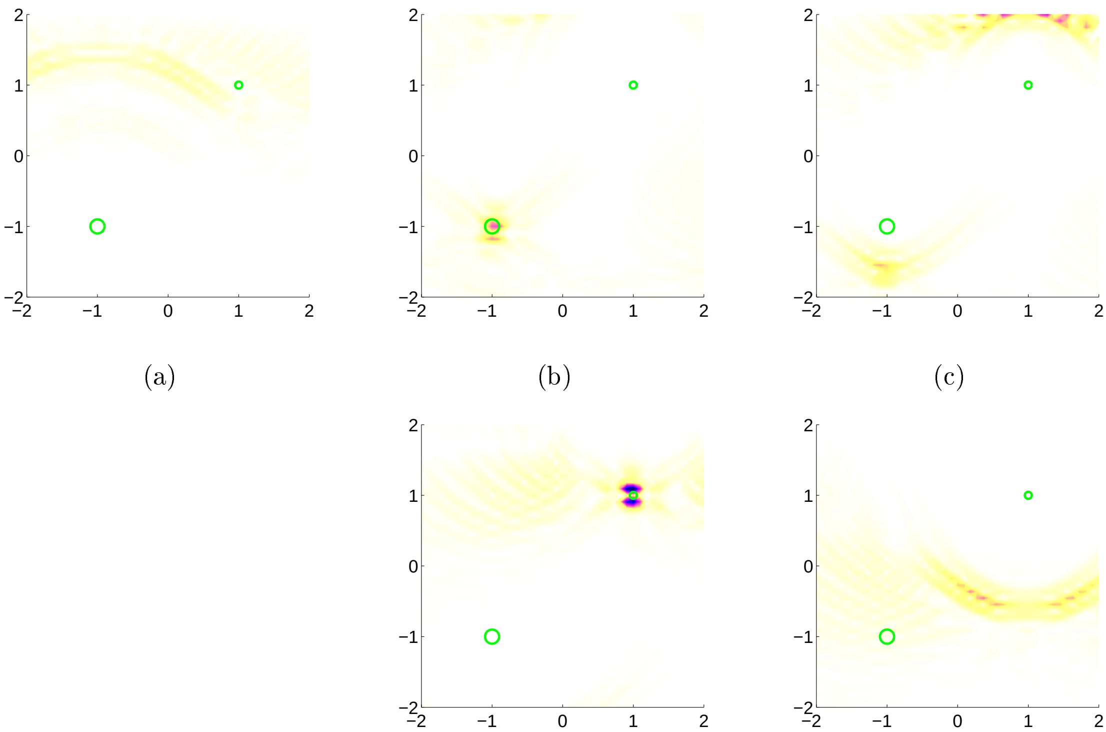


FIG. 4.10 – *Cartes de champ retourné. (a) : naissance de l'onde, $t = 170$ ns. (b) : focalisation de l'onde rétro-diffusée sur le diffuseur, $t = 174$ ns. (c) : évanouissement de l'onde rétro-diffusée, $t = 178$ ns.*

Ensuite, nous retournons les champs diffractés qui correspondent aux cas des deux diffuseurs, et qui sont reportés sur la Fig. 2.29. Nous nous attendons à voir deux ondes : la première doit focaliser sur le diffuseur le plus profond A, et la seconde sur le diffuseur le moins profond B. En effet, quelque soit le récepteur, le champ diffracté par B arrive dans le temps avant le champ diffracté par A, car la distance source-B-récepteur est plus petite que la distance source-A-récepteur. Comme nous retournons le temps, l'ordre des ondes rétro-diffusées est alors inversé. Le résultats sont reportés sur la Fig. 4.11 sur laquelle nous avons reporté les cartes de champs correspondant à la naissance de la première onde (a), à la focalisation sur le diffuseur A (b), à la naissance de la seconde onde (c), à la focalisation sur le diffuseur B (d), et enfin à l'évanouissement de l'onde (e).



(a) (b) (c) (d) (e)

FIG. 4.11 – *Cartes de champ retourné. (a) : naissance de l'onde, $t = 268$ ns. (b) : focalisation de l'onde rétro-diffusée sur le diffuseur* A*, $t = 282$ ns. (c) : évanouissement de la première onde rétro-diffusée, $t = 285$ ns. (d) : focalisation de l'onde rétro-diffusée sur le diffuseur* B *,$t = 292$ ns. (e) : évanouissement de la seconde onde rétro-diffusée, $t = 301$ ns.*

Pour tester la robustesse du retournement temporel vis-à-vis du bruit, nous présentons les cartes de champs obtenues par retournement temporel dans une configuration où les diffuseurs sont enfouis dans un milieu bruité. Les champs diffractés ont été obtenus par F.D.T.D., et la configuration est détaillée dans [10]. Deux diffuseurs A et B infiniment conducteurs sont placés sous l'interface. Le premier, de rayon 10 cm, est à 50 cm sous l'interface, et le second, de rayon 5 cm, est à 30 cm sous l'interface. Sur la ligne de mesure de 1 m de long, située à 10 cm au-dessus de l'interface, 10 antennes sont équiréparties. Le milieu supérieur est de l'air, et le sous-sol un milieu de permittivité relative $\varepsilon_{r2} = 3$. Le bruit de structure est réalisé à l'aide de 8000 diffuseurs ponctuels placés de manière aléatoire dans le milieu inférieur. Ils ont une permittivité de 5, et une conductivité de 1.10^2 $\mathrm{S.m^{-1}}$. La source est située sur le premier récepteur, à l'extrémité gauche de la ligne, et émet un champ de la forme de (2.18), avec une fréquence $f0 = 375$ MHz. Le champ électrique diffracté, filtré temporellement pour séparer la contribution directe ($source - récepteur$) et la contribution de l'interface, reçu sur le récepteur 10 à l'extrémité droite de la ligne, est représenté sur la Fig. 4.12. Nous constatons que les échos de deux diffuseurs ne sont pas séparés.

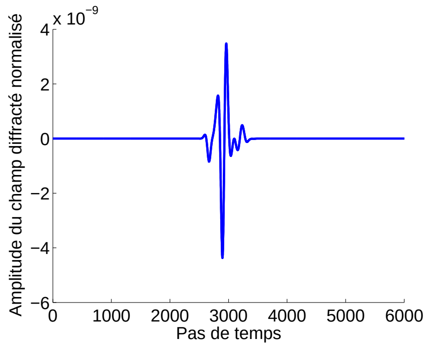


FIG. 4.12 – *Champ électrique diffracté calculé par F.D.T.D. sur le récepteur* 10 *pour la géométrie milieu bruité.*

Les résultats du retournement temporel sont reportés sur la Fig. 4.13. Une première onde arrive de l'interface (a) et focalise sur le diffuseur B (le moins enfoui) (b) pendant qu'une seconde apparaît près de l'interface. Puis, nous voyons la première onde s'évanouir, et la seconde se diriger vers le diffuseur le plus profondément enfoui (c). Cette seconde onde focalise sur A (d), puis s'évanouit (e). Ce résultat est surprenant, car, comme nous l'avons précisé pour l'exemple précédent, l'onde aurait dû focaliser en premier sur A. Ceci est peut être dû au fait que les champs diffractés par les deux objets ne sont pas séparables l'un de l'autre, comme nous le constatons sur la Fig. 4.12. Il faudrait alors soit considérer une ligne de mesure plus longue, soit coupler cette approche avec une méthode harmonique, telle que la méthode D.O.R.T.. Cependant, bien que les champs diffractés par chacun des cylindres ne soient pas séparables, le retournement temporel fournit deux ondes distinctes, qui focalisent sur chacun des deux diffuseurs.

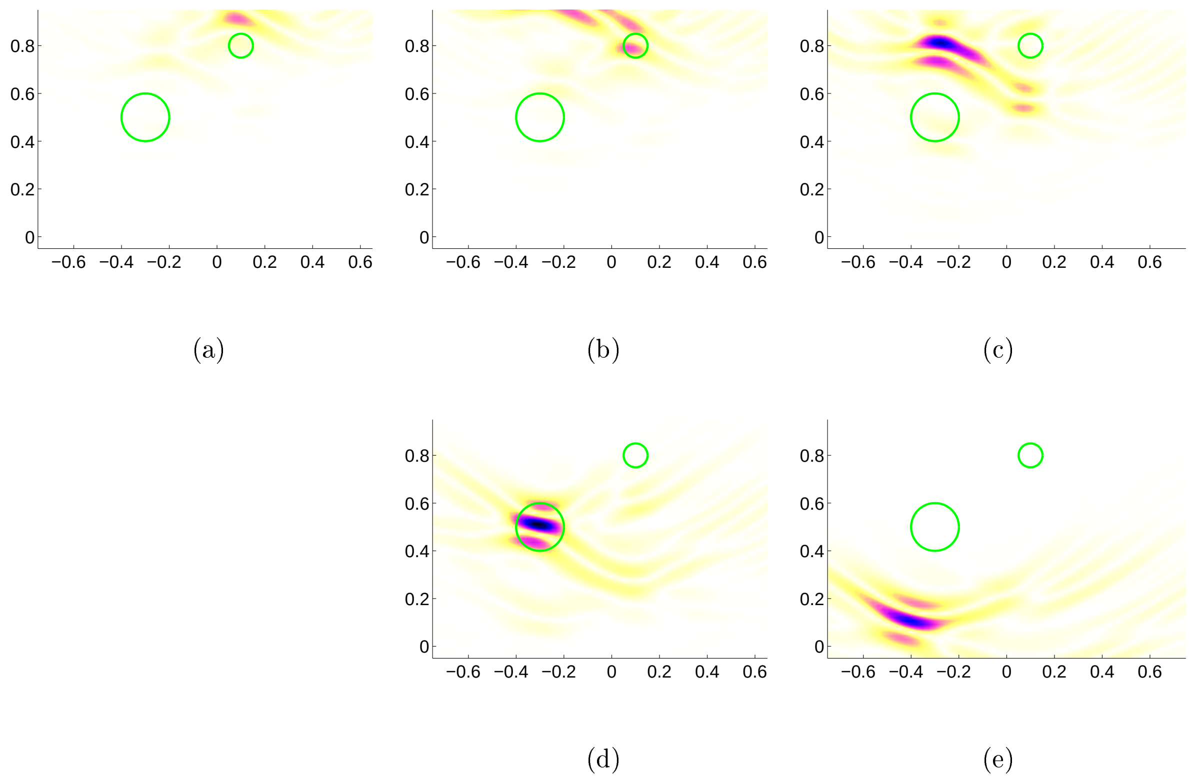


FIG. 4.13 – *Cartes de champ retourné. (a) : naissance de l'onde. (b) : focalisation de l'onde rétro-diffusée sur le diffuseur* B*, et naissance d'une seconde onde. (c) : évanouissement de la première onde rétro-diffusée. (d) : focalisation de l'onde rétro-diffusée sur le diffuseur* A*. (e) : évanouissement de la seconde onde rétro-diffusée.*

Là encore, dans tous les exemples exposés, nous avons été capables de synthétiser une onde qui focalise de manière sélective sur les diffuseurs (car ils sont suffisamment éloignés), même si les champs diffractés par les deux diffuseurs n'étaient pas séparables.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé, pour les deux configurations d'étude, des méthodes permettant de dénombrer et de localiser des diffuseurs à partir de la mesure d'un champ diffracté. Nous pouvons ainsi définir la taille du domaine Ω à l'intérieur duquel les diffuseurs sont supposés être confinés. Mais surtout, nous avons synthétisé des ondes qui focalisent sur les diffuseurs. Nous sommes ainsi capables d'apporter une part importante d'énergie électromagnétique sur les cibles.

Une approche harmonique, la méthode D.O.R.T., a été présentée. Elle permet de compter et de localiser les cibles à partir de l'étude des valeurs propres et des vecteurs propres de l'Opérateur de Retournement Temporel. Ce qui nous intéressera plus particulièrement par la suite est en fait le champ focalisant $E^{\mathrm{inc;dort}}$.

Nous avons ensuite proposé une approche utilisant des données transitoires. Le retournement temporel nous fournit lui aussi une onde temporelle qui focalise sur les diffuseurs présents dans la zone. Une expérience de retournement temporelle a été effectuée expérimentalement en acoustique [58]. Ceci n'a pas encore pu être réalisé au laboratoire avec des ondes électromagnétiques, car nous ne sommes pas capables de contrôler le rayonnement, et notamment la phase, du réseau d'antennes qui doivent émettre en même temps les champs retournés.

Résultats numériques

Chapitre 5

Inversion harmonique : configuration «objets enfouis»

Sommaire

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté différents algorithmes d'inversion. Pour poser clairement les idées, nous avons considéré que le diffuseur était illuminé par une seule source rayonnant un champ harmonique. Puis, pour enrichir la quantité d'information nécessaire à l'obtention de résultats quantitatifs, nous avons suggéré d'utiliser plusieurs sources en régime harmonique. Nous avons ensuite exposé les modifications pour tenir compte de ce caractère multi-sources.

Nous allons maintenant présenter les résultats que nous obtenons en utilisant des données harmoniques pour les différents algorithmes que nous avons détaillés. Ils ont déjà été utilisés dans la configuration «espace homogène», et validés en inversant des champs mesurés dans la chambre anéchoïque du laboratoire [28]. Ainsi, dans ce chapitre, nous limiterons notre étude à la configuration «objets enfouis».

Dans un premier temps, nous utiliserons des données idéales, non bruitées. Cela nous permettra de vérifier que l'utilisation d'une marche en fréquences [35] pour combiner les propriétés de convergence des algorithmes à basses fréquences, avec le bon pouvoir de résolution des hautes fréquences [34], est essentielle pour pouvoir obtenir des reconstructions précises.

Ensuite, nous nous intéresserons au problème plus compliqué, où un diffuseur est enfoui dans un environnement fortement inhomogène. Nous parlerons de bruit de structure. Pour améliorer la qualité des reconstructions, nous incorporerons dans le processus d'inversion les champs focalisants obtenus par D.O.R.T.. Nous augmenterons ainsi le rapport signal sur bruit en apportant de l'énergie essentiellement sur la cible et ainsi extraire l'information liée au diffuseur.

5.2 Données idéales

Dans ce chapitre, nous allons présenter les reconstructions obtenues en utilisant des données harmoniques. Le diffuseur est éclairé successivement par L sources, générant un champ harmonique. Nous devons alors minimiser la fonction coût définie par la relation (3.27). Commençons par détailler la géométrie.

5.2.1 Géométrie du problème étudié

Nous considérons une interface plane séparant deux demi-espaces. Le milieu supérieur est de l'air, et sa permittivité relative vaut donc $\varepsilon_{r1} = 1$. La permittivité relative du milieu inférieur vaut $\varepsilon_{rb} = 4$. La ligne Γ de 6 m de longueur, comportant $L = 31$ antennes équiréparties, est placée à 10 cm au-dessus de l'interface. Son centre est en $x = 0$. Il est à noter que les antennes sont à la fois sources et récepteurs. Nous travaillons successivement à cinq fréquences : 100, 200, 300, 400, et 500 MHz. Á la plus grande fréquence, la longueur d'onde dans le milieu inférieur vaut $\lambda_{2,min} = 30$ cm. Le centre du domaine de recherche Ω coïncide avec le centre du repère orthonormé, et il est situé 1 m sous l'interface. L'objet à reconstruire est constitué de trois cylindres de section circulaire comme décrit sur la Fig. 5.1. Deux d'entre eux ont un rayon de 10 cm et sont homogènes de permittivité relative $\varepsilon_r = 6$, placés respectivement en $(0.15 \text{ m};\ 0.16 \text{ m})$ et $(-0.15 \text{ m};\ 0.16 \text{ m})$. Le troisième cylindre est un tube de section circulaire, de rayon extérieur 15 cm et de rayon intérieur 7.5 cm. Il est situé en (0 m; -0.1 m), et sa permittivité relative vaut $\varepsilon_r = 6$. Ils sont de l'ordre de grandeur de la plus petite longueur d'onde, et leurs centres sont d'une longueur d'onde.

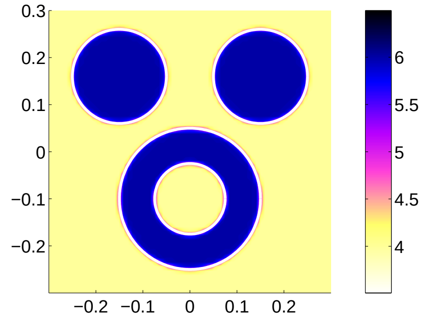


FIG. 5.1 – *Carte de permittivité de l'objet à reconstruire.*

Nous pouvons remarquer que la taille des diffuseurs, leur permittivité et les fréquences utilisées ne nous permettent pas de travailler dans le cadre de l'approximation de Born. En effet, cette approximation n'est valable que pour des objets de petite taille et/ou faiblement contrasté, ce qui n'est pas le cas ici.

Pour résoudre le problème direct, et ainsi avoir les valeurs du champ diffracté $E_l^{\mathrm{d;mes}}$ pour chacune des L sources, nous considérons un domaine carré de 60 cm de coté, discrétisé avec $N_{64} = (64 \times 64)$ mailles. Pour résoudre le problème inverse, la taille du domaine est conservée, mais il est discrétisé avec (31×31) points, de sorte que le problème direct soit environ deux fois plus discrétisé. Il s'agit d'une précaution pour éviter les problèmes numériques liés au crime inverse.

Présentons maintenant les différentes reconstructions obtenues avec les différents algorithmes présentés dans la deuxième partie de ce manuscrit. Nous exposons les résultats obtenus à l'itérée 32. Ce nombre d'itérées maximales est choisi de sorte que la fonction coût atteigne un plateau et ne varie quasiment plus. De plus, en poursuivant le processus d'inversion au-delà de la $32^{\text{ième}}$ itérée, nous n'avons pas observé de changement significatif de nos reconstructions. Nous ne reportons dans ce chapitre que la permittivité. Cependant, comme nous l'avons exposé plus haut dans ce manuscrit, nous reconstruisons aussi la conductivité. Comme dans la majorité des cas celle-ci est quasiment nulle, nous ne la présentons pas ici.

5.2.2 Résultats de l'approche linéarisée

Pour commencer, nous nous intéressons à l'approche linéarisée B.M.. Les résultats obtenus, pour chacune des 5 fréquences, sont reportés sur la Fig. 5.2. L'estimation initiale est donnée à chaque fréquence par la méthode de rétro-propagation rappelée en annexe de ce manuscrit, en ne considérant qu'une seule fréquence ($P = 1$).

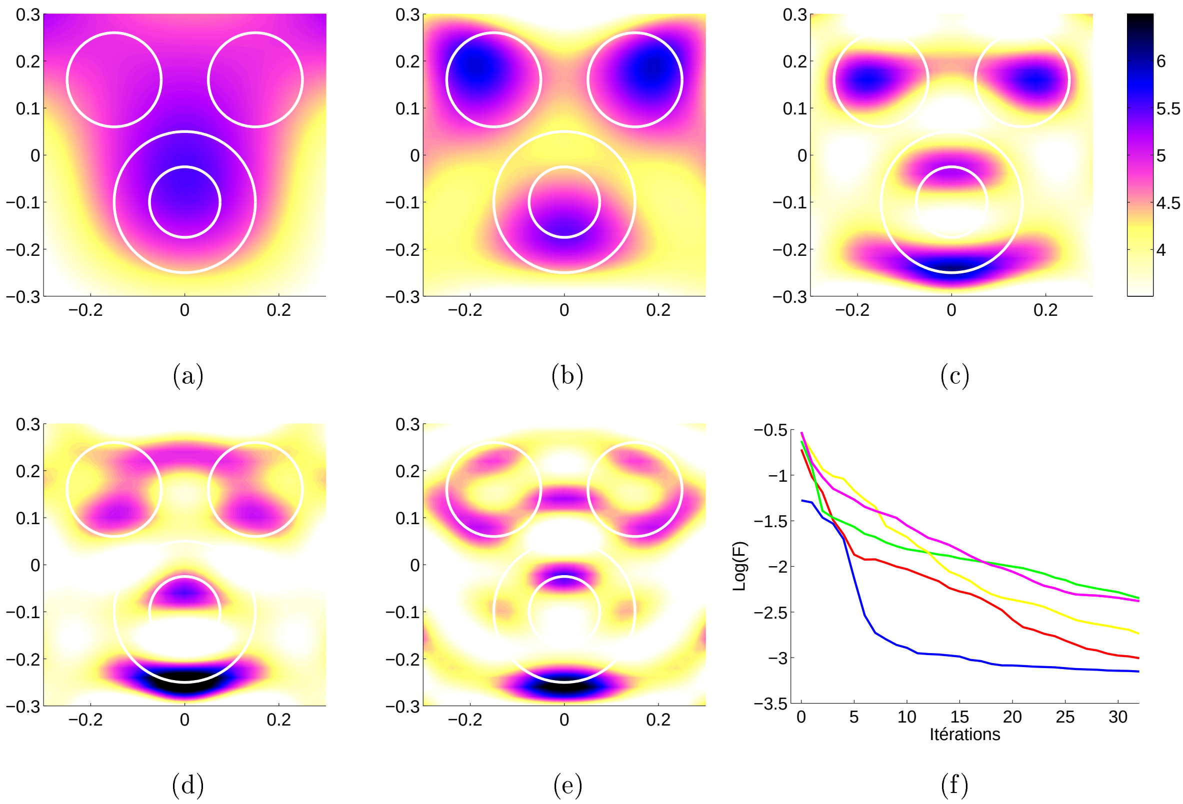


FIG. 5.2 – *Cartes de permittivité reconstruite pour différentes fréquences. (a) : $f = 100$ MHz, (b) : $f = 200$ MHz, (c) : $f = 300$ MHz, (d) : $f = 400$ MHz, et (e) : $f = 500$ MHz. Résultats obtenus à fréquence fixe, en utilisant la B.M.. L'estimation initiale est donnée, à chaque fréquence, par la rétro-propagation. (f) : Évolution des fonctions coûts en fonction des itérées. En bleu : $f = 100$ MHz, en rouge : $f = 200$ MHz, en vert : $f = 300$ MHz, en jaune : $f = 400$ MHz, en magenta : $f = 500$ MHz.*

Nous constatons qu'à basse fréquence (a) et (b) les reconstructions ne sont pas quantitatives. Cependant, les deux cylindres homogènes commencent à se dégager, mais nous ne pouvons en aucun cas les caractériser. Il est bien connu que pour augmenter le pouvoir de résolution, il faut travailler à haute fréquence [34]. Or, plus nous montons en fréquence, et moins l'algorithme converge vers la solution, comme nous le constatons sur Fig. 5.2-(c), (d) et (e). Ainsi, pour tenir compte de ces deux propriétés (convergence à basse fréquence, et bon pouvoir de résolution à haute fréquence), la solution proposée dans [34] consiste à utiliser une marche en fréquences (frequency-hopping) [35] : l'estimation initiale pour résoudre le problème inverse à une fréquence élevée est donnée par la solution obtenue à plus basse fréquence. Pour la fréquence de départ (la plus basse), l'estimation initiale est donnée par la rétro-propagation. Les résultats obtenus avec le frequency-hopping sont reportés sur la Fig. 5.3.

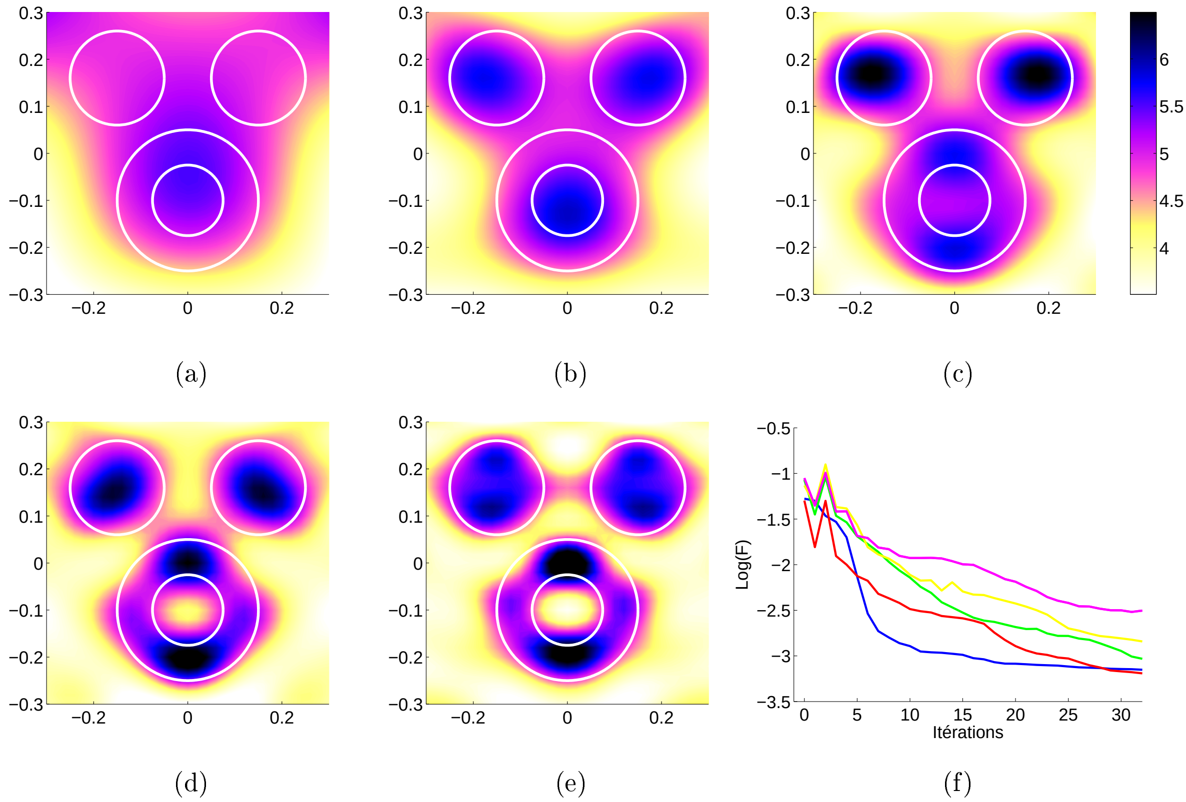


FIG. 5.3 – *Cartes de permittivité reconstruite pour différentes fréquences. (a) : $f = 100$ MHz, et l'estimation initiale est obtenue par la rétro-propagation. (b) : $f = 200$ MHz, et l'estimation initiale est donnée par (a). (c) : $f = 300$ MHz, et l'estimation initiale est donnée par (b). (d) : $f = 400$ MHz, et l'estimation initiale est donnée par (c). (e) : $f = 500$ MHz, et l'estimation initiale est donnée par (d). Résultats obtenus en utilisant la B.M.. (f) : Évolution des fonctions coûts en fonction des itérées. En bleu : $f = 100$ MHz, en rouge : $f = 200$ MHz, en vert : $f = 300$ MHz, en jaune : $f = 400$ MHz, en magenta : $f = 500$ MHz.*

Cette fois-ci, nous constatons l'amélioration du pouvoir de résolution avec la fréquence. Le diffuseur se construit au fur et à mesure des sauts en fréquences. Notons λ la longueur d'onde correspondant à la plus grande fréquence dans le milieu inférieur. À cette fréquence, les bords des deux petits cylindres sont séparés d'environ $\frac{\lambda}{3}$, et ils sont distants d'environ $\frac{\lambda}{6}$ du tube. Nous constatons qu'à 500 MHz (e), les deux petits cylindres sont parfaitement résolus, et que la reconstruction est quantitative. Par contre, pour le tube, nous observons deux points plus brillants où la permittivité est surestimée, alors que sur les bords, elle est légèrement sous-estimée. Puisque toute la configuration est sans perte, ceci est peut être dû à une fréquence de résonance.

Pour se donner une idée de la qualité des reconstructions, nous reportons la valeur des fonctions coûts en fonction des itérées pour les différentes fréquences. Nous vérifions que toutes les fonctions atteignent un palier, ce qui montre que l'algorithme a convergé. De plus, nous vérifions sur la Fig. 5.2-(f) qu'à la première itérée, l'erreur est plus importante à haute fréquence ($\approx 30\%$ pour 500 MHZ) qu'à basse fréquence ($\approx 5\%$ pour 100 MHZ). Nous vérifions ainsi qu'à basse fréquence, l'estimation initiale donne une erreur faible, ce qui assure la convergence de l'algorithme, alors qu'à plus haute fréquence, avec une erreur élevée dès le départ, il ne peut pas converger vers la solution. En regardant la Fig. 5.3-(f), nous constatons que la marche en fréquences permet de diminuer l'erreur à la première itérée, ce qui permet à cet algorithme de converger. Par contre, la convergence ne se fait pas de manière uniforme, et nous observons des oscillations de la fonction coût $\mathcal{F}_n$ en fonction des itérées.

Intéressons-nous maintenant aux reconstructions obtenues avec une approche non linéarisée, la M.G.M..

5.2.3 Résultats de l'approche non linéarisée

Les résultats obtenus avec la M.G.M. à fréquence fixe et en utilisant la marche en fréquences sont reportés sur la Fig. 5.4 et la Fig. 5.5, respectivement.

En regardant les cartes de permittivité, nous tirons les mêmes conclusions que pour l'approche linéarisée : à basses fréquences, la M.G.M. converge, mais son pouvoir de résolution n'est pas suffisant pour séparer les trois cylindres. Cet exemple confirme aussi l'intérêt du frequency-hopping. Pour cette géométrie particulière, la B.M. donne qualitativement de meilleurs résultats. En effet, sur la Fig. 5.5-(e) les deux petits cylindres ne sont plus séparés nettement du tube et la valeur de la permittivité reconstruite est faible par rapport à $\varepsilon_r = 6$. De plus, la permittivité du tube est sous-estimée.

Par contre, pour cet algorithme, la relation de récurrence utilisée pour déterminer le champ

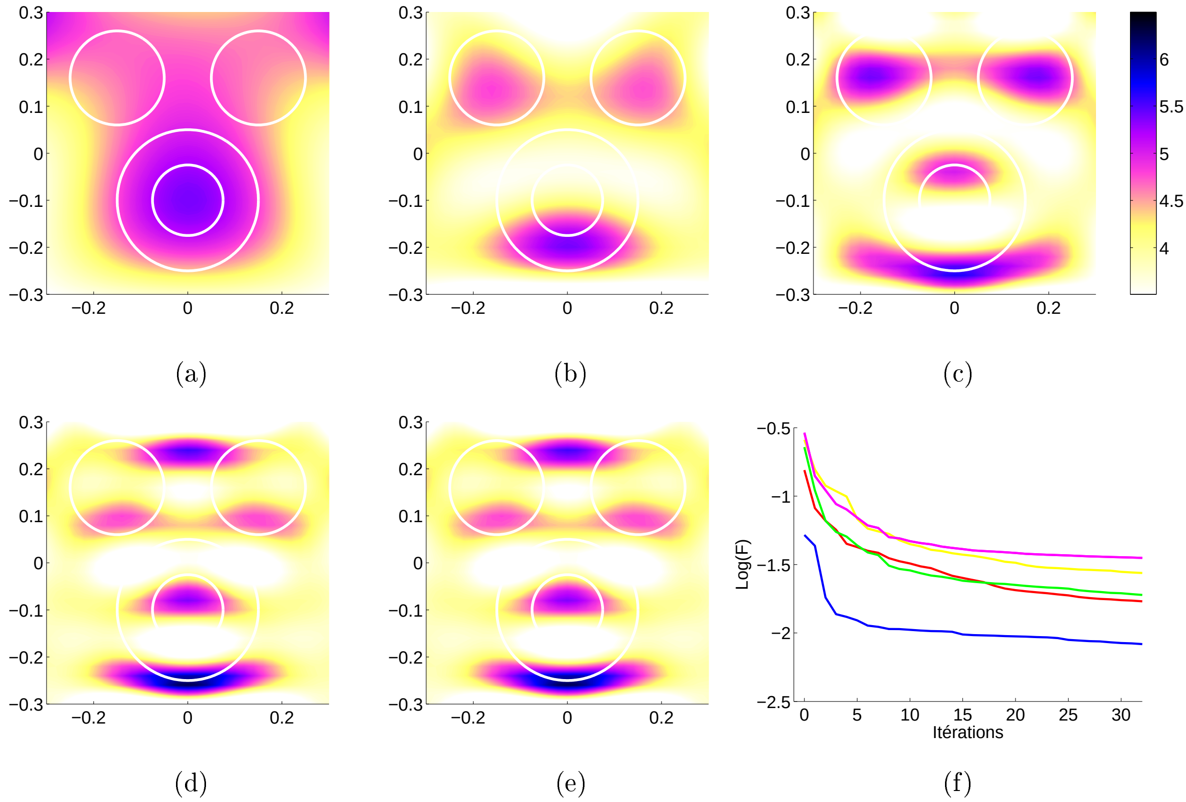


FIG. 5.4 – *Cartes de permittivité reconstruite pour différentes fréquences. (a) : $f = 100$ MHz, (b) : $f = 200$ MHz, (c) : $f = 300$ MHz, (d) : $f = 400$ MHz, et (e) : $f = 500$ MHz. Résultats obtenus à fréquence fixe, en utilisant la M.G.M.. L'estimation initiale est donnée, à chaque fréquence, par la rétro-propagation. (f) : Évolution des fonctions coûts en fonction des itérées. En bleu : $f = 100$ MHz, en rouge : $f = 200$ MHz, en vert : $f = 300$ MHz, en jaune : $f = 400$ MHz, en magenta : $f = 500$ MHz.*

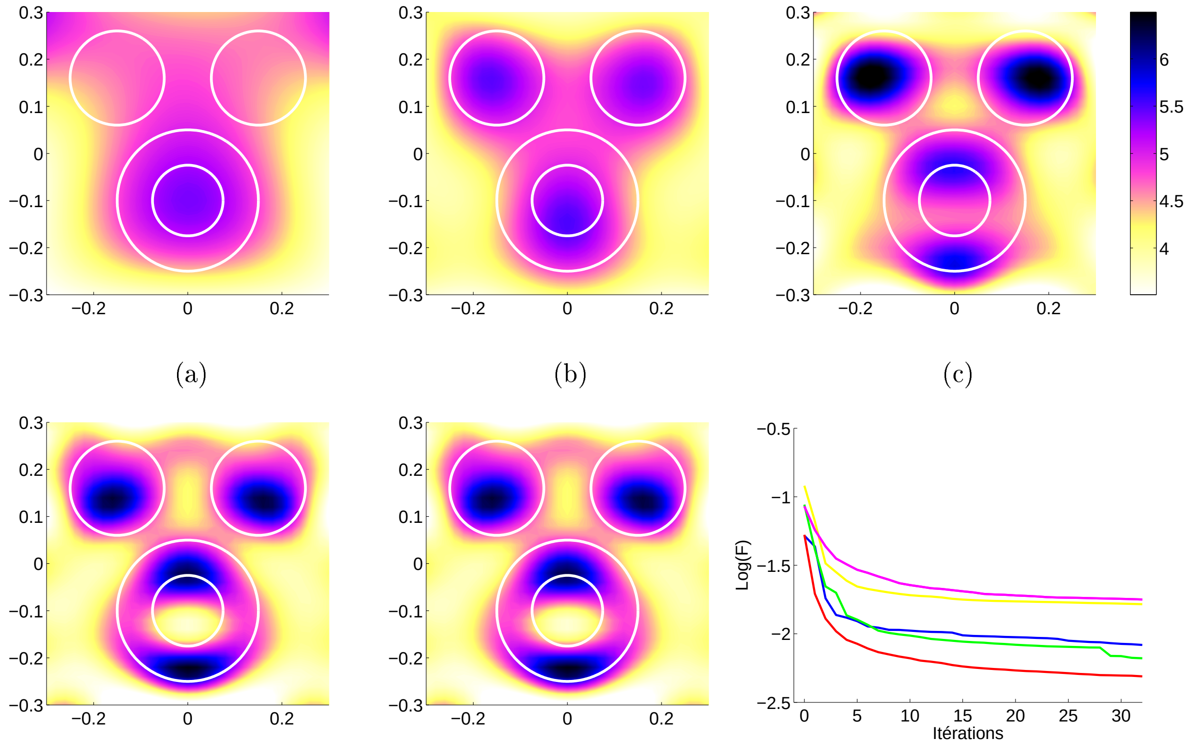
électrique à l'intérieur de l'objet, impose à la fonction coût de décroître. La fonction coût décroît de manière uniforme, comme nous le constatons sur les Fig. 5.4-(f) et 5.5-(f).

Regardons maintenant les reconstructions obtenues avec les deux méthodes hybrides.

5.2.4 Résultats des approches hybrides

Les reconstructions obtenues à fréquence fixe et en utilisant la marche en fréquences sont reportées sur les Fig. 5.6 et Fig. 5.7 pour la M.B.M., et sur les Fig. 5.8 et Fig. 5.9 pour la M.^{2}G.M..

Lorsque l'on travaille à fréquence fixe, les méthodes hybrides ne convergent pas, sauf à basses



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

FIG. 5.5 – *Cartes de permittivité reconstruite pour différentes fréquences. (a) : $f = 100$ MHz, et l'estimation initiale est obtenue par la rétro-propagation. (b) : $f = 200$ MHz, et l'estimation initiale est donnée par (a). (c) : $f = 300$ MHz, et l'estimation initiale est donnée par (b). (d) : $f = 400$ MHz, et l'estimation initiale est donnée par (c). (e) : $f = 500$ MHz, et l'estimation initiale est donnée par (d). Résultats obtenus en utilisant la M.G.M.. (f) : Évolution des fonctions coûts en fonction des itérées. En bleu : $f = 100$ MHz, en rouge : $f = 200$ MHz, en vert : $f = 300$ MHz, en jaune : $f = 400$ MHz, en magenta : $f = 500$ MHz.*

fréquences. En effet, sur les Fig. 5.6-(a) (b) et Fig. 5.8-(a) (b) nous observons les deux petits cylindres apparaître. Par contre, à plus hautes fréquences, ces deux approches ne convergent pas vers la solution.

L'utilisation de la marche en fréquences, dont les résultats sont reportés sur les Fig. 5.7 et 5.9, permet d'augmenter considérablement le pouvoir de résolution. De plus, les détails apparaissent quand la fréquence augmente. Ces deux méthodes hybrides donnent des résultats de bonne qualité. En comparant les cartes de permittivité des Fig. 5.7-(e) et Fig. 5.9-(e), nous constatons que la M.^{2}G.M. donne une reconstruction légèrement meilleure : les deux petits cylindres reconstruits sont homogènes avec la bonne valeur de permittivité. De plus, ils sont mieux séparés l'un de l'autre.

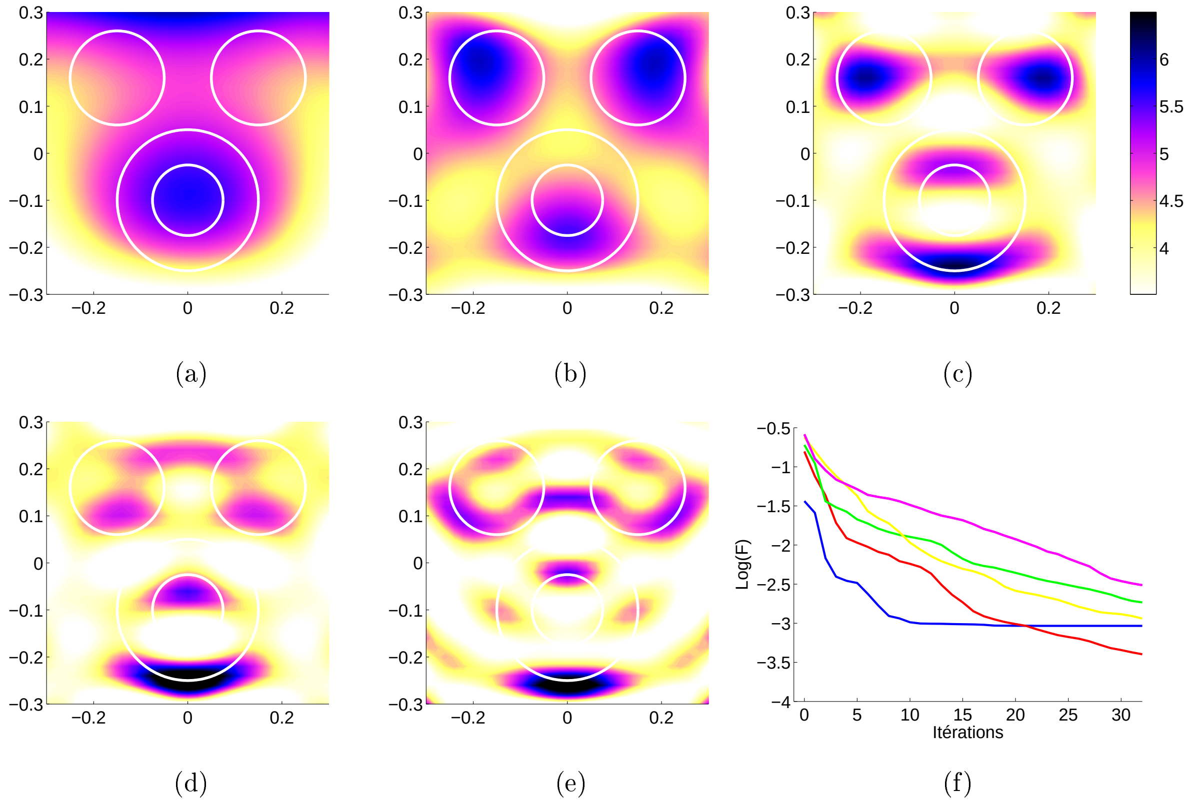


FIG. 5.6 – *Cartes de permittivité reconstruite pour différentes fréquences. (a) : $f = 100$ MHz, (b) : $f = 200$ MHz, (c) : $f = 300$ MHz, (d) : $f = 400$ MHz, et (e) : $f = 500$ MHz. Résultats obtenus à fréquence fixe, en utilisant la M.B.M.. L'estimation initiale est donnée, à chaque fréquence, par la rétro-propagation. (f) : Évolution des fonctions coûts en fonction des itérées. En bleu : $f = 100$ MHz, en rouge : $f = 200$ MHz, en vert : $f = 300$ MHz, en jaune : $f = 400$ MHz, en magenta : $f = 500$ MHz.*

Pour ces deux approches, les relations de récurrence associées au champ électrique imposent aux fonctions coûts de décroître, ce que nous vérifions sur les Fig. 5.7-(f), 5.7-(f),5.8-(f), et 5.9-(f).

De tous les exemples que nous avons présentés ici, nous avons constaté que toutes les méthodes linéarisées, non linéarisées et hybrides donnaient de très bons résultats à condition d'utiliser une marche en fréquences. Nous notons cependant que les reconstructions obtenues à l'aide du M.^{2}G.M. sont légèrement meilleures. Nous avons aussi pu définir une stratégie basée sur le frequency-hopping, sans lequel, soit les différents algorithmes ne convergent pas (hautes fréquences), soit les reconstructions ne sont pas acceptables (basses fréquences). Cette étude a été effectuée en utilisant des données idéales, non bruitées. Il est donc intéressant d'étudier le comportement des différentes

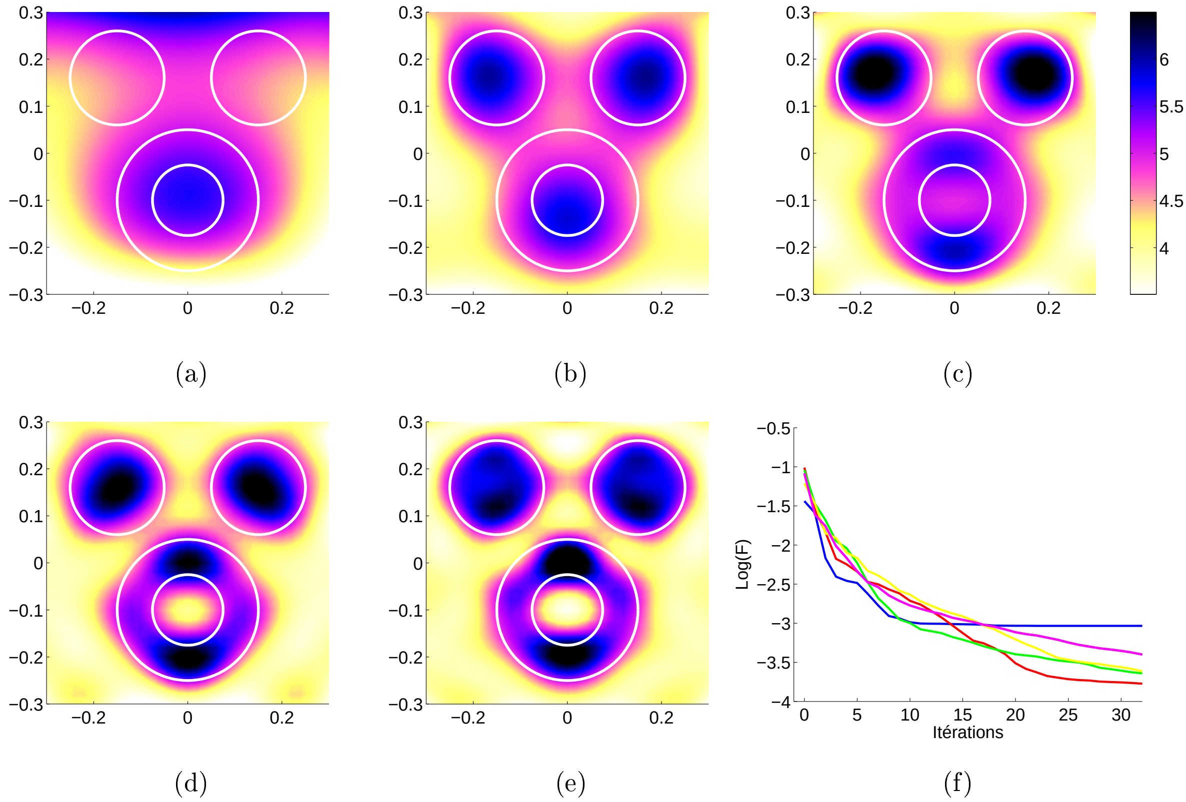


FIG. 5.7 – *Cartes de permittivité reconstruite pour différentes fréquences. (a) : $f = 100$ MHz, et l'estimation initiale est obtenue par la rétro-propagation. (b) : $f = 200$ MHz, et l'estimation initiale est donnée par (a). (c) : $f = 300$ MHz, et l'estimation initiale est donnée par (b). (d) : $f = 400$ MHz, et l'estimation initiale est donnée par (c). (e) : $f = 500$ MHz, et l'estimation initiale est donnée par (d). Résultats obtenus en utilisant la M.B.M.. (f) : Évolution des fonctions coûts en fonction des itérées. En bleu : $f = 100$ MHz, en rouge : $f = 200$ MHz, en vert : $f = 300$ MHz, en jaune : $f = 400$ MHz, en magenta : $f = 500$ MHz.*

méthodes d'inversion lorsqu'elles sont confrontées à des données bruitées.

5.3 Caractérisation en milieu diffusant

Le bruit peut être de plusieurs natures. Nous pouvons par exemple ajouter du bruit directement sur nos données pour simuler le bruit des appareils de mesure. Cette étude a déjà était effectuée dans la configuration «espace homogène». Les différents algorithmes se sont alors révélés être robustes vis-à-vis du bruit lié à la mesure des champs diffractés [28].

Pour l'étude reportée dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés à la configuration «objets

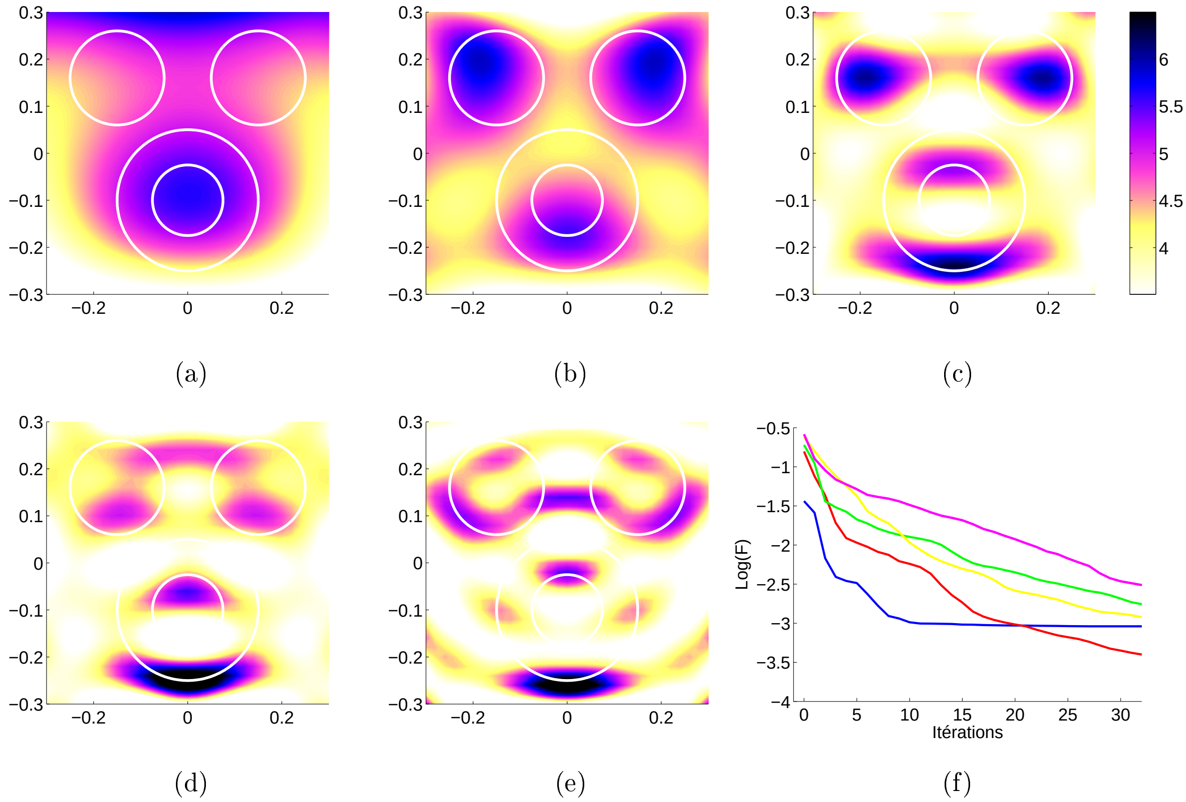


FIG. 5.8 – *Cartes de permittivité reconstruite pour différentes fréquences. (a) : $f = 100$ MHz, (b) : $f = 200$ MHz, (c) : $f = 300$ MHz, (d) : $f = 400$ MHz, et (e) : $f = 500$ MHz. Résultats obtenus à fréquence fixe, en utilisant la M.^{2}G.M.. L'estimation initiale est donnée, à chaque fréquence, par la rétro-propagation. (f) : Évolution des fonctions coûts en fonction des itérées. En bleu : $f = 100$ MHz, en rouge : $f = 200$ MHz, en vert : $f = 300$ MHz, en jaune : $f = 400$ MHz, en magenta : $f = 500$ MHz.*

enfouis» dans un environnement fluctuant. Le diffuseur est alors enfoui dans un milieu hétérogène présentant un certain fouillis. Cela permet de simuler un sondage géologique ou une caractérisation de barres d'acier dans le béton.

Ainsi, nous considérons un milieu inférieur dont la permittivité fluctue aléatoirement entre $(1-b)\varepsilon_{rb}$ et $(1+b)\varepsilon_{rb}$, $\varepsilon_{rb} = 4$, et b est un coefficient réel grace auquel nous controlons l'amplitude des fluctuations. La ligne de mesure Γ de 6 m de long est placée à 10 cm au dessus de l'interface, dans le vide. Un diffuseur cylindrique de section circulaire, de rayon 10 cm, de permittivité $\varepsilon_r = 7$, et non conducteur, est enfoui à 75 cm sous l'interface, dans le milieu fluctuant. Le centre de la cible se trouve à 10 cm à droite du centre de la ligne Γ. Nous avons abandonné le précédent objet et considéré une cible plus «simple» car nous avons reporté la difficulté sur le bruit de structure

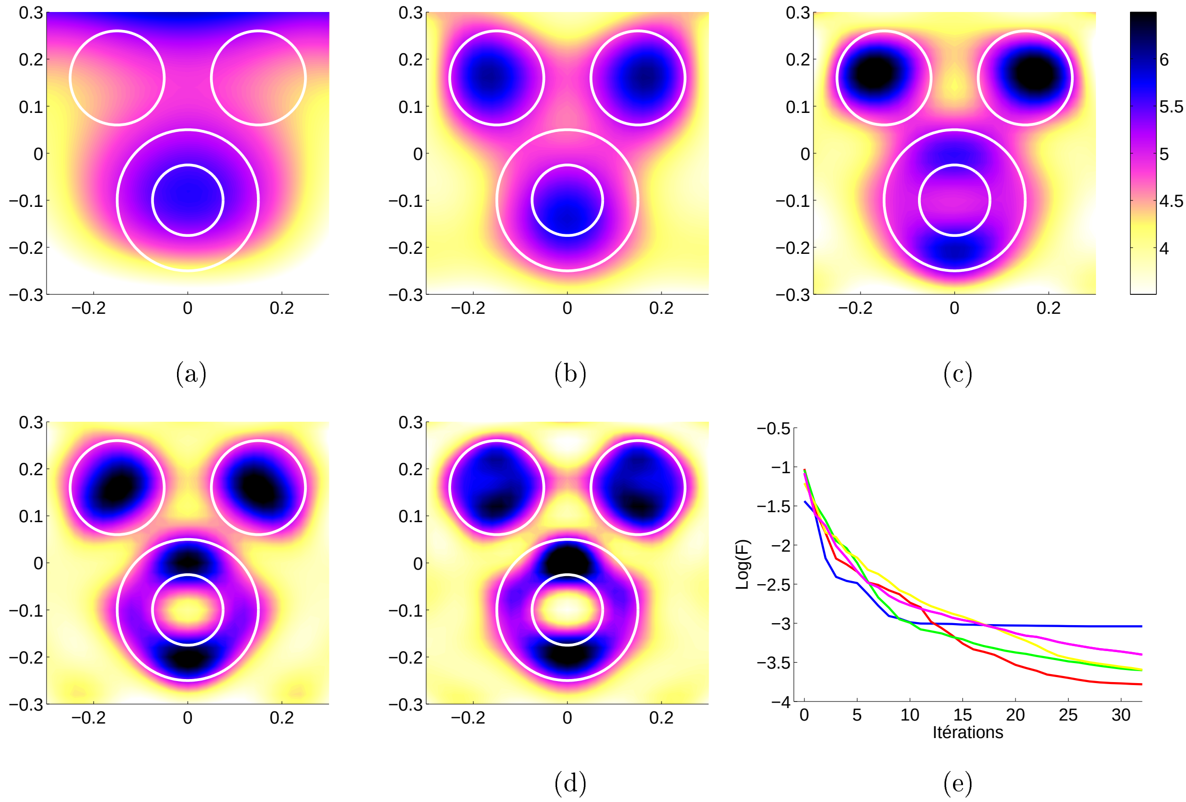
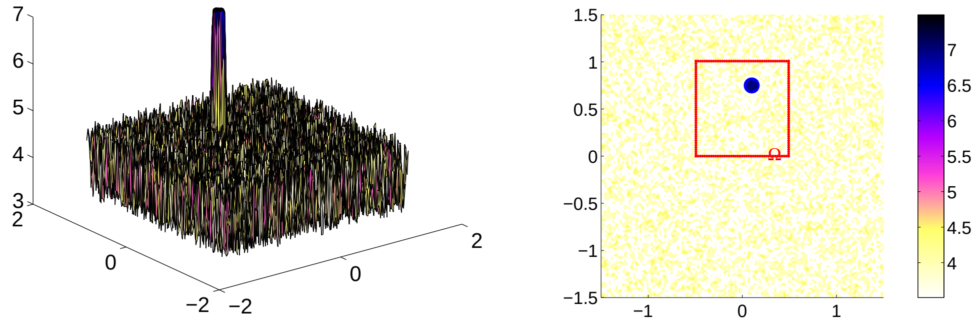


FIG. 5.9 – *Cartes de permittivité reconstruite pour différentes fréquences. (a) : f = 100 MHz, et l'estimation initiale est obtenue par la rétro-propagation. (b) : f = 200 MHz, et l'estimation initiale est donnée par (a). (c) : f = 300 MHz, et l'estimation initiale est donnée par (b). (d) : f = 400 MHz, et l'estimation initiale est donnée par (c). (e) : f = 500 MHz, et l'estimation initiale est donnée par (d). Résultats obtenus en utilisant la M.^{2}G.M.. (f) : Évolution des fonctions coûts en fonction des itérées. En bleu : f = 100 MHz, en rouge : f = 200 MHz, en vert : f = 300 MHz, en jaune : f = 400 MHz, en magenta : f = 500 MHz.*

seulement. Par ailleurs, une étude avec deux objets est reportée dans [37]. Les $L = N = 31$ antennes équiréparties sur Γ jouent le rôle de sources et de récepteurs, et rayonnent des champs harmoniques à trois fréquences : 100, 200, et 300 MHz. La plus petite longueur d'onde dans le milieu inférieur vaut 50 cm, et le diffuseur principal mesure donc un cinqième de cette longueur d'onde. La configuration d'étude est reportée sur la Fig. 5.10, sur laquelle le domaine test Ω, à l'intérieur duquel nous cherchons la permittivité, est signalé. Il ne représente qu'un neuvième de la zone qui a servi à obtenir les données. Ce grand domaine mesure 3 m de coté, et il est discrétisé en (128×128) cellules. Nous pouvons remarquer que le problème que l'on se propose de résoudre, n'a pas de symétrie particulière, à cause du fouillis.

Pour quantifier l'influence sur les champs diffractés du bruit lié au caractère aléatoire de la



(a) (b)

FIG. 5.10 – *Carte de permittivité du problème avec le fouillis ($b = 20\%$). (a) : carte $3-D$. (b) : représentation $2-D$. Le domaine de recherche Ω apparaît en rouge.*

structure du milieu inférieur, nous définissons le niveau de bruit de la façon suivante:

$$err = \frac{\sum_{l=1}^{L} ||E_l^{\mathrm{d;c}} - E_l^{\mathrm{d}}||_\Gamma^2}{\sum_{l=1}^{L} ||E_l^{\mathrm{d}}||_\Gamma^2}. \qquad (5.1)$$

Cette grandeur err permet de chiffrer la différence entre le champ E_l^{d} diffracté sans bruit de structure ($b = 0$) et le champ $E_l^{\mathrm{d;c}}$ diffracté en présence du bruit de structure ($b = 20\%$). Pour cet exemple, le niveau de bruit vaut $err = 33\%$, $err = 49\%$ et $err = 129\%$ pour les trois fréquences utilisées (respectivement 100, 200, et 300 MHz). Nous constatons que le niveau de bruit augmente avec la fréquence. Cela s'explique par le fait que le pouvoir diffractant augmente équalement avec la fréquence. Ainsi, à basse fréquence, les diffuseurs ponctuels qui génèrent le fouillis perturbent légèrement le signal utile : ils sont très petits devant la longueur d'onde. Par contre, quand la fréquence augmente, la longueur d'onde diminue, et les diffuseurs ponctuels deviennent «plus grands» et leur influence se fait plus sentir.

5.3.1 Premiers résultats

Comme nous l'avons remarqué sur les reconstructions obtenues à partir de données idéales, la marche récurrente en fréquences est essentielle. Ainsi, dans cette partie, nous ne présenterons que des résultats utilisant cette technique exceptée pour la première fréquence, pour laquelle l'estimation initiale sera donnée par la rétro-propagation des champs mesurés.

Les résultats obtenus pour les quatre méthodes (M.G.M., B.M., M.B.M. et M.^{2}G.M.) sont reportés sur la Fig. 5.11.

En regardant cette figure, où toutes les reconstructions sont représentées, nous pouvons comparer les différentes méthodes. Tout d'abord, nous constatons que les résultats obtenus avec la M.G.M. sont moins précis que ceux obtenus avec la B.M. et la M.B.M. qui donnent des résultats acceptables. De plus, nous pouvons constater que les meilleurs reconstructions semblent être obtenues avec la M.^{2}G.M., où le cylindre ressort légèrement plus, même s'il est vrai que les cartes de permittivité se ressemblent énormément.

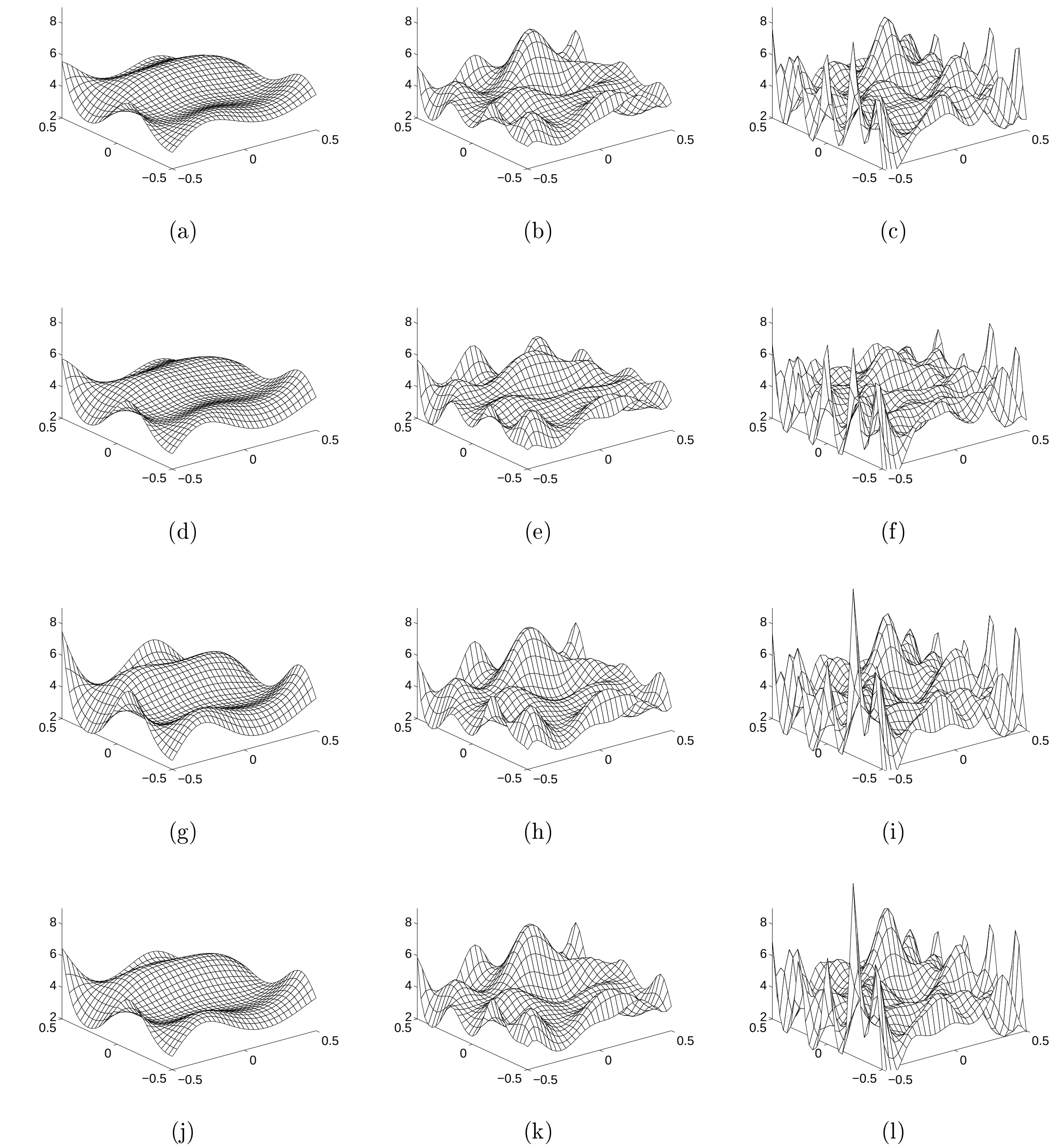
Regardons maintenant les points communs. Dans tous les cas, nous observons des zones de grande permittivité sur les bords du domaine Ω. Nous pouvons les expliquer par la taille limitée du domaine test. En effet, pour calculer les données, nous utilisons le domaine de 3 m de coté représenté sur la Fig. 5.10. Pour les reconstructions, le domaine de recherche Ω n'est qu'une petite partie (1/9) de la zone qui sert à obtenir les champs diffractés. Ainsi, le champ diffracté que nous utilisons en entrée de nos algorithmes contient la contribution de tout le fouillis, et donc le champ diffracté par les diffuseurs ponctuels placés à l'extérieur de Ω. En prenant un domaine de reconstruction de même taille que celui qui sert à générer les données, ces effets de bord devraient disparaître.

L'autre point commun important concerne les oscillations de la permittivité reconstruite que nous observons dans le milieu extérieur au diffuseur. Dans tous les cas, elles nous empêchent d'extraire le diffuseur du fouillis. Il est donc évident que la stratégie de résolution basée exclusivement sur le frequency-hopping ne suffit plus quand le fouillis est très élevé.

Une solution consiste à augmenter le rapport signal sur bruit en apportant de l'énergie exclusivement sur le diffuseur et non sur le fouillis. La méthode D.O.R.T. est *a priori* particulièrement appropriée. En effet, nous avons vu dans le chapitre précédent, qu'avec cette méthode, nous sommes capables de dénombrer et de localiser les diffuseurs, ce qui nous permet de réduire la taille du domaine de recherche Ω. Mais elle fournit aussi et surtout un champ qui focalise sur le diffuseur dont nous pouvons tirer profit pour augmenter le rapport signal sur bruit.

5.3.2 Apport de D.O.R.T.

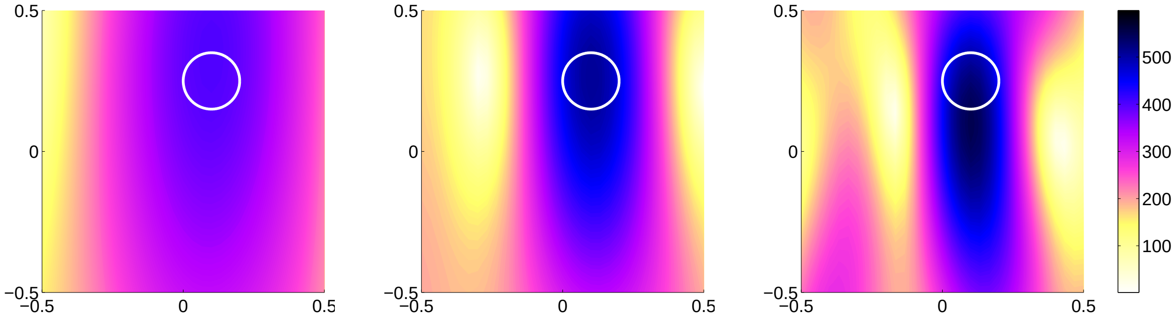
Pour commencer, nous utilisons la méthode D.O.R.T. sur les champs diffractés $E_l^{\mathrm{d;c}}$, et nous obtenons, pour toutes les fréquences, une valeur propre qui émerge. En effet, à 100 MHz, la première valeur propre est environs 23 plus grande que la deuxième(6320 pour la première, et 268 pour la deuxième). Á 200 MHz, le rapport entre les deux premières valeurs propres est de 13 (51371 pour



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (k) (l)

FIG. 5.11 – *Cartes de permittivité reconstruite pour différentes fréquences et différentes méthodes. Première colonne : $f = 100$ MHz. Deuxième colonne : $f = 200$ MHz. Troisième colonne : $f = 300$ MHz. (a), (b) et (c) : B.M.. (d), (e) et (f) : M.G.M.. (g), (h) et (i) : M.B.M.. (j), (k) et (l) : M.^{2}G.M..*

la première, et 3804 pour la deuxième). Enfin, à 300 MHz, les valeurs propres se resserrent et nous obtenons un facteur 2 (36612 pour la première, et 13454 pour la deuxième). Pour la plus haute fréquence, la différence entre les deux premières valeurs propres est moins flagrante, mais l'étude à basse fréquence ne laisse pas de doute : il n'y a qu'un seul diffuseur principal. Sur la Fig. 5.12 nous représentons les champs focalisants obtenus par D.O.R.T. et associés avec la plus grande valeur propre pour les trois fréquences.



(a) (b) (c)

FIG. 5.12 – *Module des ondes focalisantes obtenues à partir de la méthode D.O.R.T. pour les trois fréquences utilisées. (a) : $f = 100$ MHz. (b) : $f = 200$ MHz. (c) : $f = 300$ MHz.*

Nous vérifions sur cette figure que, pour toutes les fréquences, l'énergie est concentrée autour de $x = 0.1$ et donc sur le diffuseur. Nous constatons que la tache de focalisation s'amincit quand la fréquence augmente. Enfin, cette figure nous montre la robustesse de la méthode D.O.R.T. qui, malgré un niveau de bruit très élevé (129%) fournit un champ qui focalise parfaitement sur la cible.

Prise en compte dans l'algorithme

Jusqu'à présent, la méthode D.O.R.T. était uniquement utilisée pour dénombrer et localiser des diffuseurs [10, 12]. Ici, notre idée consiste à utiliser cette onde focalisante comme un champ incident $E_u^{\text{inc;dort}}$ supplémentaire dans les processus d'inversion. L'indice u fait référence au numéro de la valeur propre considérée. En éclairant essentiellement le diffuseur, le champ diffracté $E_u^{\text{d;dort}}$ associé au champ incident $E_u^{\text{inc;dort}}$ comprendra essentiellement le champ diffracté par le diffuseur et peu celui diffracté par le fouillis. Nous augmenterons alors le rapport signal sur bruit, et nous devrions améliorer les reconstructions.

Il est important de remarquer que le calcul du champ diffracté $E_u^{\text{d;dort}}$ ne nécessite pas de résoudre un problème direct. En effet, $E_u^{\text{inc;dort}}$ n'est qu'une combinaison linéaire (4.4) des champs incidents E_l^{inc} qui ont servi pour générer les données $E_l^{\text{d;mes}}$. Par linéarité des équations de Maxwell, le champ diffracté $E_u^{\text{d;dort}}$ est aussi une combinaison linéaire des champs diffractés $E_l^{\text{d;mes}}$, et les coefficients de cette combinaison linéaire sont les mêmes que ceux de (4.4). Ainsi, ce champ diffracté supplémentaire s'écrira :

$$E_u^{\text{d;dort}} = \sum_{l=1}^{L} V_{u,l} E_l^{\text{d;mes}}, \tag{5.2}$$

où, rappelons-le, $V_{u,l}$ correspond à la l ième composante du vecteur propre $\mathbf{V}_u$ considéré.

Pour incorporer cette information supplémentaire dans nos algorithmes d'inversion, nous proposons de construire une seconde fonction coût $\mathcal{F}^{\text{dort}}$ sur le même schéma que (3.6), en utilisant bien évidemment les champs obtenus par D.O.R.T.. Elle s'écrit :

$$\mathcal{F}_n^{\text{dort}}(E_n^{\text{dort}}; \chi_n) = W_\Omega^{\text{dort}} \sum_{u=1}^{U} \| h_{u,n}^{(1),\text{dort}} \|_\Omega^2 + W_\Gamma^{\text{dort}} \sum_{u=1}^{U} \| h_{u,n}^{(2),\text{dort}} \|_\Gamma^2 . \tag{5.3}$$

Dans cette équation, U correspond au nombre de diffuseurs, lié au nombre de valeurs propres émergentes de l'Opérateur de Retournement Temporel. Les erreurs résiduelles se mettent sous la forme :

$$h_{u,n}^{(1),\text{dort}} = E_{u,n}^{\text{dort}} - E_u^{\text{inc;dort}} - \mathbf{G}\chi_n E_{u,n}^{\text{dort}}, \tag{5.4}$$

$$h_{u,n}^{(2),\text{dort}} = E_u^{\text{d;dort}} - \mathbf{K}\chi_n E_{u,n}^{\text{dort}}. \tag{5.5}$$

$E_{u,n}^{\text{dort}}$ correspond au champ total dans le domaine de recherche Ω associé à $E_u^{\text{inc;dort}}$ et au contraste χ_n. Les coefficients de normalisation sont définis de la manière suivante :

$$W_\Omega^{\text{dort}} = \frac{1}{\sum_{u=1}^{U} \| E^{\text{inc;dort}} \|_\Omega^2}, \text{ et } W_\Gamma^{\text{dort}} = \frac{1}{\sum_{u=1}^{U} \| E^{\text{d;dort}} \|_\Gamma^2}. \tag{5.6}$$

Nous choisissons de tenir compte de cette seconde fonction coût comme d'un terme de régularisation. Précisons immédiatement qu'il ne s'agit en rien d'une régularisation, car le terme rajouté ne dépend que des champs diffractés (nos données d'entrée) et non de la grandeur que nous cherchons à déterminer. Appuyons nous sur [26] et [27], où une procédure de régularisation est ajoutée à la Contrast Source Inversion [25], nous définissons deux possibilités pour utiliser l'information supplémentaire donnée par D.O.R.T.. Nous pouvons l'incorporer de manière additive en la pondérant par un coefficient réel positif, et ainsi minimiser un fonction coût de la forme :

$$\tilde{\mathcal{F}}_n = \mathcal{F}_n + \kappa^2 \mathcal{F}_n^{\text{dort}}. \tag{5.7}$$

Le coefficient κ est choisi de sorte que les termes $\mathcal{F}_n$ et $\kappa^2 \mathcal{F}_n^{\text{dort}}$ soient du même ordre de grandeur à la première itérée.

L'autre solution possible pour tenir compte de $\mathcal{F}_n^{\text{dort}}$ consiste à l'incorporer comme une contribution multiplicative. Cette seconde approche permet de se soustraire du choix arbitraire du paramètre κ. La fonction coût qu'il nous faudra minimiser s'écrit alors :

$$\tilde{\mathcal{F}}_n = \mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_n^{\text{dort}}. \tag{5.8}$$

Présentons maintenant les résultats obtenus avec ces deux contributions additive (5.7) et multiplicative (5.8).

Reconstructions avec D.O.R.T.

Les reconstructions obtenues avec la contribution additive (avec $\kappa^2 = 6$) et multiplicative sont reportées sur (5.13) et (5.14) pour tous les algorithmes. Là encore, nous nous limitons à la marche en fréquences, et nous ne représentons que la permittivité car la conductivité est quasiment nulle.

Tout d'abord, nous remarquons que les contributions additive et multiplicative donnent sensiblement le même résultat. Quelque soit la méthode utilisée, nous constatons une légère amélioration des reconstructions, notamment au niveau du diffuseur. Cependant, en comparant les cartes de permittivité des Fig. 5.11, 5.13 et 5.14, nous constatons que l'utilisation des champs donnés par D.O.R.T. comme champs incidents supplémentaires n'a pas eu l'effet escompté : nous ne pouvons toujours pas extraire clairement le diffuseur du fouillis. Les oscillations de la permittivité du milieu ambiant sont toujours bien présentes, et elles sont même très légèrement amplifiées. Pour pouvoir trouver une solution acceptable pour les éliminer, puisque l'utilisation des champs donnés par D.O.R.T. ne suffit pas, arrêtons-nous un instant pour proposer une interprétation à leur présence.

Mise en évidence du caractère mal posé des problèmes inverses

Nous pensons que les oscillations sont dues au caractère stratifié de la configuration d'étude. Pour nous en convaincre, nous nous intéressons dans un premier temps à une configuration plus simple à une dimension comme décrit sur la Fig. 5.15.

Une couche d'épaisseur d et de permittivité ε_r est enfouie dans un milieu de permittivité ε_{rb} à la profondeur h. Le milieu supérieur de permittivité ε_1 est séparé du milieu inférieur par une interface plane. Nous distinguons alors 4 milieux différents. Le milieu supérieur noté 1, le milieu entre la couche et l'interface noté 2, la couche notée 3, et le milieu en-dessous de la couche noté 4. En illuminant cette structure par un champ incident E^{inc}, nous pouvons mesurer un champ diffracté E^{d} dans le milieu supérieur. Nous calculons le coefficient de réflexion r de cette empilement :

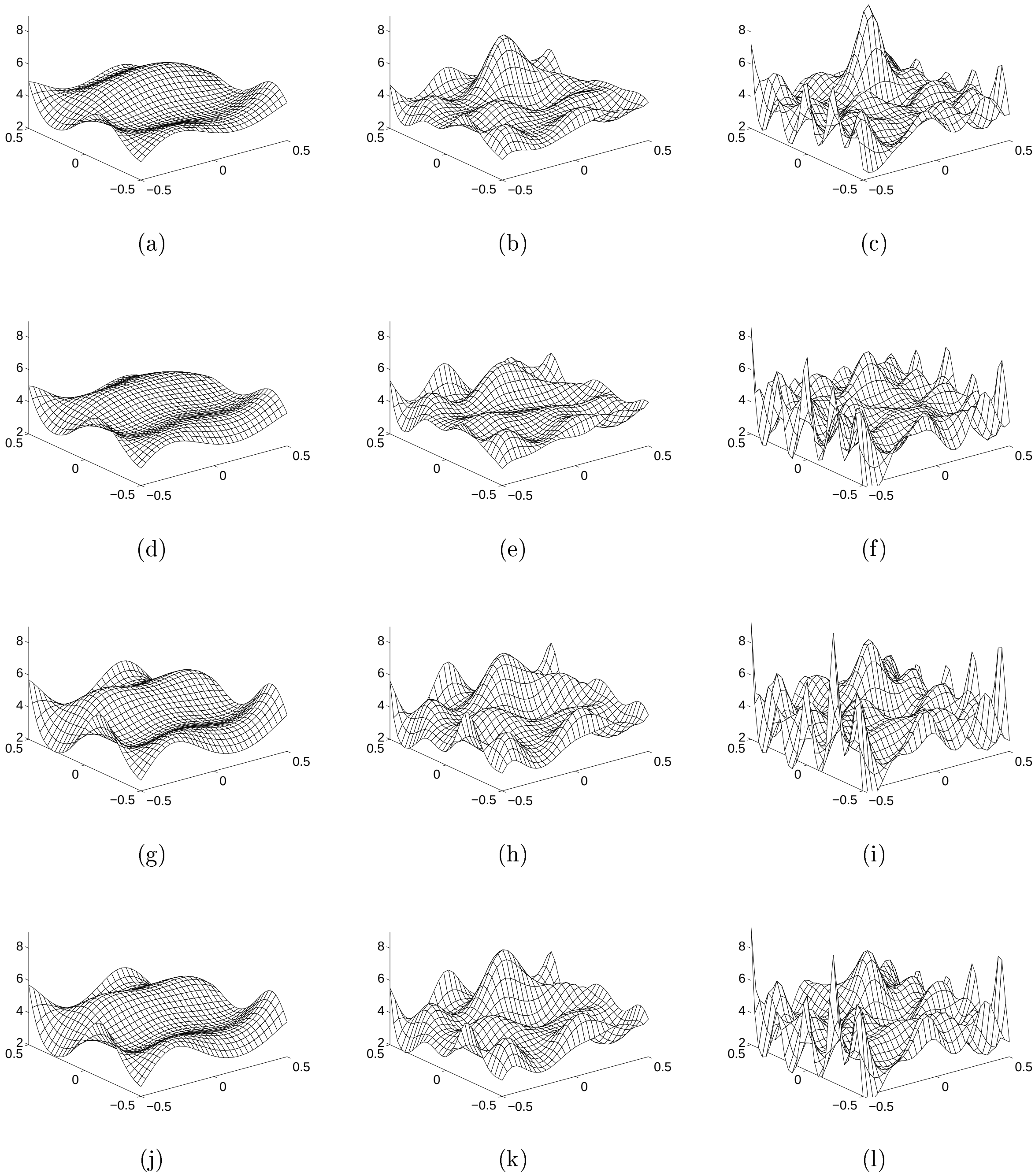


Fig. 5.13 – *Cartes de permittivité reconstruite pour différentes fréquences et différentes méthodes. Première colonne : $f = 100$ MHz. Deuxième colonne : $f = 200$ MHz. Troisième colonne : $f = 300$ MHz. (a), (b) et (c) : B.M.. (d), (e) et (f) : M.G.M.. (g), (h) et (i) : M.B.M.. (j), (k) et (l) : M.^{2}G.M.. Les champs de D.O.R.T. sont incorporés de manière additive.*

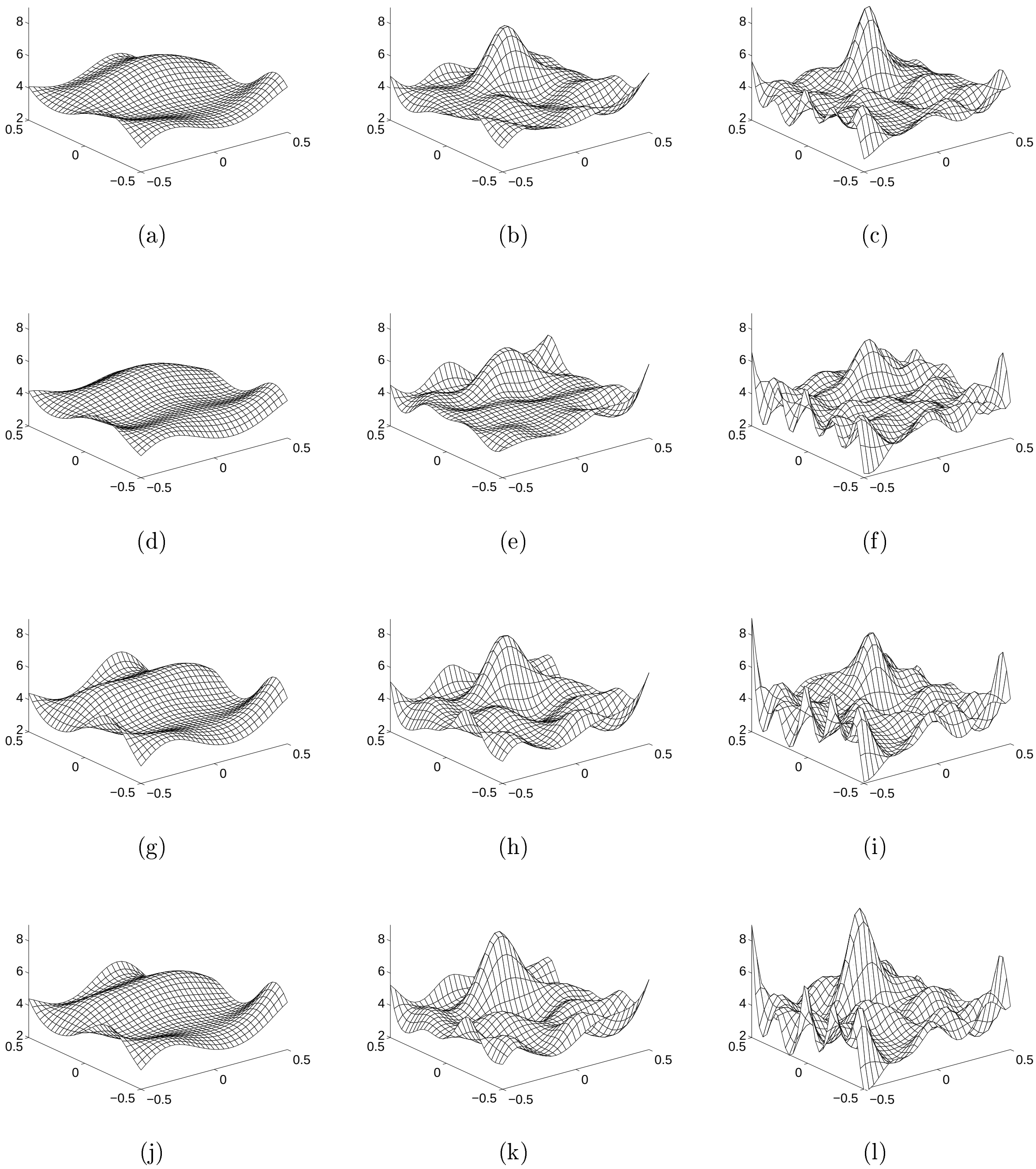


FIG. 5.14 – *Cartes de permittivité reconstruite pour différentes fréquences et différentes méthodes. Première colonne : $f = 100$ MHz. Deuxième colonne : $f = 200$ MHz. Troisième colonne : $f = 300$ MHz. (a), (b) et (c) : B.M.. (d), (e) et (f) : M.G.M.. (g), (h) et (i) : M.B.M.. (j), (k) et (l) : M.^{2}G.M.. Les champs de D.O.R.T. sont incorporés de manière multiplicative.*

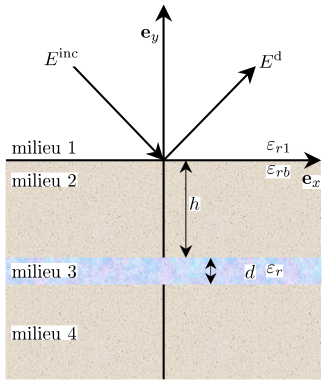


FIG. 5.15 – *Géométrie du problème mono dimensionnel .*

$$\frac{r}{r_0} = \frac{\frac{t_1 t_b}{2} - i\tan(\gamma_1 d)\left\{\frac{\gamma_1^2+\gamma_2^2}{(\gamma_1+\gamma_2)^2} + \frac{r_1}{r_0}\exp(2i\gamma_2 h)\right\}}{\frac{t_1 t_b}{2} - i\tan(\gamma_1 d)\left\{\frac{\gamma_1^2+\gamma_2^2}{(\gamma_1+\gamma_2)^2} + r_1 r_0 \exp(2i\gamma_2 h).\right\}} \tag{5.9}$$

Le détail de ce calcul est reporté en annexe de ce manuscrit. Les coefficients r_0, r_1, t_1, et t_b sont les coefficients de réflexion et de transmission de Fresnel des différents dioptres, et γ_i représente la composante du vecteur d'onde dans la direction $\mathbf{e}_y$ dans le milieu i. Nous pouvons alors remarquer que h de la couche n'apparaît que dans le terme en $\exp(2i\gamma_2)$ de (5.9). De plus, si nous changeons $\chi = \varepsilon_{rb} - \varepsilon_r$ en $\tilde{\chi} = -\chi$, et en prenant $\tilde{h} = \dfrac{(2p+1)\pi}{2\gamma_d}$, où p est un entier relatif, nous obtenons le même coefficient de réflexion. Ainsi, le champ diffracté dans le milieu supérieur sera le même pour deux structures différentes. Ceci illustre le caractère mal posé des problèmes inverses, et explique les oscillations que nous observons dans nos reconstructions reportées sur les Fig. 5.11, 5.13 et 5.14 : une couche ayant un contraste donné enfouie à une hauteur h donnée donne le même champ diffracté que la même couche de contraste opposé, enfouie à la hauteur $h \pm \dfrac{\lambda_b}{4}$. Ce résultat peut être transposé à la configuration à deux dimensions dans le cadre de l'approximation de Born [37].

Nous venons de proposer une explication aux oscillations que nous obtenons sur nos reconstructions. Elles sont directement liées au caractère mal posé des problèmes inverses : deux structures différentes peuvent donner le même champ diffracté. Il n'y a donc pas unicité de la solution.

Pour s'affranchir de ces oscillations et améliorer les reconstructions en levant l'ambiguïté sur les objets à reconstruire, une solution consiste à rajouter de l'information *a priori* sur le signe du contraste que nous cherchons. Les auteurs de [59] observent le même comportement sur les cartes de permittivité reconstruite. Par contre, lorsqu'ils ajoutent de l'information *a priori* (positivité), comme c'est la cas pour la conductivité, les oscillations sont supprimées. Nous proposons donc de contraindre la partie réelle du contraste à être positive. Ainsi, la permittivité reconstruite ne pourra pas être inférieure à ε_{rb}. Dans ces conditions, le contraste s'écrit à l'itérée n :

$$\chi_n = \xi_n^2 - i\frac{\eta_n^2}{\omega\varepsilon_0}. \tag{5.10}$$

Les reconstructions obtenues avec les contributions additive et multiplicative de D.O.R.T. combinées avec la contrainte de positivité sur le contraste (5.10) sont reportées sur les Fig. 5.16 et 5.17.

Cette fois-ci les reconstructions sont tout à fait satisfaisantes quelque soit la méthode utilisée. Le diffuseur est parfaitement reconstruit et le milieu ambiant ne présente plus d'oscillations. En plus, il est quasiment homogène, et même les effets de bord, liés à la taille finie du domaine Ω ont été grandement atténués. Nous pouvons donc conclure, en comparant les résultats de la Fig. 5.11 avec ceux des Fig. 5.16 et 5.17, que l'apport des champs de D.O.R.T. combiné à la contrainte de positivité sur le contraste (5.10) a permis de caractériser le diffuseur et il peut maintenant être extrait du fouillis sans que cela pose problème.

Des résultats similaires sont obtenus en considérant deux diffuseurs. Cette étude est rapportée dans [37], et nous ne les présentons pas.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé nos différents algorithmes pour inverser des données harmoniques, en configuration «objets enfouis». Le ou les objets étaient successivement éclairés par L sources rayonnant un champ harmonique. En utilisant des données idéales, non bruitées, nous avons vérifié qu'une marche en fréquences (frequency-hopping) était indispensable pour obtenir des reconstructions précises.

Par contre, lorsque le diffuseur était enfoui dans un milieu fortement hétérogène (fouillis), la stratégie basée exclusivement sur le frequency-hopping n'était plus suffisante. Quand le fouillis devenait très important, il nous était alors impossible d'extraire le diffuseur. Pour améliorer les reconstructions, nous avons choisi d'augmenter le rapport signal sur bruit (de structure) en apportant de l'énergie exclusivement sur le diffuseur. Pour cela, nous avons utilisé la méthode D.O.R.T. qui, en plus des indications sur le nombre et la position des diffuseur, nous permet de synthétiser une onde qui focalise sur la cible. Cette onde focalisante a été incorporée dans les algorithmes d'inversion sous la forme d'un champ incident supplémentaire. Une seconde fonction coût a pu être définie, puis incluse dans la procédure de minimisation sous la forme d'une contribution additive ou multiplicative.

Pour lever l'ambiguïté sur le signe du contraste, nous avons proposé de rajouter de l'information *a priori* sur le signe du contraste, et nous nous sommes limités au contraste dont la partie réelle était positive. Nous avons alors pu constater que l'apport des champs focalisants obtenus par D.O.R.T. permettait, lorsqu'il était combiné à cette contrainte de positivité sur le contraste, d'obtenir des reconstructions très précises.

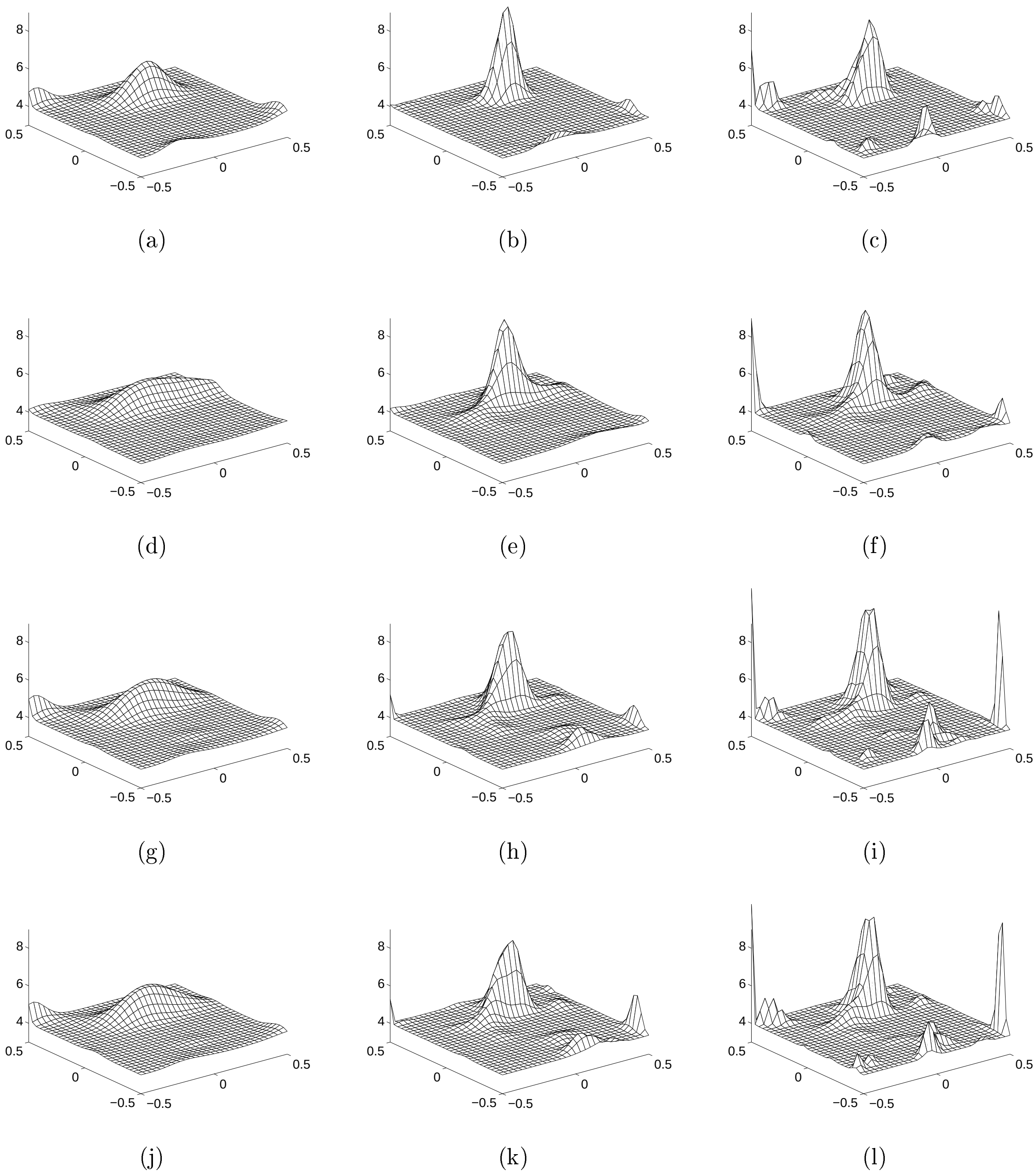
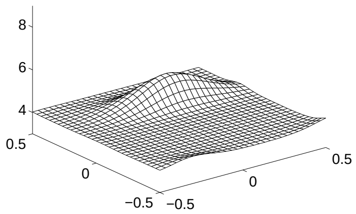
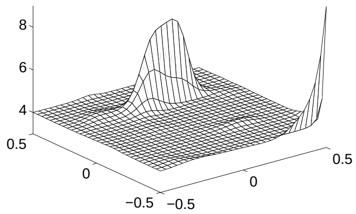


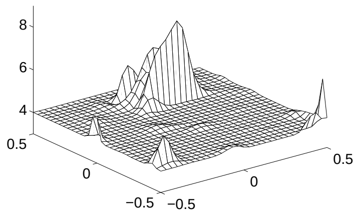
FIG. 5.16 – *Cartes de permittivité reconstruite pour différentes fréquences. Première colonne : $f =$ 100 MHz. Deuxième colonne : $f = 200$ MHz. Troisième colonne : $f = 300$ MHz. (a), (b) et (c) : B.M.. (d), (e) et (f) : M.G.M.. (g), (h) et (i) : M.B.M.. (j), (k) et (l) : M.^{2}G.M.. Les champs de D.O.R.T. sont incorporés de manière additive en tenant compte de la contrainte de positivité (5.10) sur le contraste.*



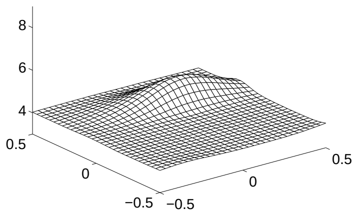
(a)



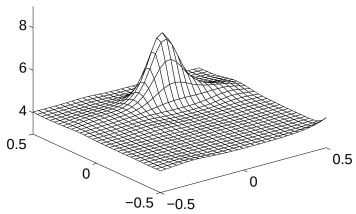
(b)



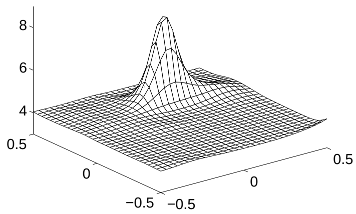
(c)



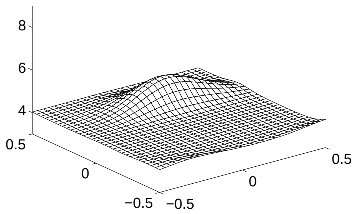
(d)



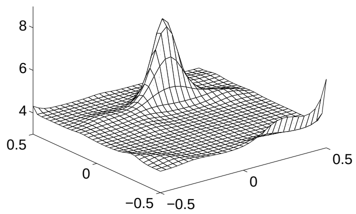
(e)



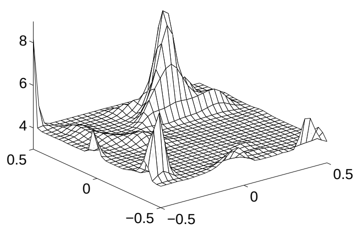
(f)



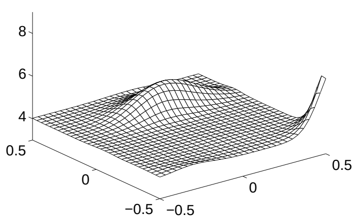
(g)



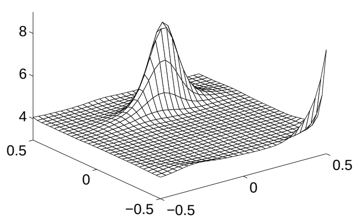
(h)



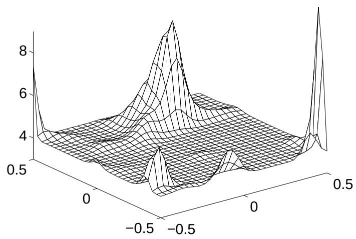
(i)



(j)



(k)



(l)

FIG. 5.17 – *Cartes de permittivité reconstruite pour différentes fréquences. Première colonne : f = 100 MHz. Deuxième colonne : f = 200 MHz. Troisième colonne : f = 300 MHz. (a), (b) et (c) : B.M.. (d), (e) et (f) : M.G.M.. (g), (h) et (i) : M.B.M.. (j), (k) et (l) : M.^{2}G.M.. Les champs de D.O.R.T. sont incorporés de manière multiplicative en tenant compte de la contrainte de positivité (5.10) sur le contraste.*

Chapitre 6

Inversion de données transitoires

Sommaire

6.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons utilisé des champs électriques harmoniques comme données d'entrée des différents algorithmes d'inversion que nous avons présentés. Nous avons alors pu vérifier les critères liés à la convergence et au pouvoir de résolution des algorithmes d'inversion itératifs énoncés dans [34]. Travailler à basses fréquences permet d'assurer la convergence des approches itératives. À plus hautes fréquences le pouvoir de résolution augmente, à condition que les algorithmes convergent, ce qui n'est plus assuré. Pour tenir compte de ces deux propriétés, nous avons utilisé une marche en fréquences [35].

Une autre méthode pour tenir compte de ces deux propriétés sur la convergence et le pouvoir de résolution consiste à utiliser des données transitoires. En effet, utiliser comme champ incident une impulsion étroite dans le temps est équivalent à éclairer le diffuseur avec un champ dont le spectre est à large support. Ainsi, les basses fréquences assureront la convergence, et les hautes fréquences permettront d'obtenir des reconstructions quantitatives.

De plus, toujours dans le chapitre précédent, nous avons observé, en présentant les résultats obtenus dans la configuration «objets enfouis», des oscillations dans le milieu inférieur. Nous avons proposé une interprétation liée à la géométrie stratifiée du problème [37]. Pour supprimer ces oscillations, nous avons rajouté de l'information *a priori* sur le signe du contraste et nous lui avons imposé une contrainte de positivité. La nature multi-fréquences des données transitoires devrait limiter ces oscillations.

Dans un premier temps, nous exposerons les résultats obtenus en utilisant des données transitoires dans la configuration «objets enfouis». Nous vérifierons si que le caractère multi-fréquences suffit à s'affranchir des oscillations du milieu inférieur.

Ensuite, nous testerons l'influence de certains paramètres de l'impulsion incidente tels que sa durée dans le temps et sa fréquence de modulation. Pour cette étude, nous travaillerons en «espace homogène», ce qui nous permettra d'utiliser des champs mesurés dans la chambre anéchoïque. Nous validerons alors les algorithmes d'inversion.

Rappelons que les champs diffractés transitoires, quand ils ne sont pas mesurés, sont calculés en utilisant le formalisme développé dans le deuxième chapitre de ce manuscrit.

6.2 Configuration «objets enfouis»

Dans ce chapitre, nous présentons les reconstructions obtenues en utilisant des données transitoires en configuration «objets enfouis». Le diffuseur est éclairé par une seule source, générant un champ transitoire. La fonction coût à minimiser est définie par la relation (3.31).

6.2.1 Géométrie et premiers résultats

La géométrie d'étude est décrite par la Fig. 1.4, où un cylindre de section circulaire, de rayon 10 cm, de permittivité $\varepsilon_r = 6$, non conducteur, est enfoui à la profondeur de 1 m dans un demi-espace de permittivité $\varepsilon_{rb} = 4$. Une ligne source, située à 10 cm au-dessus d'une interface plane séparant le milieu inférieur du vide, est parcourue par un courant $\mathcal{J}(t)$, ce qui rayonne un champ incident transitoire $\mathcal{E}^{\text{inc}}$. Le champ diffracté est mesuré en 31 récepteurs équirépartis sur une ligne horizontale Γ de longueur 6 m placée à 10 cm au-dessus de l'interface. La ligne source se trouve au centre de Γ, à la même abscisse que le centre du diffuseur. La forme du courant qui traverse le fil source est donnée par la relation (6.1).

$$\mathcal{J}(t) = A\exp(-\frac{(t-\tau)^2}{\tau^2})\sin(2\pi f_0 t). \tag{6.1}$$

Il s'agit d'une impulsion gaussienne, modulée à la fréquence f_0. Nous controlons, grace au paramètre τ la durée de l'impulsion dans le temps et donc la largeur du spectre du champ incident. Pour l'exemple présenté ici, nous fixons $f_0 = 200$ MHz, et $\tau = 12$ ns. La constante de normalisation A vaut $\frac{1}{2\tau\sqrt{\pi}}$. Avec les paramètres que nous avons choisis, nous considérons qu'avec $P = 48$ fréquences le spectre du champ incident est bien représenté, comme nous le vérifions sur la Fig. 6.1. Sur cette figure, nous reportons le spectre normalisé du champ incident (a) et le champ diffracté calculé sur le récepteur situé à l'extrême droite de la ligne de mesure (b).

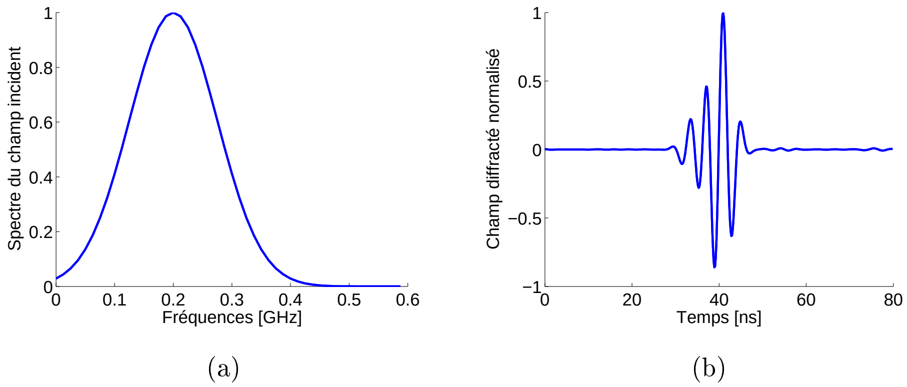


FIG. 6.1 – *(a) : spectre du champ incident. (b) : évolution en fonction du temps du champ diffracté par le diffuseur unique calculé sur le récepteur placé à l'extrême droite de la ligne de mesure.*

Dans ce chapitre sur l'inversion de données transitoires, nous nous limitons aux résultats obtenus avec la M.^{2}G.M., car cet algorithme est celui qui donnait les meilleures reconstructions dans le cas d'un éclairement monochromatique. Les résultats obtenus à l'itérée 200 pour cet exemple sont reportés sur la Fig. 6.2.

Ces premiers résultats sont à la fois encourageants et légèrement décevants. En effet, nous obtenons une conductivité quasiment nulle (d). En fait, le maximum de la conductivité reconstruite vaut 0.0035 S.m^{-1}, ce qui conduit à une épaisseur de peau d'environ 3.5 m à la fréquence f_0. La borne maximale est choisie égale à 0.5 S.m^{-1} car, avec cette valeur, nous obtiendrions une épaisseur de peau d'environ 5 cm, soit le rayon de la cible. Le diffuseur obtenu n'est donc pas conducteur. Concernant la permittivité (c), bien qu'allongée et avec une valeur un peu faible (≈ 5.5), elle est correcte. Cependant, nous sommes un peu déçus car le caractère multi-fréquences n'a pas l'effet

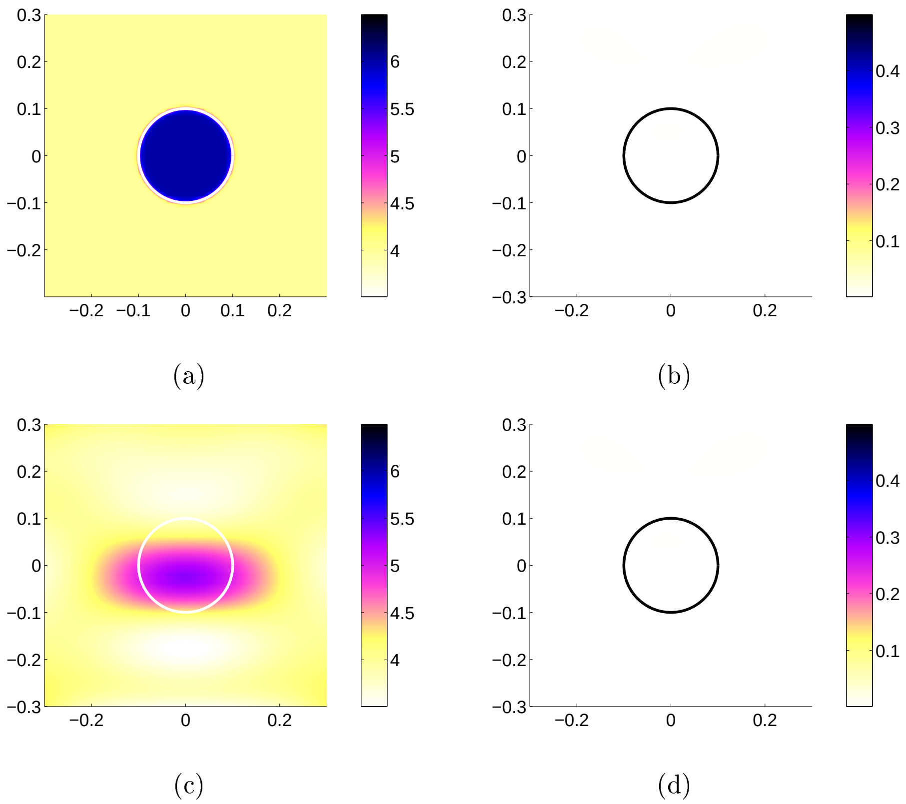
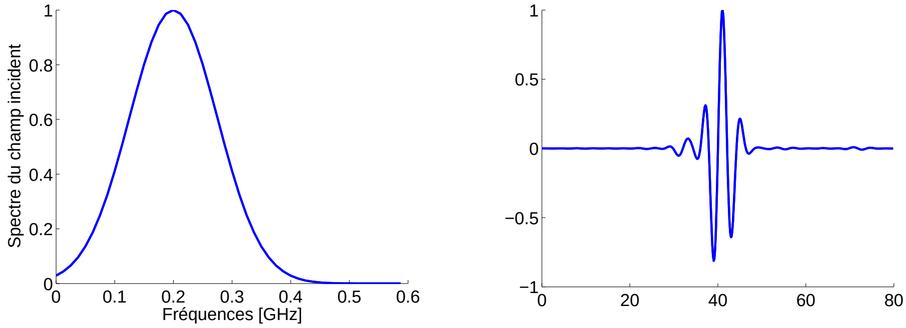


FIG. 6.2 – *Cartes de permittivité et de conductivité. (a) : permittivité du profil exacte. (b) : conductivité du profil exacte. (c) : permittivité reconstruite. (d) : conductivité reconstruite.*

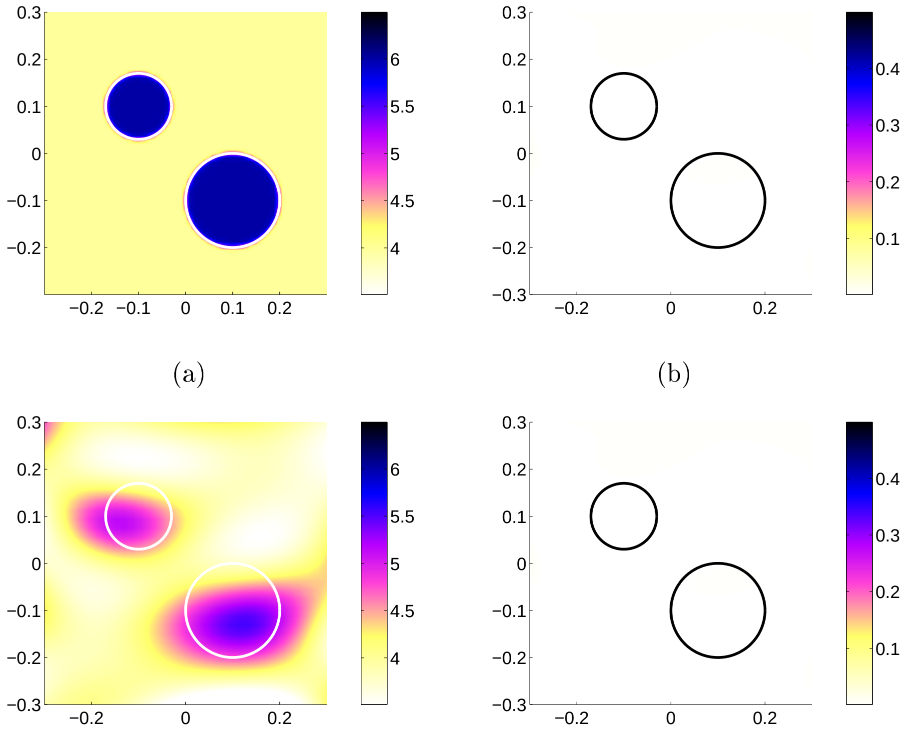
escompté sur les oscillations du milieu ambiant. En effet, nous observons toujours un creux après le diffuseur dans la direction parallèle. Cette approche multi-fréquences n'est pas suffisante pour lever l'ambiguïté sur le signe du contraste à reconstruire.

Examinons maintenant le cas de deux diffuseurs. Le plus volumineux, de rayon 10 cm est enfoui à 1.1 m sous l'interface et est décentré de 10 cm vers la droite du centre de la ligne de mesure. Le second de rayon 7 cm est placé à 90 cm sous l'interface et est décentré de 10 cm vers la gauche du centre de la source. Les deux cylindres sont homogènes et de permittivité $\varepsilon_r = 6$. Le reste de la configuration reste inchangée. Le courant qui génère le champ incident est de la même forme que précédemment (6.1), et nous conservons les valeurs des paramètres f_0 et τ. Á la fréquence centrale f_0, les bords des diffuseurs sont séparés de $\frac{\lambda_c}{6}$. Nous considérons donc toujours $P = 48$ fréquences en même temps. Le spectre du champ incident et le champ diffracté sur le récepteur placé à l'extrême droite de la ligne Γ sont reportés sur la Fig. 6.3. Les résultats obtenus à l'itérée 200 sont exposés sur la Fig. 6.4.



(a) (b)

FIG. 6.3 – *(a) : spectre du champ incident. (b) : évolution en fonction du temps du champ diffracté par les deux diffuseurs calculé sur le récepteur placé à l'extrême droite de la ligne de mesure.*



(a) (b)

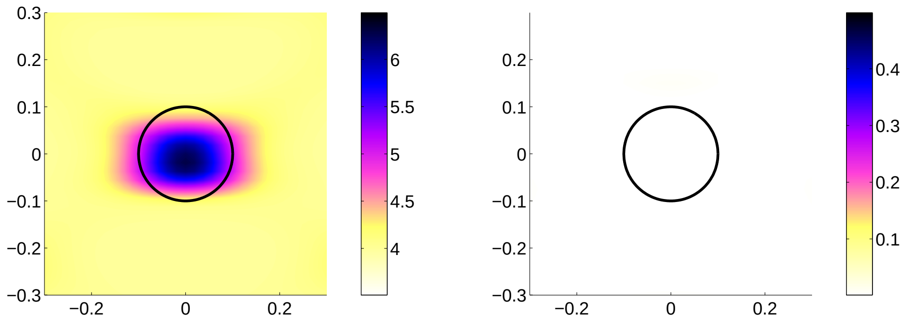
(c) (d)

FIG. 6.4 – *Cartes de permittivité et de conductivité. (a) : permittivité du profil exacte. (b) : conductivité du profil exacte. (c) : permittivité reconstruite. (d) : conductivité reconstruite.*

Là encore, les résultats sont mitigés. La conductivité est quasiment nulle (0.007 S.m^{-1}) et nous pouvons vérifier que $\varepsilon_r >> \dfrac{\sigma}{\omega\epsilon_0}$ pour la fréquence de modulation f_0. Á cette fréquence, l'épaisseur de peau vaut environ 1.5 m. Nous en déduisons que le diffuseur reconstruit est purement diélectrique. La permittivité est elle aussi acceptable tant en forme qu'en valeur pour les deux diffuseurs. Cependant, nous retrouvons aussi les oscillations dans le milieu ambiant.

6.2.2 Contrainte sur le contraste

Devant la persistance des oscillations et des ambiguïtés sur le contraste à reconstruire, qui ont été observé dans [59, 37], nous optons là encore pour rajouter de l'information *a priori* sur le signe du contraste, et nous le forçons à être positif en le cherchant sous la forme (5.10). Les reconstructions obtenues à l'itérée 200 sont reportées sur les Fig. 6.5 et 6.6 pour le diffuseur seul et pour les deux cibles respectivement.

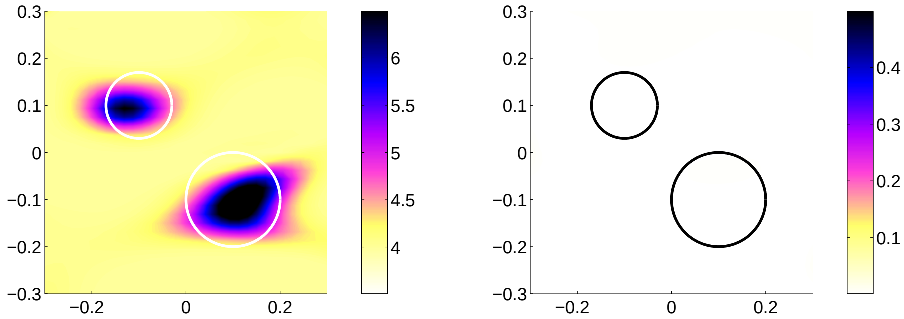


(a) (b)

FIG. 6.5 – *Cartes de permittivité (a) et de conductivité (b) reconstruites en ajoutant une contrainte de positivité sur le contraste pour le diffuseur unique, dont le profil exacte est représentée sur la Fig. 6.2.*

Cette fois-ci les reconstructions des diffuseurs sont de bien meilleure qualité pour les deux exemples. La conductivité est restée quasiment nulle. Les maxima valent respectivement 0.0072 et 0.02 S.m^{-1} pour le diffuseur unique et pour les deux diffuseurs. Nous obtenons là encore des épaisseurs de peau de plusieurs dizaines de centimètres. Les conductivités reconstruites ne sont donc pas significatives. Par contre pour la permittivité, nous pouvons noter une réelle amélioration tant en forme qu'en valeur.

D'après ces deux exemples, nous constatons que l'information *a priori* rajoutée sur le signe du contraste a été très bénéfique pour obtenir des reconstructions de bonne qualité. Pour nous affranchir de ces oscillations nous proposons d'étudier la configuration «espace homogène», qui ne nécessite pas la contrainte de positivité sur le contraste (elle est comprise dans le fait que nous excluons les matériaux d'indice plus petit que un).



(a) (b)

FIG. 6.6 – *Cartes de permittivité (a) et de conductivité (b) reconstruites en ajoutant une contrainte de positivité sur le contraste pour le diffuseur unique, dont le profil exacte est représentée sur la Fig. 6.4.*

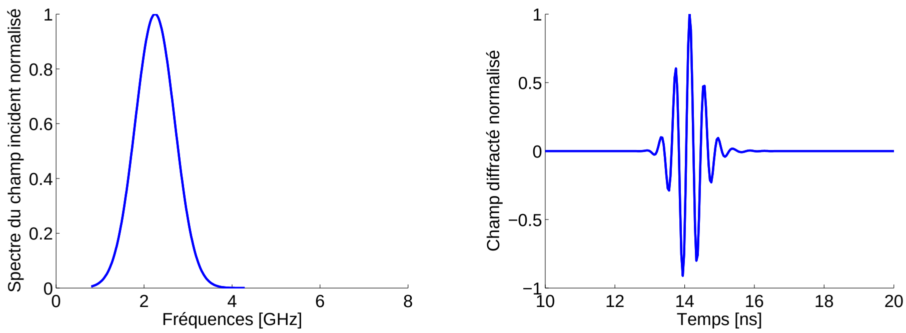
6.3 Configuration «espace homogène»

Le passage par la configuration «espace homogène», qui est plus simple, devrait nous permettre de déterminer les éléments clés pour l'obtention de résultats précis. Avant cela, commençons par comparer les reconstructions obtenues avec la M.^{2}G.M. pour deux approches différentes : une inversion en régime transitoire, et une inversion en régime harmonique.

6.3.1 Comparaison inversion transitoire-inversion harmonique

Comme nous l'avons déjà précisé, les données d'entrée pour cette partie sont des champs diffractés transitoires $\mathcal{E}^{\mathrm{d}}$. Comme nous ne travaillons pas directement en régime temporel, nous considérons, pour chaque récepteur, P champs harmoniques à P fréquences différentes, obtenus par transformée de Laplace. Il existe donc deux façons de traiter et d'inverser ces données harmoniques. Nous pouvons considérer une approche harmonique en résolvant successivement P problèmes inverses à une fréquence en minimisant la fonction coût (3.6). Nous combinerons cette approche avec la marche en fréquences [35]. La seconde possibilité consiste à considérer les champs diffractés aux P fréquences en même temps et à minimiser la fonction coût (3.31). Nous parlerons alors d'inversion en régime transitoire. Dans ce chapitre, nous exposerons les résultats de l'itérée 20 pour la dernière fréquence considérée dans le cas de l'inversion harmonique, et ceux de l'itérée 200 pour l'inversion en régime temporel. Notons que, pour chaque fréquence, l'approche harmonique converge rapidement. En effet, après la 20$^{\text{ième}}$ itérée, nous n'observons pas de changement notable. Par contre, pour l'inversion temporelle, nous devons attendre l'itérée 200. Cependant, pour l'approche harmonique, nous devons effectué au total $P \star 20$ itérées pour obtenir le résultat, et ainsi, l'approche temporelle est plus rapide que l'inversion harmonique.

Nous allons comparer ces deux approches sur l'exemple suivant. La géométrie d'étude est décrite par la Fig. 1.1. La ligne source qui génère le champ incident est situé au point de coordonnées (0 m; 1.815 m), et les 40 récepteurs qui mesurent le champ diffracté sont placés sur un cercle centré sur l'origine du repère et de rayon 1.8 m. Un cylindre non conducteur, de section circulaire de rayon 4 cm et de permittivité $\varepsilon_r = 2$, est positionné dans le vide, au centre du repère. Le fil source est parcouru par un courant gaussien modulé à la fréquence f_0 comme défini par (6.1), avec $f_0 = 2.25$ GHz et $\tau = 2$ ns. Dans ces conditions, nous considérons qu'avec $P = 140$ fréquences, le champ incident est bien représenté comme nous le vérifions sur la Fig. 6.7. Nous reportons sur cette figure le spectre du champ incident (a) et le champ diffracté calculé sur le récepteur situé en face de la source, en (0 m; −1.815 m).



(a) (b)

FIG. 6.7 – *(a) : spectre du champ incident normalisé. (b) : évolution en fonction du temps du champ diffracté calculé sur le récepteur situé en face de la source.*

La première chose que nous nous proposons de faire est de localiser le diffuseur à partir du champ diffracté. Pour cela, nous utilisons le retournement temporel que nous avons détaillé plus haut dans ce manuscrit. Les résultats sont reportés sur la Fig. 6.8.

Nous retrouvons sur la Fig. 6.8 les trois étapes énoncées plus haut : naissance de l'onde Fig. 6.8-(a) (b), focalisation Fig. 6.8-(c) (d), puis l'évanouissement de l'onde Fig. 6.8-(e) (f). Nous en déduisons qu'il y a un diffuseur au centre de la zone de recherche.

Une fois le diffuseur parfaitement localisé grâce au retournement temporel reporté sur la Fig. 6.8 nous pouvons inverser nos données en utilisant les deux approches. Dans la première, nous considé-

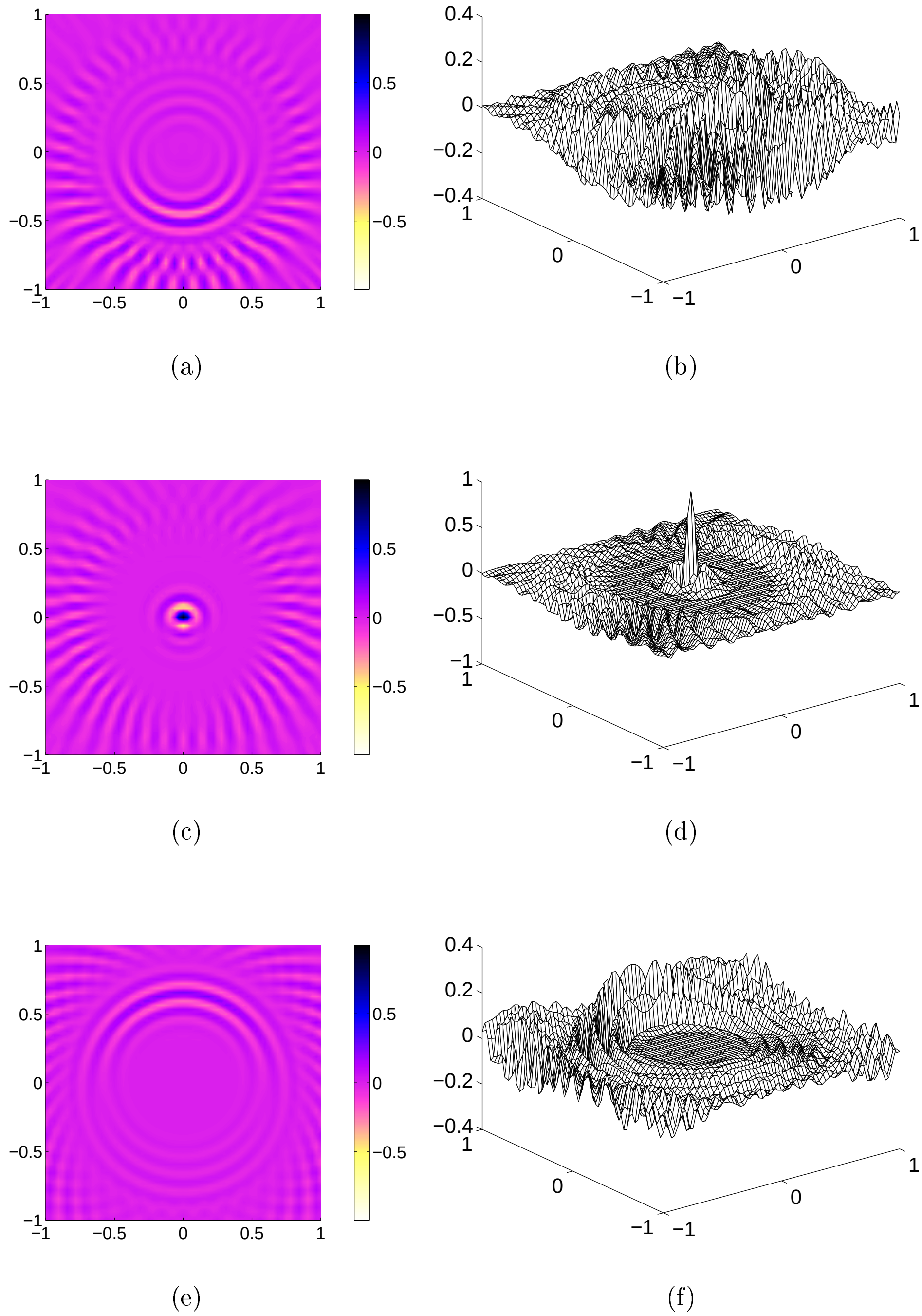
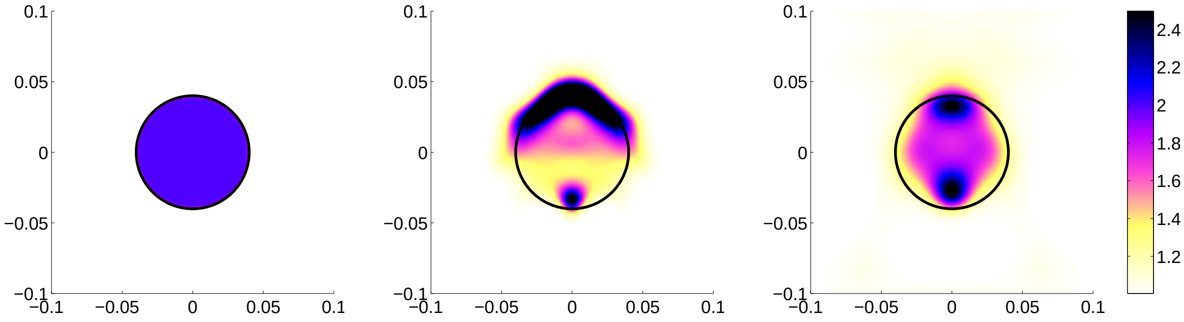


Fig. 6.8 – *Cartes du champ retourné normalisé. (a) et (b) : naissance de l'onde,* $t = 70.2$ *ns. (c) et (d) : focalisation sur le diffuseur,* $t = 72$ *ns. (e) et (f) : évanouissement de l'onde* $t = 73.9$ *ns.*

rons successivement 140 problèmes inverses harmoniques à une seule source, et nous mettons bien évidemment en œuvre un frequency-hopping. L'estimation initiale pour la première fréquence est donnée par la rétro-propagation que nous avons rappelée en annexe de ce manuscrit (avec $L = 1$ source et $P = 1$ fréquence). Le résultat de cette méthode est reporté sur la Fig. 6.9-(b), où nous ne représentons que la permittivité, la conductivité étant quasiment nulle (le maximum valant ≈ 0.1 S.m^{-1}, ce qui correspond à une épaisseur de peau de 12 cm à f_0).



(a) (b) (c)

FIG. 6.9 – *Cartes de permittivité reconstruite pour deux approches différentes utilisant les mêmes données idéales d'entrée. (a) : profil exact. (b) : approche harmonique combinée avec le frequency-hopping. (c) : inversion en régime transitoire.*

La cible n'est pas très bien représentée. Nous observons une collerette sur la face avant et un point brillant sur la face arrière. De plus, la permittivité reconstruite au centre de la cible est faible.

Dans la seconde approche, nous utilisons l'inversion en régime temporel en considérant les $P = 140$ fréquences en même temps dans l'algorithme d'inversion. Nous minimisons la fonction coût (3.31). L'estimation initiale est donnée par la rétro-propagation (en prenant $L = 1$ source et $P = 140$ fréquences). La reconstruction est reportée sur la Fig. 6.9-(c). Exceptés les deux points brillants, ce résultat est très bon, avec un cylindre quasiment circulaire, quasiment homogène, et dont la permittivité retrouvée est voisine de la vraie valeur (un peu faible). Ainsi, sur cet exemple, l'inversion en régime temporel telle que nous l'avons décrite dans le précédent chapitre (considérer toutes les fréquences en même temps) donne, pour des données idéales, un résultat meilleur que l'approche harmonique combinée au frequency-hopping (considérer les fréquences une par une). Il est alors intéressant d'étudier la robustesse par rapport à un bruit de mesure de ces deux approches.

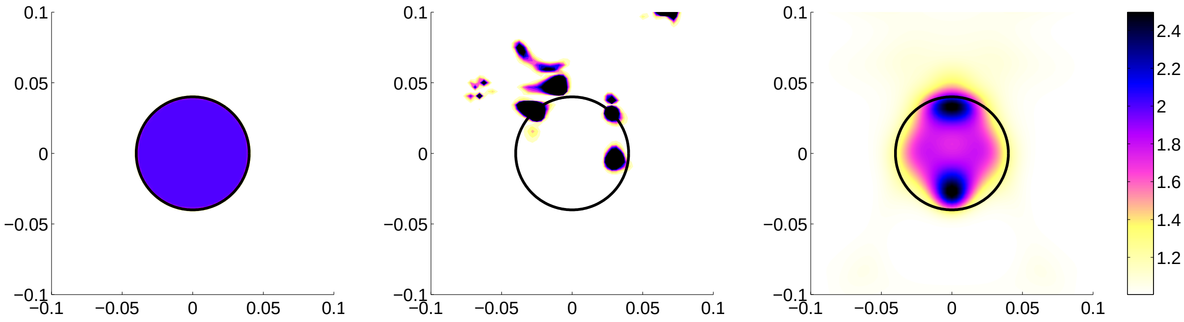
Nous bruitons directement les données, ce qui revient à simuler un bruit lié à la mesure des champs. Le champ diffracté transitoire est obtenu en utilisant le «marching-on-in frequency» [4], que nous avons exposé dans la première partie de ce manuscrit. Précisons de suite que pour éviter des problèmes numériques liés à la crime inverse, nous considérons 280 fréquences pour résoudre le problème direct, et 140 pour l'inversion. Avant de revenir dans le domaine temporel, nous ajoutons aux champs diffractés harmoniques, un bruit aléatoire sur la partie réelle et sur la partie imaginaire de la manière suivante :

$$\Re e[E_p^b(\mathbf{r})] = \Re e[E_p(\mathbf{r})] + b\alpha_p(E_{r,p}^{\max} - E_{r,p}^{\min}), \tag{6.2}$$

$$\Im m[E_p^b(\mathbf{r})] = \Im m[E_p(\mathbf{r})] + b\beta_p(E_{i,p}^{\max} - E_{i,p}^{\min}). \tag{6.3}$$

Dans ces deux relations, b est un coefficient réel qui permet de contrôler le niveau de bruit, et α_p et β_p sont deux nombres aléatoires uniformément distribués entre -1 et 1. $E_{r,p}^{\max}$ et $E_{r,p}^{\min}$ (resp. $E_{i,p}^{\max}$ et $E_{i,p}^{\min}$) correspondent au maximum et au minimum de la partie réelle (resp. imaginaire) du champ diffracté à la fréquence p sur tous les récepteurs. Nous avons choisi de bruiter les champs harmoniques car c'est le bruit le plus favorable pour l'approche harmonique. En effet, en utilisant un bruit défini de la même manière que (6.2) sur les champs transitoires $\mathcal{E}^{\mathrm{d}}(\mathbf{r},t)$, nous aurions bruité essentiellement les basses fréquences. L'algorithme n'aurait alors pas pu converger, même à la première fréquence.

Les reconstructions obtenues à partir des données bruitées ($b = 20\%$) sont reportées sur la Fig. 6.10 pour les deux approches.



(a) (b) (c)

FIG. 6.10 – *Cartes de permittivité reconstruite pour deux approches différentes utilisant les mêmes données d'entrée bruitées. (a) : profil exact. (b) : approche harmonique combinée avec le frequency-hopping. (c) : inversion en régime transitoire.*

L'approche harmonique ne converge pas (b), et la robustesse de cette méthode est mise en défaut car nous n'utilisons qu'une seule source. En fait, pour les premières fréquences, l'algorithme converge et les premières reconstructions sont encourageantes. En montant en fréquence, les images se détériorent pour finir par obtenir la carte de permittivité la Fig. 6.10-(b). Par contre, le bruit qui est ajouté avec $b = 20\%$ n'a vraiment pas eu beaucoup d'incidence sur la reconstruction obtenue en régime transitoire, comme nous le constatons sur la Fig. 6.10-(c).

Nous pouvons alors conclure que l'inversion de données temporelles, en considérant toutes les fréquences en même temps et en minimisant (3.31) est robuste vis-à-vis du bruit (6.2) et (6.3), contrairement à un traitement harmonique. Il est maintenant intéressant d'inverser des données obtenues avec deux diffuseurs pour pouvoir examiner le pouvoir de résolution.

6.3.2 Étude du pouvoir de résolution

Pour cette étude, nous considérons deux diffuseurs identiques non conducteurs, de section circulaire, de rayon $a = 2$ cm et homogènes de permittivité $\varepsilon_r = 2$. Ils sont placés en (0.02 m; 0.02 m) et en (-0.02 m; -0.02 m). La source et les récepteurs sont situés aux mêmes endroits que précédemment. La ligne source est parcourue par un courant dont la forme est donnée par (6.1) avec $f_0 = 2.25$ GHz et $\tau = 2$ ns. Le champ incident étant le même que précédemment, nous considérons là encore $P = 140$ fréquences. Commençons par les localiser, et utilisons le retournement temporel.

Les cartes de champs retournés sont reportées sur la Fig. 6.11, où nous voyons l'onde arriver (a) et (b), focaliser sur les diffuseurs (c) et (d) et s'évanouir (e) et (f).

Nous pouvons remarquer qu'à cette échelle le retournement temporel ne permet pas de séparer les deux cibles. Nous zoomons donc sur le centre du repère, en réduisant la zone de recherche, et les résultats sont exposés sur la Fig. 6.12 où nous voyons un maximum de signal d'abord sur le diffuseur en (-0.02 m; -0.02 m) (a) puis sur le diffuseur en (0.02 m; 0.02 m) (b). Sur cette figure, nous reportons le module du champ électrique pour plus de visibilité.

Le retournement temporel nous permet de réduire la zone d'investigation, et avec ce petit domaine de recherche, nous sommes capable de dénombrer les diffuseurs. Regardons maintenant les reconstructions obtenues avec les deux approches. Elles sont reportées sur la Fig. 6.13.

Les résultats obtenus par ces deux méthodes sont similaires : les objets reconstruits sont quasiment circulaires, et leur permittivité à la bonne valeur. Rapprochons-les pour comparer le pouvoir de résolution de ces deux différentes approches, et plaçons maintenant les diffuseurs en (-0.02 m; -0.02 m) et en (0.002 m; 0.02 m). Ils ne se touchent pas mais sont séparés de 0.57 cm, ce qui correspond, à la fréquence centrale de l'impulsion f_0, à environ $\frac{\lambda}{23}$, où λ est la longueur

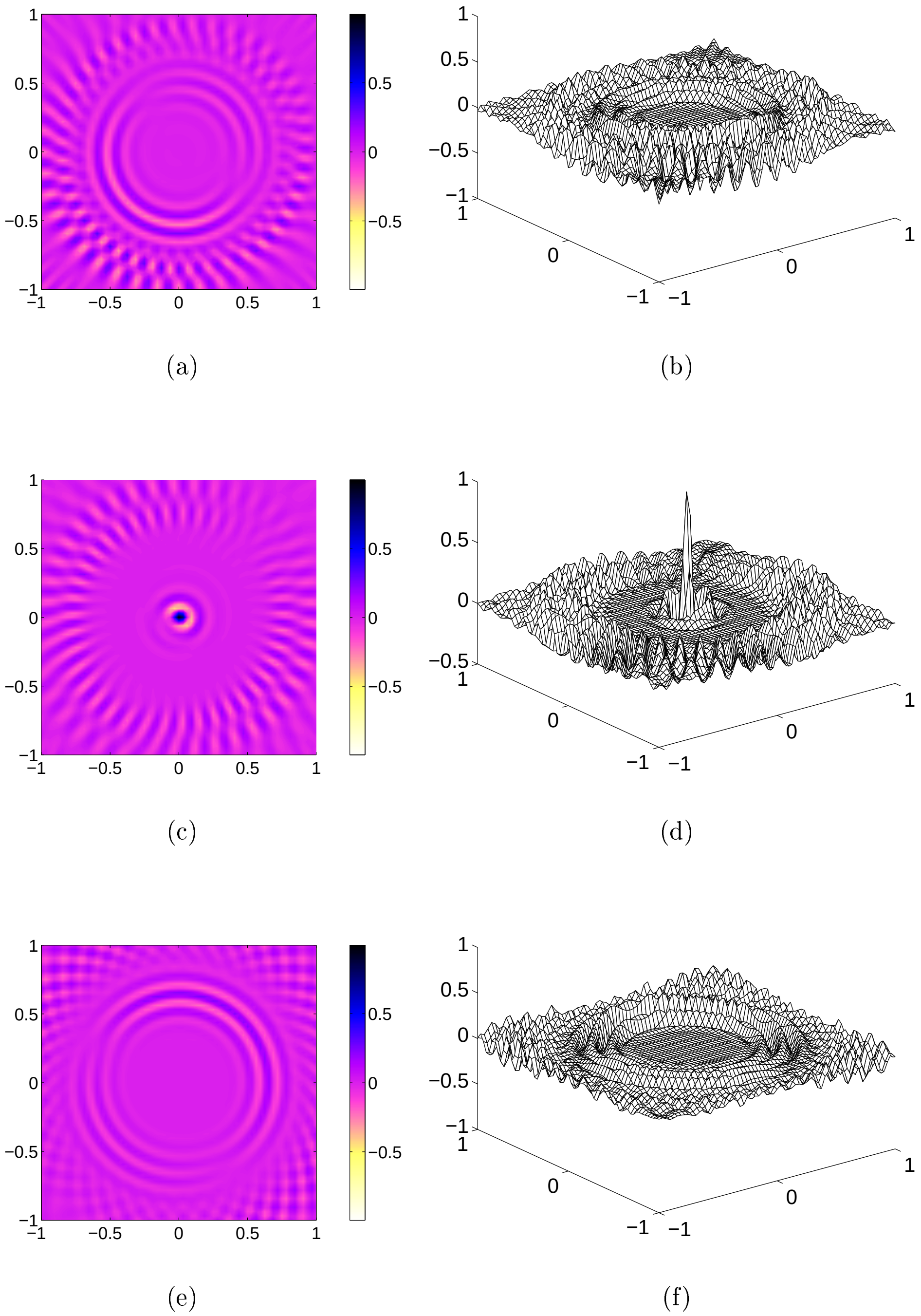
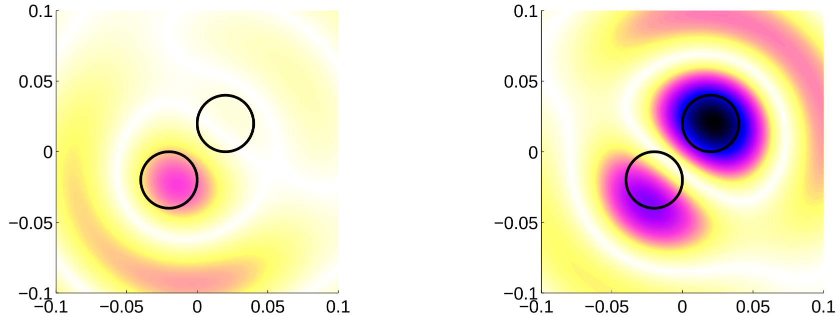


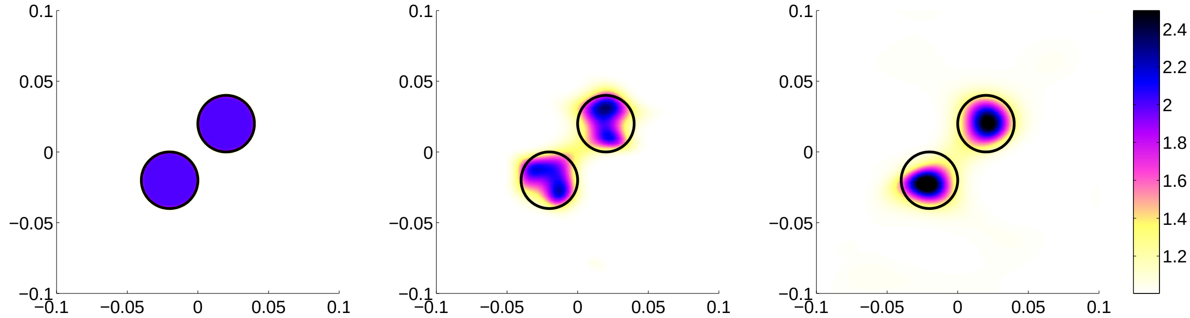
Fig. 6.11 – *Cartes du champ retourné normalisé. (a) et (b) : naissance de l'onde, $t = 70$ ns. (c) et (d) : focalisation sur le diffuseur, $t = 72$ ns. (e) et (f) : évanouissement de l'onde $t = 74$ ns.*

d'onde dans le vide. Les deux reconstructions sont reportées sur la Fig. 6.14.



(a) (b)

FIG. 6.12 – *Cartes du module du champ retourné. (a) : focalisation sur le premier diffuseur, $t = 71.4$ ns. (b) : focalisation sur le second diffuseur, $t = 72$ ns.*

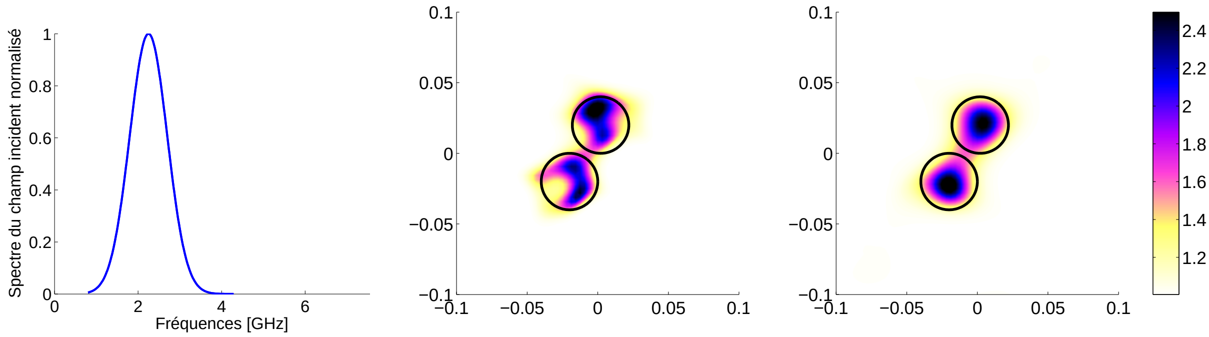


(a) (b) (c)

FIG. 6.13 – *Cartes de permittivité reconstruite pour deux approches différentes utilisant les mêmes données d'entrée. (a) : profil exact. (b) : approche harmonique combinée avec le frequency-hopping. (c) : inversion en régime transitoire.*

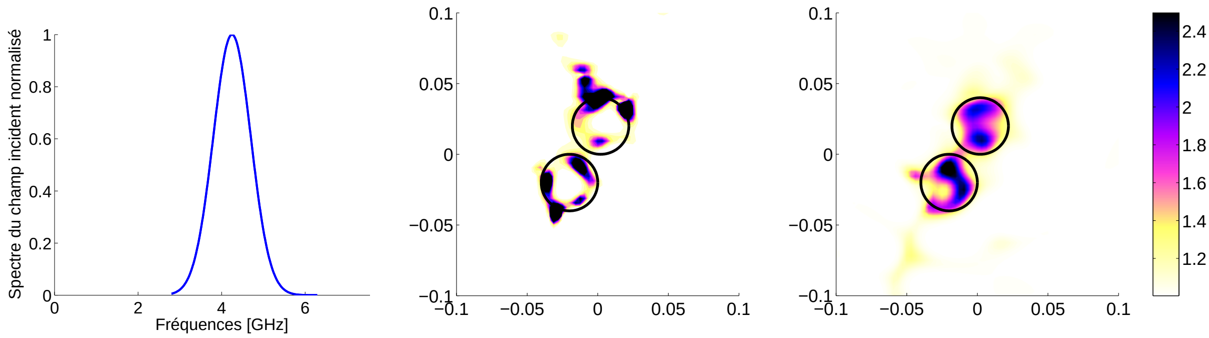
Sur cet exemple, l'approche en régime temporel donne de meilleurs résultats (c) : les cibles reconstruites sont quasiment circulaire, ce qui n'est pas le cas pour l'inversion harmonique. Par contre, dans les deux cas, la permittivité entre les deux cibles peut être améliorée. Nous savons que pour augmenter le pouvoir de résolution des algorithmes d'inversion, nous devons travailler à plus hautes fréquences. Ainsi, la solution proposée consiste à moduler le courant qui traverse la ligne source autour d'une fréquence supérieure sans changer la durée de l'impulsion ($\tau = 2$ ns). Les reconstructions obtenues avec $f_0 = 4.25$ GHz sont exposées sur la Fig. 6.15.

Une fois de plus, l'approche harmonique combinée au frequency-hopping à une seule source est mise en défaut, car nous commençons avec des fréquences trop hautes [34]. Concernant l'inver-



(a) (b) (c)

FIG. 6.14 – *Cartes de permittivité reconstruite pour les deux approches utilisées. (a) : spectre du champ incident,* $f_0 = 2.25$ *GHz,* $\tau = 2$ *ns. (b) : reconstruction obtenue avec une inversion harmonique combinée au frequency-hopping. (c) : reconstruction obtenue avec l'inversion en régime temporel.*



(a) (b) (c)

FIG. 6.15 – *Cartes de permittivité reconstruite pour les deux approches utilisées. (a) : spectre du champ incident,* $f_0 = 4.25$ *GHz,* $\tau = 2$ *ns. (b) : reconstruction obtenue avec une inversion harmonique combinée au frequency-hopping. (c) : reconstruction obtenue avec l'inversion en régime temporel.*

sion en régime temporel, le résultat obtenu à $f_0 = 4.25$ GHz est moins bon que celui obtenu à $f_0 = 2.25$ GHz Fig. 6.14-(c). Les cylindres sont certes mieux séparés, mais ils ne sont plus circulaires, ni homogènes. Et surtout le milieu ambiant n'est pas homogène. En effet, nous observons un contraste non nul en-dessous et au-dessus des cylindres. Nous en concluons donc que, pour être stable, l'algorithme d'inversion utilisé (ici la M.^{2}G.M.) doit aussi contenir suffisamment de basses fréquences. Pour tenir compte de ces deux aspects (basses fréquences pour la stabilité, et hautes fréquences pour améliorer le pouvoir de résolution), nous proposons de considérer une impulsion plus étroite dans le temps, et donc plus large dans le domaine fréquentiel. Nous réduisons la durée de l'impulsion par un facteur deux, ce qui correspond à un élargissement du spectre du même facteur. Il nous faut donc considérer deux fois plus de fréquences, soit $P = 280$ fréquences. Afin que ce spectre recouvre les deux précédents ($\tau = 2$ ns, $f_0 = 2.25$ et $f_0 = 4.25$ GHz), nous modulons $\mathcal{J}$ à la fréquence $f_0 = 3.25$ GHz. Les reconstructions obtenues sont reportées sur la Fig. 6.16.

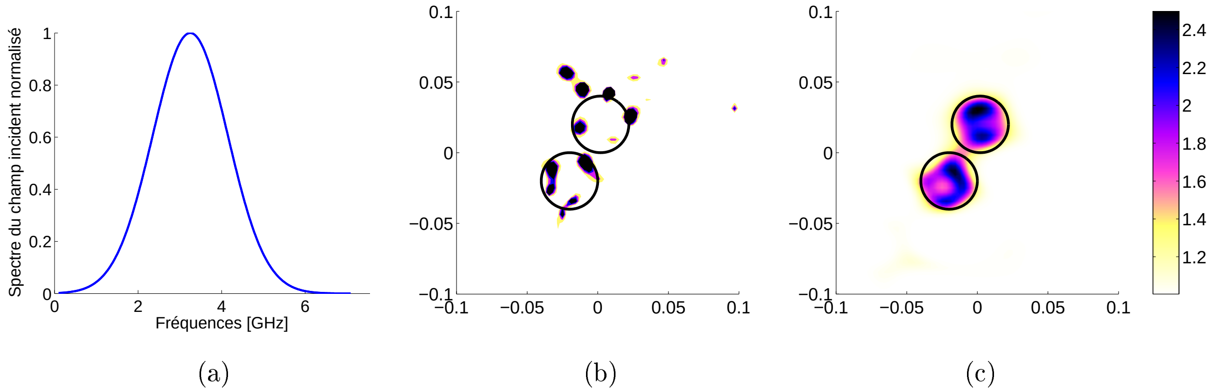


FIG. 6.16 – *Cartes de permittivité reconstruite pour les deux approches utilisées. (a) : spectre du champ incident, $f_0 = 3.25$ GHz, $\tau = 1$ ns. (b) : reconstruction obtenue avec une inversion harmonique combinée au frequency-hopping. (c) : reconstruction obtenue avec l'inversion en régime temporel.*

La reconstruction obtenue avec le frequency-hopping ne donne pas un résultat acceptable. Par contre, le résultat de l'inversion en régime temporel est très bon : les deux cibles sont parfaitement reconstruites, elles sont quasiment circulaires, homogènes avec la bonne valeur, et surtout, elles sont parfaitement séparées.

Cette étude nous a permis de comparer une approche harmonique, associée à une marche en fréquences, et une inversion en régime temporel. Á chaque fois, la seconde approche donne de meilleurss reconstructions, et en plus, elle est robuste vis-à-vis du bruit, ce qui n'est pas le cas du frequency-hopping à une seule source. Nous avons aussi constaté qu'en considérant une impulsion très étroite dans le temps, et donc très large en fréquence, nous améliorons grandement les résultats.

Nous allons maintenant proposer une seconde façon d'améliorer le pouvoir de résolution sur des reconstructions obtenues à partir de données temporelles. Cette fois-ci nous utiliserons des champs mesurés en chambre anéchoïque.

6.3.3 Marche en fréquences de modulation

Dans cette partie sur la résolution du problème direct en régime temporel, nous avons cherché une nouvelle façon d'augmenter le pouvoir de résolution des algorithmes tout en les confrontant aux champs mesurés en chambre anéchoïque afin de les valider.

Rappelons brièvement le mode opératoire. Dans la chambre anéchoïque, nous ne pouvons mesurer que des champs harmoniques. La source, située en (0 m, 1.815 m), rayonne un champ harmonique pour $P = 792$ fréquences entre 1 et 18 GHz. Les champs diffractés à chacune des fréquences sont mesurés sur les $N = 41$ placés sur un arc de cercle de rayon 1.75 m et d'extension angulaire 240° (il y a une zone d'exclusion due à l'encombrement mécanique de l'arche métallique). Ensuite, nous pondérons les champs diffractés par le spectre du champ incident et par la transformée de Laplace inverse (2.11), nous obtenons les données temporelles mesurées. Bien sûr, avant de les inverser, nous devons calibrer les champs en les multipliant par le coefficient $\gamma(\omega)$ défini par (2.15). Le courant qui traverse le fil source est donné par (6.1), et nous le modulons à $f_0 = 4$ GHz, avec une largeur d'impulsion $\tau = 2$ ns. Pour cet exemple, nous utilisons le diffuseur inhomogène décrit sur la Fig. 2.15-(b). Il s'agit d'une mousse de permittivité $\varepsilon_r = 1.45$ et de rayon 4 cm à l'intérieur de laquelle nous avons introduit un cylindre en nylon de permittivité $\varepsilon_r = 3$ et de rayon 1.5 cm. Bien que l'influence des hautes fréquences soit négligeable, comme nous le vérifions sur la Fig. 6.17-(a), nous utilisons les $P = 792$ fréquences. La reconstruction obtenue à l'itérée 20 avec la M.^{2}G.M. est reportée sur la Fig. 6.17.

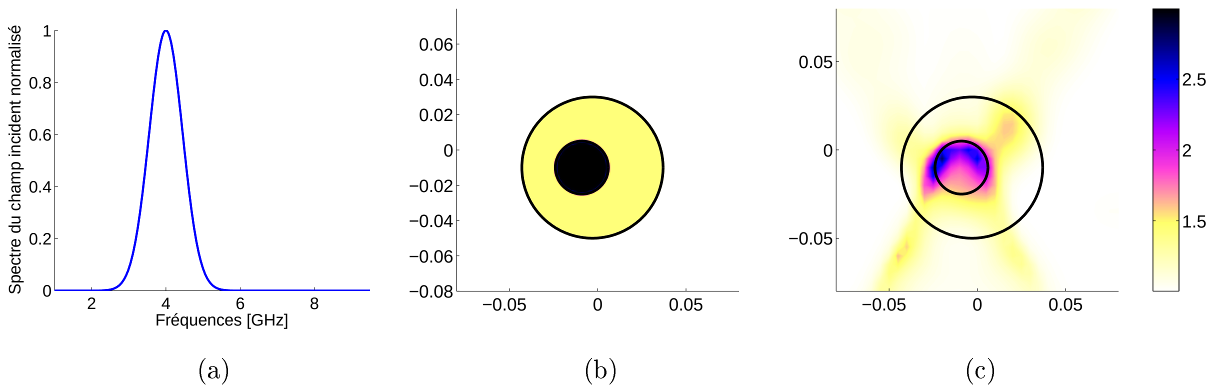


FIG. 6.17 – *Spectre du champ incident et cartes de permittivité . (a) : spectre normalisé du champ incident, $f_0 = 4$ GHz, $\tau = 2$ ns. (b) : profil exact. (c) : permittivité reconstruite en utilisant l'inversion en régime temporel.*

Ce résultat n'est pas acceptable : le diffuseur est simplement localisé et le nylon est très mal reconstruit. Nous supposons que nous travaillons à trop hautes fréquences, et que l'algorithme ne peut donc pas converger vers la bonne solution.

Dans les précédents paragraphes, nous avons proposé d'utiliser une impulsion plus étroite dans le temps pour considérer plus de fréquences. Ainsi, nous avions des basses fréquences pour la convergence, et des plus hautes fréquences pour améliorer le pouvoir de résolution. Ici, nous explorons une seconde voie. Nous considérons fixe la durée de l'impulsion, et nous modifions la fréquence de modulation du courant qui traverse la ligne source. D'un point de vue expérimental, cela revient à éclairer successivement le diffuseur avec des champs incidents modulés autour de différentes fréquences f_0. Numériquement, nous devons pondérer les champs harmoniques mesurés et calibrés par des spectres centrés autour de ces différentes fréquences f_0.

Appliquons cette approche à notre exemple. Nous commençons à $f_0 = 2.5$ GHz, et l'estimation initiale est donnée par la rétro-propagation rappelée en annexe, en prenant $L = 1$ source et $P = 792$ fréquences. Ensuite, le résultat obtenu sert d'estimation initiale à l'inversion de données mesurées pour un champ incident modulé autour de $f_0 = 3$ GHz, et ainsi de suite jusqu'à $f_0 = 4$ GHz avec un pas $\delta f = 0.5$ GHz. Les résultats de l'itérée 20 sont reportés sur la Fig. 6.18.

Avec cette approche, nous constatons deux choses. Tout d'abord, la résolution augmente clairement au fur et à mesure que nous utilisons des fréquences de plus en plus hautes. En effet, d'une reconstruction qualitative obtenue avec un champ incident modulé à $f_0 = 2.5$ GHz, nous obtenons une très bonne reconstruction pour une modulation du champ à $f_0 = 4$ GHz. La mousse extérieure étant très peu contrastée avec le milieu ambiant, sa contribution au champ diffracté mesuré est moins importante que celle du nylon. Elle est donc très difficile à reconstruire. Ensuite, avec cette approche, nous obtenons une reconstruction acceptable ce qui était impossible en commençant directement avec une impulsion modulée à $f_0 = 4$ GHz.

Cette étude, effectuée avec des champs mesurés dans la chambre anéchoïque, a permis de définir une seconde stratégie pour obtenir des reconstructions acceptables en utilisant des données transitoires. De plus, elle a permis de valider notre algorithme en utilisant des champs mesurés expérimentalement.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats que nous avons obtenus à partir de champs transitoires. Le ou les diffuseurs étaient éclairés par une seule source rayonnant un champ incident

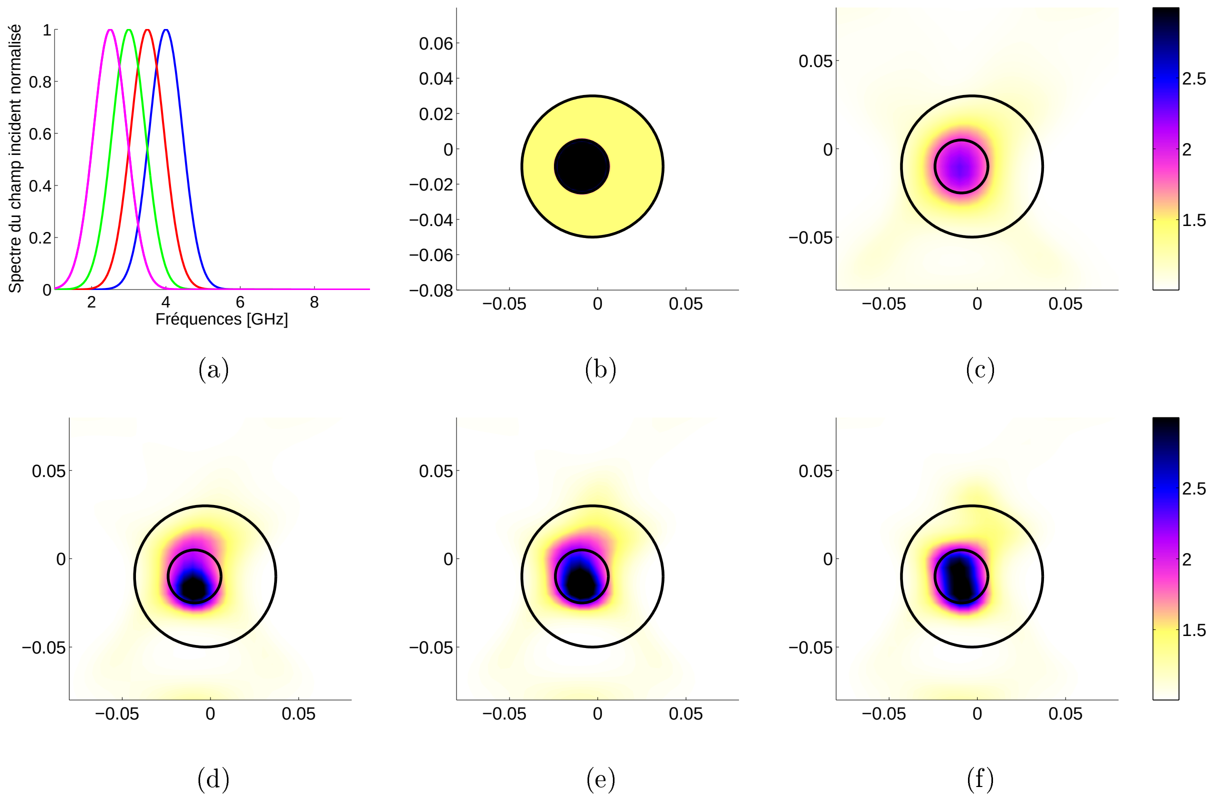


Fig. 6.18 – *Spectres aux différentes fréquences de modulation du champ incident et cartes de permittivité . (a) : spectre normalisé du champ incident, avec* $\tau = 2$ *ns. En magenta* 2.5 *GHz. En vert* 3 *GHz. En rouge* 3.5 *GHz. En bleu* 4 *GHz. (b) : profil exact. Cartes de permittivité reconstruite en utilisant l'inversion en régime temporel. (c) :* $f_0 = 2.5$ *GHz. (d) :* $f_0 = 2.5$ *GHz. (e) :* $f_0 = 3.5$ *GHz. (f) :* $f_0 = 4$ *GHz.*

transitoire.

Dans la configuration «objets enfouis», l'approche multi-fréquences du régime transitoire n'a pas suffi à limiter les oscillations liées à la structure stratifiée de la géométrie, mises en évidence dans le chapitre précédent et dans [37, 59]. Nous avons alors dû imposer une contrainte de positivité sur la partie réelle du contraste. Cela a permis d'améliorer considérablement la qualité des reconstructions.

Pour nous affranchir de ce phénomène lié à la configuration stratifiée, nous avons travaillé en «espace homogène». Avant de tester l'influence des paramètres de l'impulsion incidente, nous avons comparé deux approches. Dans la première, nous avons utilisé une approche harmonique, fréquence par fréquence, combinées avec une marche en fréquences. Dans la seconde, nous avons utilisé l'inversion en régime transitoire que nous avons détaillé dans le chapitre précédent. Les champs diffractés aux différentes fréquences ont été considérés en même temps dans la procédure de minimisation. Nous avons alors pu constater que cette seconde approche étaient robuste vis-à-vis du bruit, ce qui n'était pas le cas de la première.

Enfin, nous avons testé l'influence de la fréquence de modulation et la largeur de l'impulsion incidente sur les reconstructions. Nous avons exploré deux voies qui ont permis d'améliorer les reconstructions. Dans la première, nous avons montré que l'utilisation d'une impulsion très étroite dans le temps, et donc très large en fréquence, permet d'obtenir des reconstructions qualitatives. Dans la seconde, nous avons proposé de considérer une marche en fréquences de modulation. Ces deux approches nous ont permis d'obtenir de très bons résultats.

Cette étude en «espace homogène» a été effectuée en utilisant des champs diffractés mesurés dans la chambre anéchoïque. L'utilisation de données expérimentales a permis de valider les algorithmes d'inversion.

Chapitre 7

Inversion multi-sources et multi-fréquences

Sommaire

7.1 Introduction

Dans les deux chapitres précédents, nous avons utilisé soit plusieurs sources rayonnant des champs harmoniques à une fréquence, soit une seule source rayonnant un champ transitoire. Nous allons maintenant combiner ces deux approches en considérant en même temps dans la procédure de minimisation les champs diffractés à plusieurs fréquences et pour plusieurs incidences.

Dans ce chapitre, nous n'utilisons qu'au plus $P = 8$ fréquences, avec un pas en fréquences de 1 GHz, et nous ne parlerons pas ici de données transitoires. Par ailleurs, nous nous servirons des champs mesurés dans la chambre anéchoïque, destinés à la constitution d'une seconde base de données.

Nous décrirons dans un premier temps le protocole expérimental utilisé pendant cette campagne de mesure et les différentes cibles à caractériser. Puis nous présenterons les résultats obtenus pour trois algorithmes d'inversion : la MGM, la MBM et la M^{2}GM.

7.2 Résultats d'inversion multi-fréquences et multi-sources

Dans cette configuration de mesures, le diffuseur est successivement éclairé par L sources, générant des champs harmoniques pour P fréquences. Nous devrons alors minimiser la fonction coût définie par la relation (3.36).

7.2.1 Description de la base de données

Tous les champs que nous inversons dans ce chapitre proviennent de mesures effectuées dans la chambre anéchoïque que nous avons décrit dans la première partie de ce manuscrit. Nous l'utilisons comme il est indiqué sur la Fig. 2.12. Pour ces mesures, nous illuminons différentes cibles, que nous décrirons par la suite, par $L = 8$ ou $L = 18$ sources équiréparties sur un cercle de rayon 1.67 m. Quant aux $N = 241$ récepteurs qui collectent le champ diffracté, ils sont situés eux aussi sur un cercle de même rayon, en évitant bien évidemment la zone d'exclusion due à l'arche métallique qui supporte la source. Rappelons que pour simuler plusieurs incidences, nous faisons tourner le diffuseur sur lui même, et laissons la source fixe sur l'arche. Le cornet, qui rayonne les champs incidents, est le même que celui présenté sur la Fig. 2.13. Il permet de travailler entre 1 et 18 GHz. Pour cette étude, nous nous limitons aux fréquences comprises entre 2 et 8 GHz avec un pas $\delta f = 1$ GHz. Nous distinguons deux bandes de fréquences : $[2-5]$ GHz (qui comporte $P = 4$ fréquences), et $[2-8]$ GHz (qui comporte $P = 7$ fréquences).

Nous considérons dans la présente étude trois diffuseurs diélectriques sans pertes, et une cible hybride constituée de métal et de diélectrique sans pertes. Les différents cylindres utilisés, qui sont tous de section circulaire, sont représentés sur les Fig. 7.1 et 7.2.

Le premier diffuseur, FoamDielInt, correspond en fait à la cible inhomogène décrit par la Fig. 2.15. Un cylindre de nylon de rayon 1.5 cm et de permittivité $\varepsilon_r = 3$ est inclus dans une

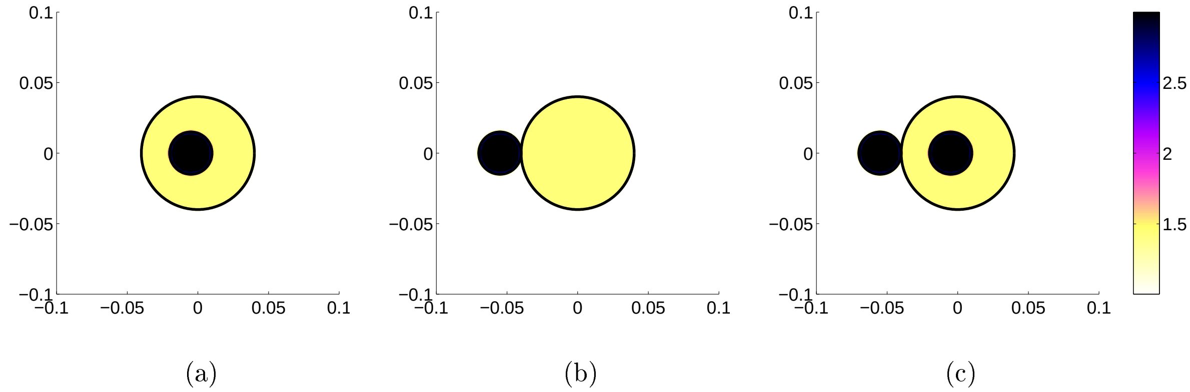


FIG. 7.1 – *Profil exacte des diffuseurs diélectriques utilisés. (a) :* FoamDielInt. *(b) :* FoamDielExt. *(c) :* FoamTwinDiel.

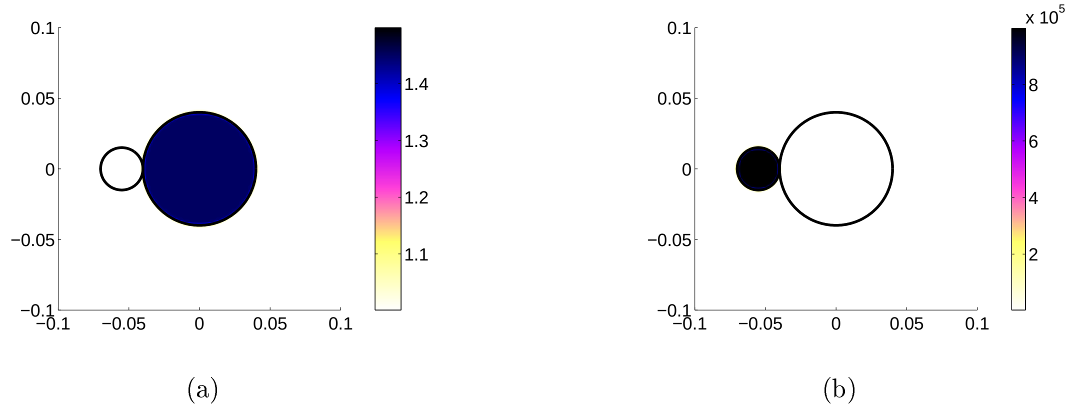


FIG. 7.2 – *Profil exacte du diffiseur hybride utilisé* FoamMetExt. *(a) : permittivité. (b) : conductivité.*

mousse homogène de rayon 4 cm et de permittivité $\varepsilon_r = 1.45$. Les centres des deux cylindres sont séparés de 0.5 cm.

Le deuxième objet, FoamDielExt, est comparable à FoamDielInt, à la différence que le diffuseur en nylon n'est plus à l'intérieur, mais à l'extérieur de la mousse.

Le troisième et dernier diffuseur diélectrique, FoamTwinDiel est une combinaison des deux précédents. Nous plaçons deux diffuseurs en nylon, l'un à l'intérieur, et l'autre à l'extérieur de la mousse comme décrit par la Fig. 7.1-(c). Les centres des trois cylindres sont alignés.

La dernière cible utilisée, FoamMetExt, est une cible hybride, dans le sens où elle est constituée de la mousse diélectrique et d'un tube métallique de rayon 1.4 cm placé à l'extérieur de la mousse, comme décrit sur la Fig. 7.2.

Les différents paramètres nécessaire à l'utilisation de la base de données sont synthétisées dans Tab. 7.1, où nous précisons le nombre d'incidences L utilisées pour chacune des cibles.

TAB. 7.1 – *Tableau récapitulatif du protocole expérimental.*

Diffuseur	**Figure**	**Bande de fréquences**	**Pas en fréquence**	**Incidence**
FoamDielInt	Fig.7.1-(a)	$\Delta_f = [2-8]$ GHz	$\delta f = 1$ GHz	$L = 8$
FoamDielExt	Fig.7.1-(b)	$\Delta_f = [2-8]$ GHz	$\delta f = 1$ GHz	$L = 8$
FoamTwinDiel	Fig.7.1-(c)	$\Delta_f = [2-8]$ GHz	$\delta f = 1$ GHz	$L = 18$
FoamMetExt	Fig.7.2	$\Delta_f = [2-8]$ GHz	$\delta f = 1$ GHz	$L = 18$

Nous pouvons remarquer que tous les cylindres utilisés mesurent 1.5 m dans la direction $\mathbf{e}_z$. Pour justifier l'approximation 2-D, nous devons comparer cette grandeur à la plus grande longueur d'onde, qui vaut 15 cm (pour $f = 2$ GHz). La dimension des cibles étant bien plus grande que la plus grande longueur d'onde, l'approximation 2-D est parfaitement acceptable.

Il est à noter que ces mesures doivent être calibrées pour pouvoir fixer une origine des phases et ajuster l'amplitude des signaux par rapport au modèle de champ incident que nous avons choisi (ligne source). Pour cela, nous multiplions les champs diffractés par le coefficient γ_p défini par (2.15).

Ensuite, nous utilisons les différents algorithmes d'inversion en considérant les $(L \times P)$ champs diffractés $E_{l,p}^{\mathrm{d;mes}}$ en même temps dans le processus de minimisation de la fonction coût (3.36).

Le domaine de recherche Ω est un domaine carré de 20 cm de coté, discrétisé en (64×64) mailles. Nous arrêtons le processus de minimisation de la fonction coût à l'itérée 50, ce qui laisse le temps à la fonction coût d'atteindre un palier aux alentours de 10^{-3}. Pour les itérées suivantes, nous n'avons pas observé de variation significative sur les résultats.

7.2.2 Premières reconstructions

Nous reportons sur les Fig. 7.3, 7.4 et 7.5 les reconstructions obtenues en utilisant la bande de fréquences $[2-5]$ GHz pour la M.^{2}G.M., la M.G.M. et la M.B.M., décrites dans la précédente partie de ce manuscrit, pour les cibles FoamDielInt, FoamDielExt et FoamTwinDiel respectivement.

Nous constatons sur la Fig. 7.5 que pour le diffuseur FoamTwinDiel les algorithmes ne convergent

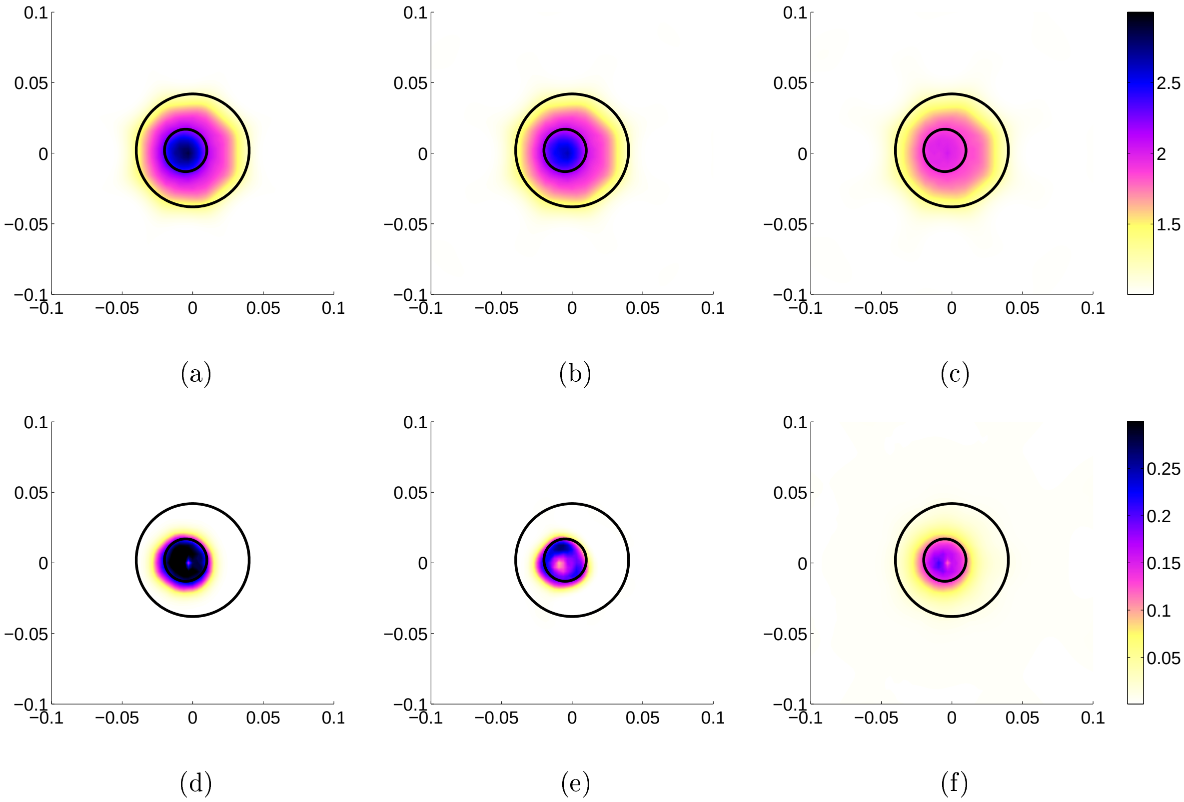


FIG. 7.3 – *Reconstructions obtenues avec la M.^{2}G.M. (première colonne), la M.G.M. (deuxième colonne) et la M.B.M. (troisième colonne), à partir des champs mesurés diffractés par* FoamDielInt *pour la bande de fréquences [2 − 5] GHZ. (a), (b) et (c) : permittivité recontruite. (d), (e) et (f) : conductivité recontruite.*

pas vers la solution. De plus, nous obtenons des objets métalliques avec une conductivité importante qui monte jusqu'à 3.5 S.m^{-1} pour la M.G.M.. Cette valeur de conductivité conduit à une épaisseur de peau de 0.62 cm pour la plus basse fréquence, ce qui correspond à 2 mailles de discrétisation de Ω. L'objet reconstruit contient une partie métallique.

Pour les deux autres cibles, les Fig. 7.3 et 7.4 laissent penser que nous n'utilisons pas suffisamment de hautes fréquences. En effet, les reconstructions manquent de résolution mais les algorithmes semblent converger vers la solution. Il s'agit là d'un résultat connu à basse fréquence [34]. Nous suggérons alors d'utiliser une gamme de fréquences plus large, afin d'améliorer le pouvoir de résolution sur la permittivité et diminuer la conductivité. Nous travaillons donc avec la bande de fréquences [2 − 8] GHz. Les résultats pour les cibles FoamDielInt et FoamDielExt sont reportés sur les Fig. 7.6 et 7.7. Nous ne présentons pas ici les reconstructions obtenues avec cette bande de fréquences pour la cible FoamTwinDiel, car les algorithmes, n'ayant pas convergé vers la solution

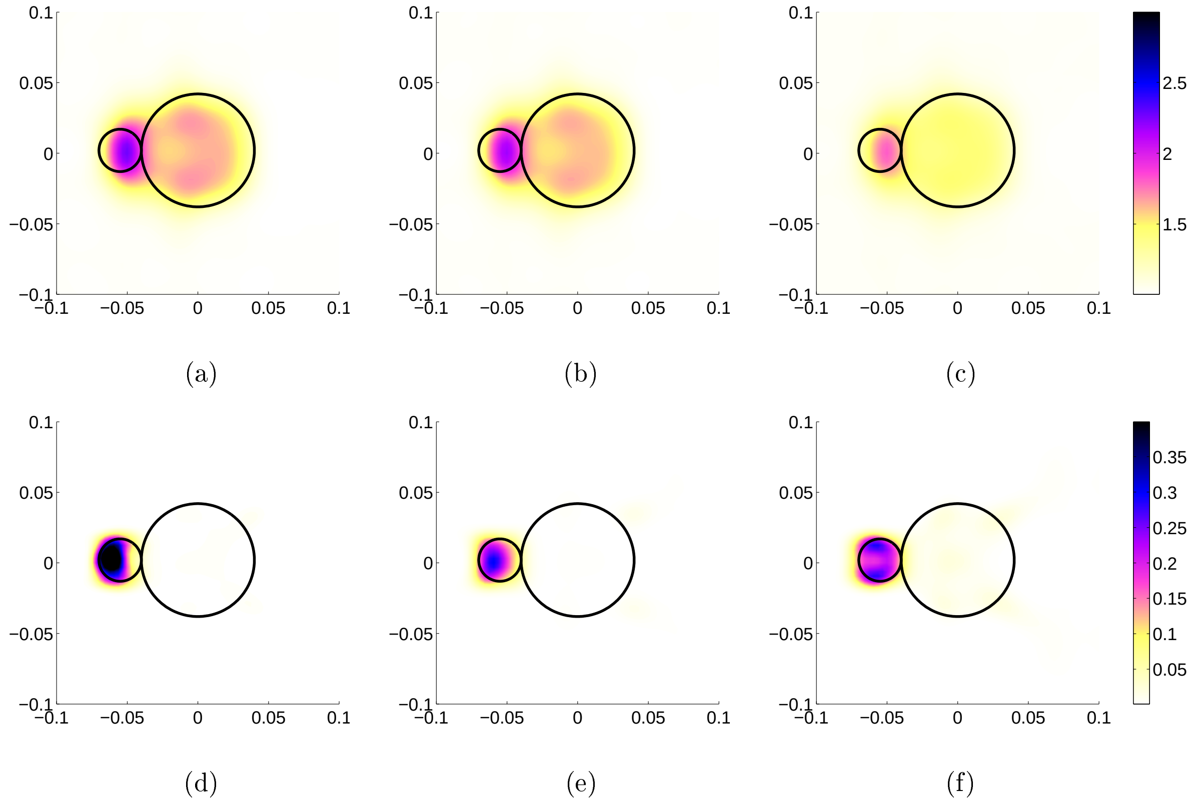


FIG. 7.4 – *Reconstructions obtenues avec la M.^{2}G.M. (première colonne), la M.G.M. (deuxième colonne) et la M.B.M. (troisième colonne), à partir des champs mesurés diffractés par* FoamDielExt *pour la bande de fréquences [$2-5$] GHZ. (a), (b) et (c) : permittivité recontruite. (d), (e) et (f) : conductivité recontruite.*

avec 4 fréquences basses, ne pourront le faire avec 3 hautes fréquences supplémentaires.

Cette fois-ci, les résultats sont sans appel, et les reconstructions obtenues nous conduisent à penser que les deux cibles FoamDielInt et FoamDielExt contiennent une partie métallique là où nous devrions retrouver le cylindre en nylon. En effet, si nous regardons les conductivités maximales, nous obtenons pour FoamDielInt 1.6, 0.8 et 0.8 S.m^{-1} pour la M.^{2}G.M., la M.G.M. et la M.B.M. respectivement, et pour le FoamDielExt 4.2, 2.1 et 1.5 S.m^{-1} pour la M.^{2}G.M., la M.G.M. et la M.B.M. respectivement. Ces valeurs de conductivité nous conduisent à des épaisseurs de peau comprises entre 1.4 cm et 0.5 cm pour la plus basse fréquence. Nous pouvons remarquer que partout où nous obtenons une conductivité forte, nous avons une permittivité relative très faible.

Avant de chercher des explications à ces résultats décevants, arrêtons-nous sur la cible hybride. Les résultats pour la bande de fréquences [$2-5$] GHz sont reportés sur la Fig. 7.8.

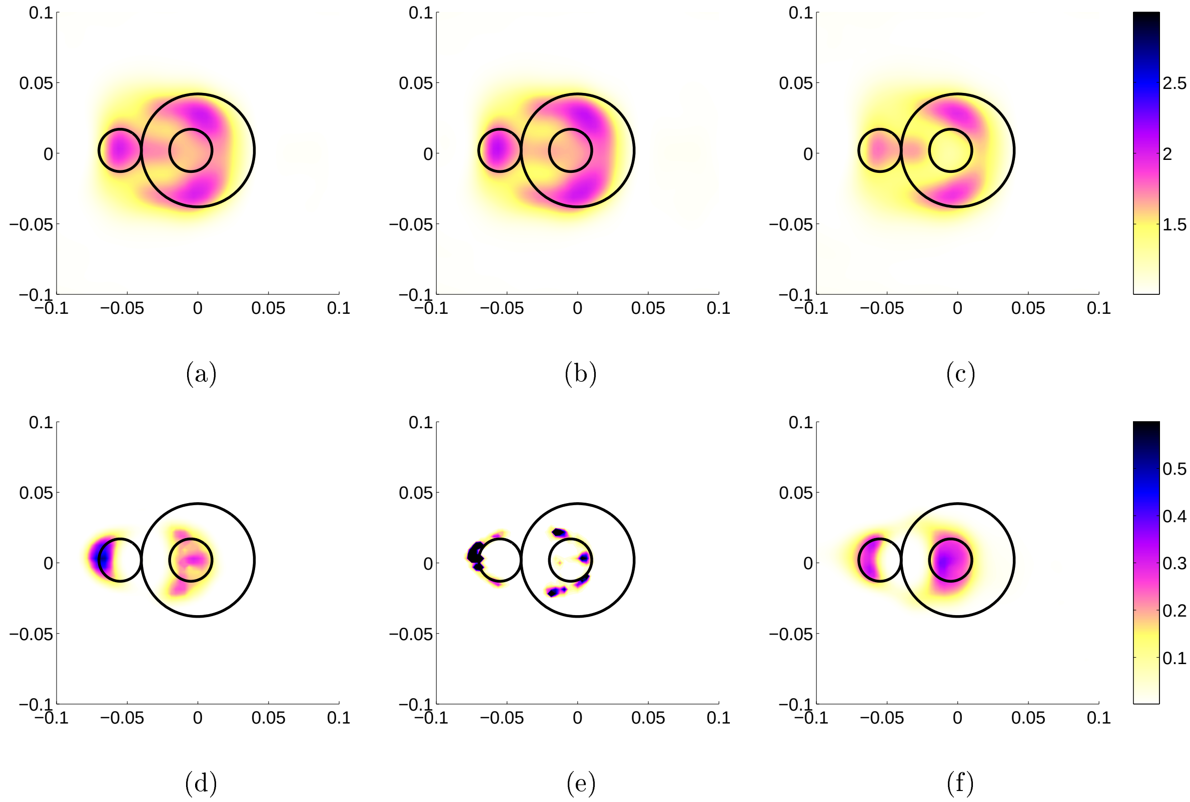


FIG. 7.5 – *Reconstructions obtenues avec la M.^{2}G.M. (première colonne), la M.G.M. (deuxième colonne) et la M.B.M. (troisième colonne), à partir des champs mesurés diffractés par* FoamTwinDiel *pour la bande de fréquences [$2-5$] GHZ. (a), (b) et (c) : permittivité recontruite. (d), (e) et (f) : conductivité recontruite.*

Pour la bande de fréquences $[2-5]$ GHz, les résultats obtenus pour la cible FoamMetExt sont similaires à ceux obtenus pour les cibles diélectriques, à savoir que le pouvoir le résolution n'est pas suffisant pour être acceptable. En effet, la conductivité est bien reconstruite avec un maximum de 7.2 S.m^{-1} pour la M.B.M., ce qui correspond à une épaisseur de peau de 0.42 cm, soit, environ 1 maille de discrétisation. La cible reconstruite contient une partie métallique. Cependant, la permittivité semble nous conduire vers deux tiges diélectriques : la mousse de permittivité $\varepsilon_r = 1.45$ et une seconde de section droite plus allongée situé à gauche du tube métallique. Pour augmenter la qualité des reconstructions, nous utilisons la bande de fréquences $[2-8]$ GHz, et les résultats sont reportés sur la Fig. 7.9.

Cette fois-ci, le pouvoir de résolution a été grandement augmenté avec la prise en compte des fréquences plus élevées. En effet, l'ambiguïté sur la partie réelle est complètement levée : ce que

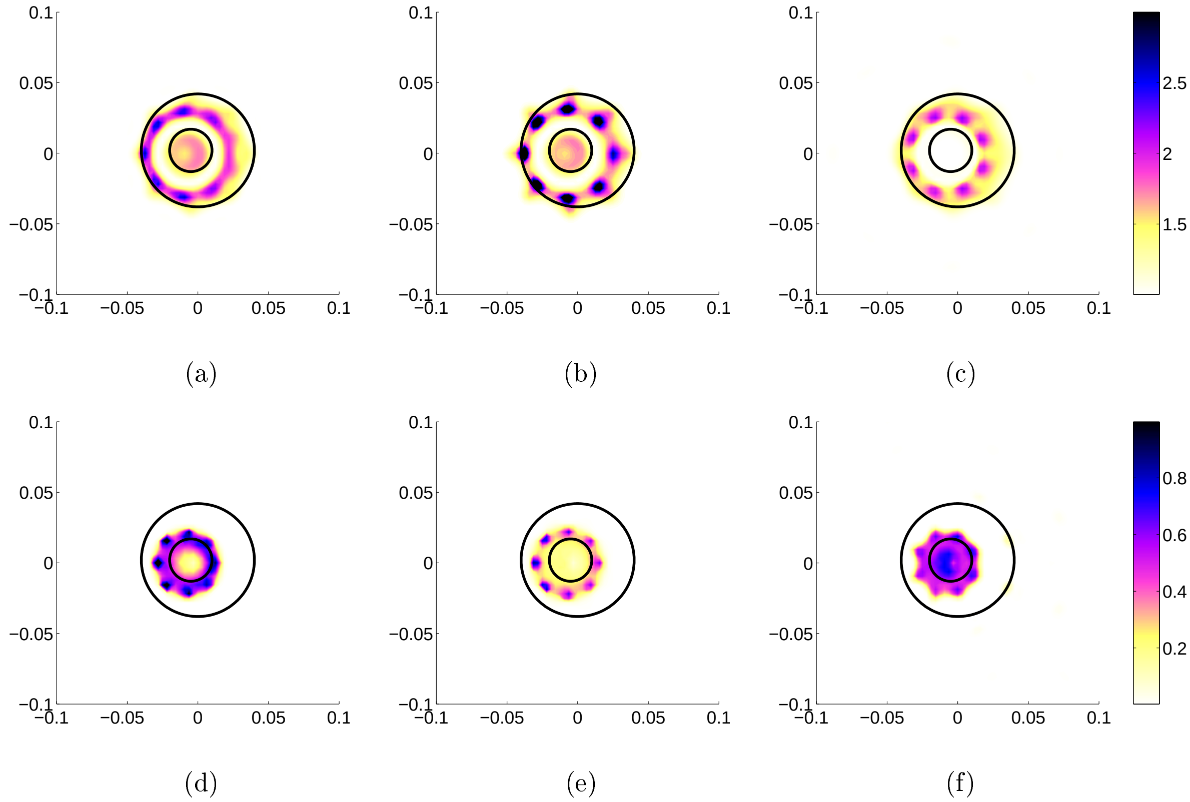
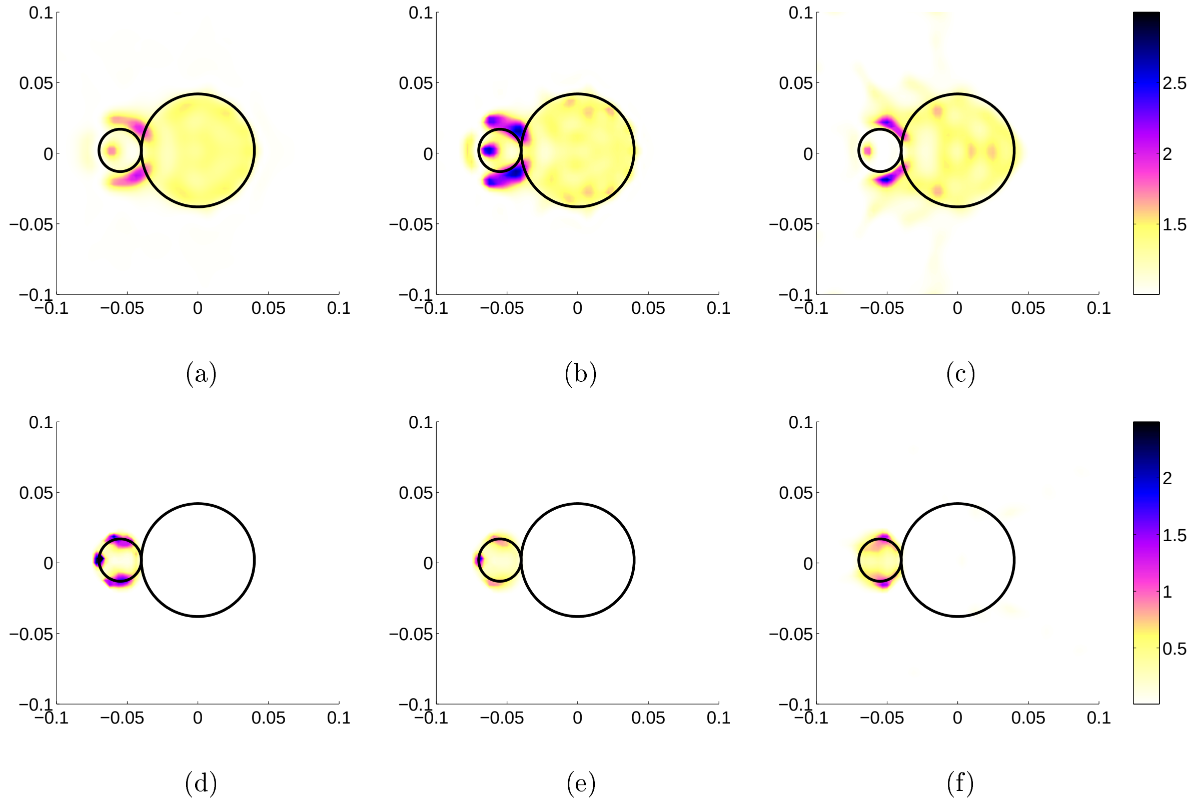


FIG. 7.6 – *Reconstructions obtenues avec la M.*^{2}*G.M. (première colonne), la M.G.M. (deuxième colonne) et la M.B.M. (troisième colonne), à partir des champs mesurés diffractés par* FoamDielInt *pour la bande de fréquences [2 – 8] GHZ. (a), (b) et (c) : permittivité recontruite. (d), (e) et (f) : conductivité recontruite.*

nous pensions être une seconde tige diélectrique a disparu. La mousse est parfaitement reconstruite, en forme et en valeur (sa permittivité est quasiment homogène). De plus, la valeur de la conductivité a augmenté, ce qui confirme qu'il s'agit bien d'un objet métallique.

Proposons maintenant des explications aux mauvais résultats obtenus pour les cibles diélectriques lorsque l'inversion est effectuée en considérant, en même temps dans le processus de minimisation de la fonction coût (3.36), $(P \times L)$ champs diffractés.



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

FIG. 7.7 – *Reconstructions obtenues avec la M.^{2}G.M. (première colonne), la M.G.M. (deuxième colonne) et la M.B.M. (troisième colonne), à partir des champs mesurés diffractés par* FoamDielExt *pour la bande de fréquences [2 − 8] GHZ. (a), (b) et (c) : permittivité recontruite. (d), (e) et (f) : conductivité recontruite.*

7.3 Pourquoi les résultats sur les cibles diélectriques ne sont-ils pas satisfaisants ?

En regardant les Fig. 7.3, 7.4, 7.5, 7.6 et 7.7 nous ne pouvons que dresser un constat d'échec car aucune de ces reconstructions n'est satisfaisante. Deux hypothèses sont alors envisageables :

- soit les mesures ne sont pas suffisamment précises et trop bruitées pour pouvoir extraire l'information relative aux paramètres que nous recherchons.
- soit la contribution des hautes fréquences domine tellement dans la fonction coût que l'inversion se fait essentiellement avec les hautes fréquences. Or, il est bien connu que la convergence des algorithmes d'inversion n'est pas assurée à hautes fréquences.

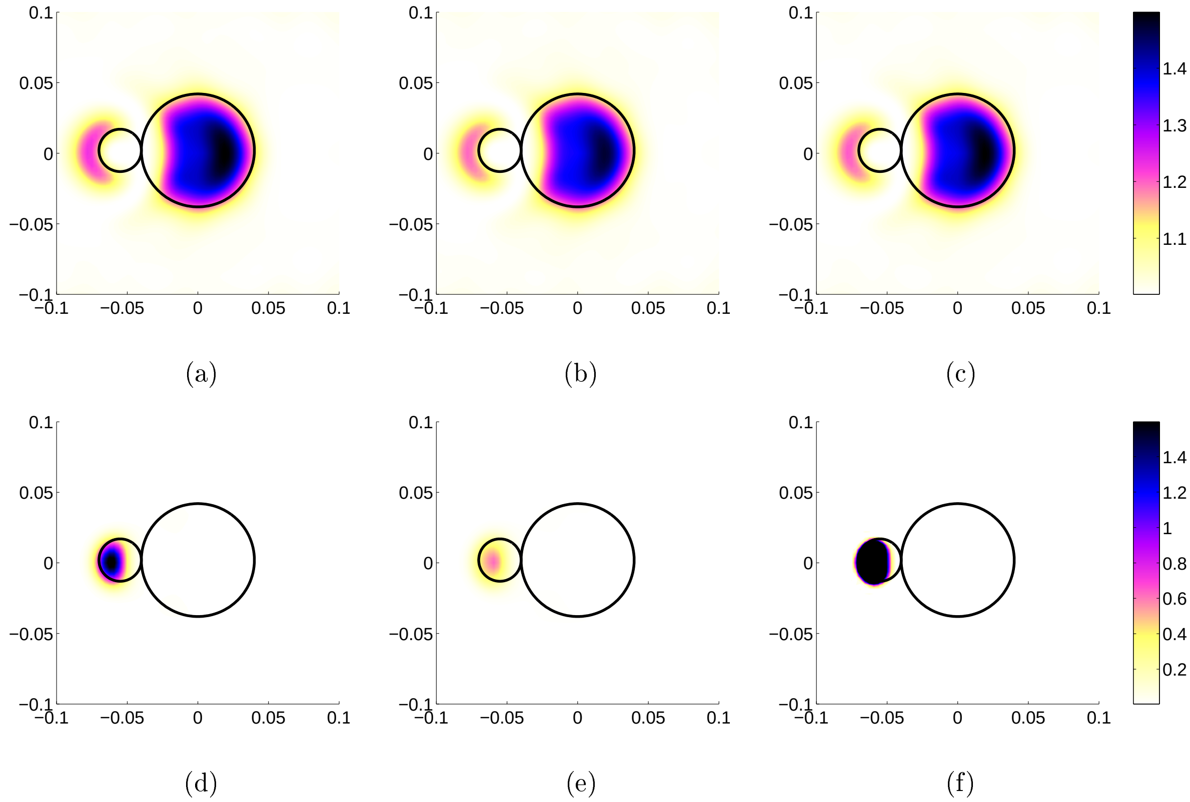


FIG. 7.8 – *Reconstructions obtenues avec la M.^{2}G.M. (première colonne), la M.G.M. (deuxième colonne) et la M.B.M. (troisième colonne), à partir des champs mesurés diffractés par* FoamMetExt *pour la bande de fréquences [2 − 5] GHZ. (a), (b) et (c) : permittivité recontruite. (d), (e) et (f) : conductivité recontruite.*

7.3.1 Analyse de la première hypothèse

Dans un premier temps, nous incriminons la qualité des mesures. Bien que le dispositif expérimental et les expérimentateurs aient fait leurs preuves par le passé en menant en 2001 une campagne de mesures qui a servi de base de données pour tester des algorithmes d'inversion [36], les champs électriques mesurés ici sont peut être beaucoup plus bruités ou moins précis, et l'information relative aux différents diffuseurs, excepté pour le FoamMetExt, n'est tout bonnement pas accessible.

Pour vérifier si cette hypothèse est valable et suffit pour expliquer les mauvaises reconstructions, nous pourrions utiliser dans les algorithmes d'inversion des données synthétiques (non bruitées), générées en résolvant le problème direct. Pour cela, il faudrait connaître parfaitement la configuration de l'étude et les différentes cibles que nous cherchons à caractériser. Nous préférons explorer

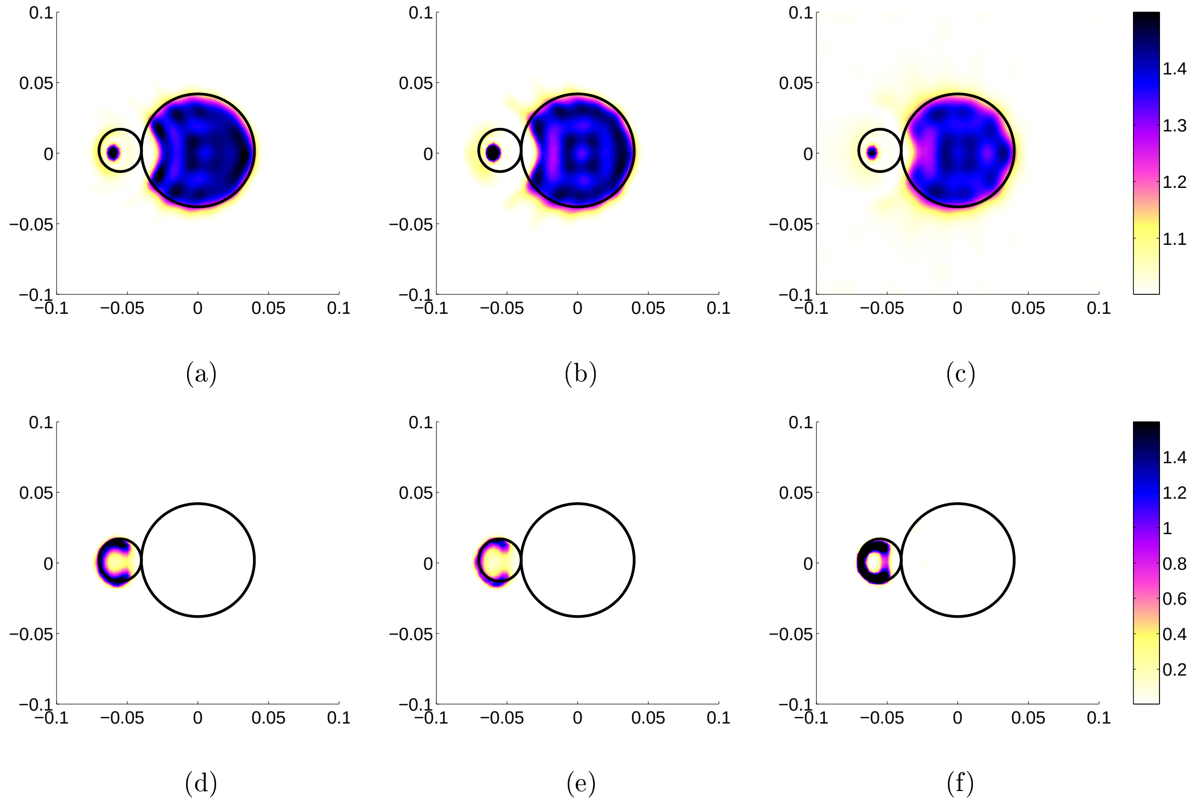


FIG. 7.9 – *Reconstructions obtenues avec la M.^{2}G.M. (première colonne), la M.G.M. (deuxième colonne) et la M.B.M. (troisième colonne), à partir des champs mesurés diffractés par* FoamMetExt *pour la bande de fréquences [2 − 8] GHZ. (a), (b) et (c) : permittivité recontruite. (d), (e) et (f) : conductivité recontruite.*

une autre alternative, qui utilise exclusivement les champs mesurés, sans aucune connaissance *a priori* sur les diffuseurs à reconstruire.

Pour cela, nous mettons en place une inversion fréquence par fréquence en utilisant le frequency-hopping [35]. Nous allons utiliser le formalisme développé dans la partie sur l'inversion de données harmoniques en minimisant la fonction coût donnée par (3.27) avec $L = 8$ ou 18 selon les diffuseurs.

Bien que nous résolvions le problème inverse pour chacune des $P = 7$ fréquences, nous ne présentons les cartes de permittivité que pour les fréquences $f = 2$, 5 et 8 GHz obtenues avec la M.^{2}G.M.. Pour ces trois objets, les résultats sont reportés sur la Fig. 7.10. Nous ne présenterons pas les résultats obtenus pour le FoamMetExt car pour cet objet, il ne semble pas y avoir de problèmes liés à la mesure.

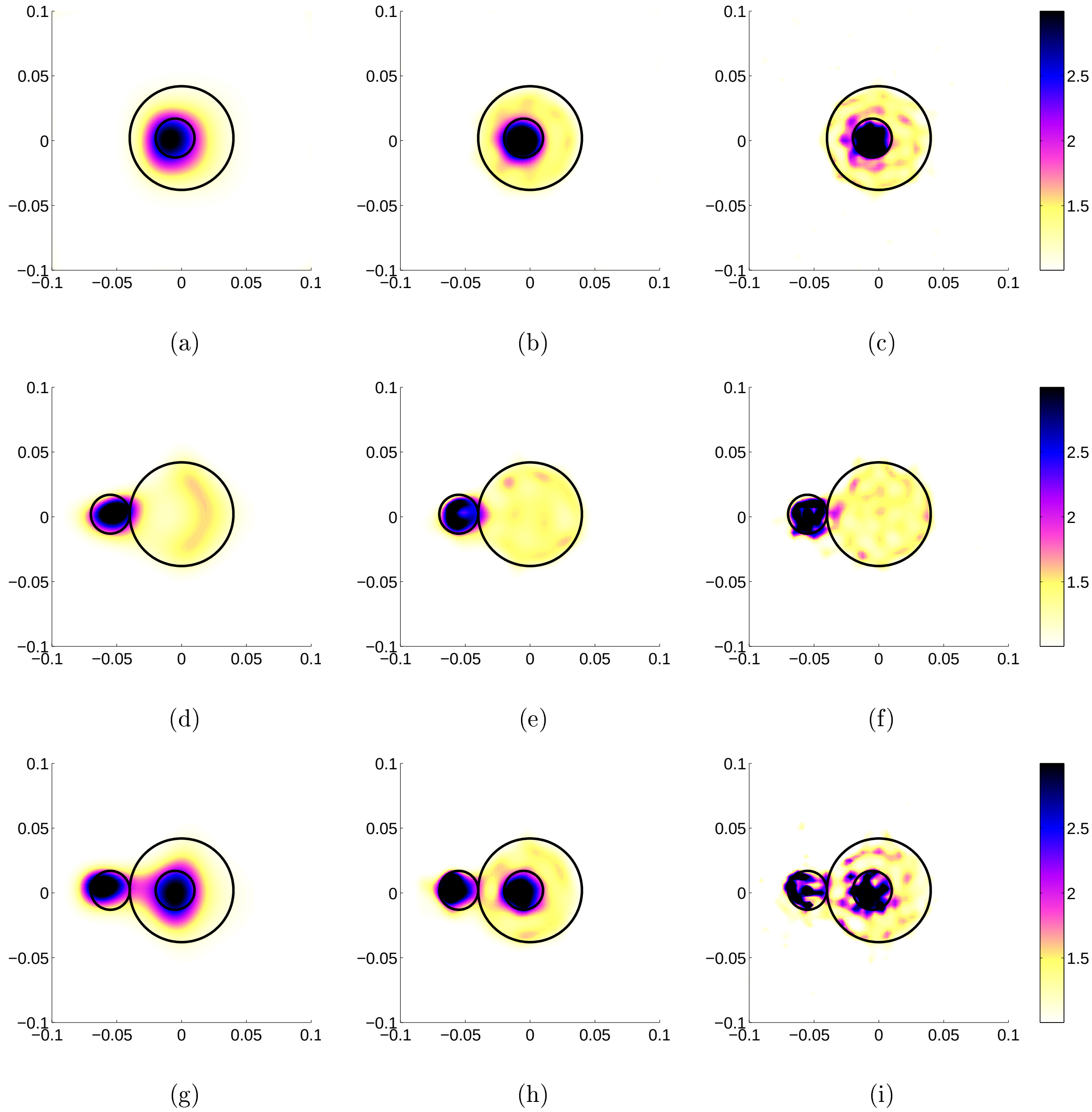


FIG. 7.10 – *Cartes de permittivité reconstruites en utilisant une approche harmonique combinée à un frequency-hopping. (a), (b) et (c) : résultats pour le* FoamDielInt *à 2, 5 et 8 GHz. (d), (e) et (f) : résultats pour le* FoamDielExt *à 2, 5 et 8 GHz. (g), (h) et (i) : résultats pour le* FoamTwinDiel *à 2, 5 et 8 GHz.*

En regardant ces résultats, nous voyons clairement la résolution sur la permittivité augmenter entre 2 et 5 GHz pour les trois cibles. Ensuite, pour la plus haute fréquence utilisée, l'amélioration n'est pas flagrante, et nous observons même une légère détérioration des images. Ceci est peut être dû au pas en fréquences très grand. Rappelons que celui-ci vaut $\delta f = 1$ GHz. Pour y remédier, nous pouvons par exemple faire plus de mesures moins espacées en fréquence, et il faudra alors refaire des mesures. Une autre solution consiste à utiliser une procédure de régularisation pour améliorer les reconstructions [27, 31, 30].

Cette étude effectuée seulement avec la méthode hybride M.^{2}G.M. permet de conclure que l'hypothèse formulée sur la qualité des mesures n'est pas recevable : les mesures sont suffisamment précises et nous avons assez d'informations pour obtenir des reconstructions satisfaisantes. Examinons alors la seconde hypothèse que nous avons formulée.

7.3.2 Analyse de la seconde hypothèse

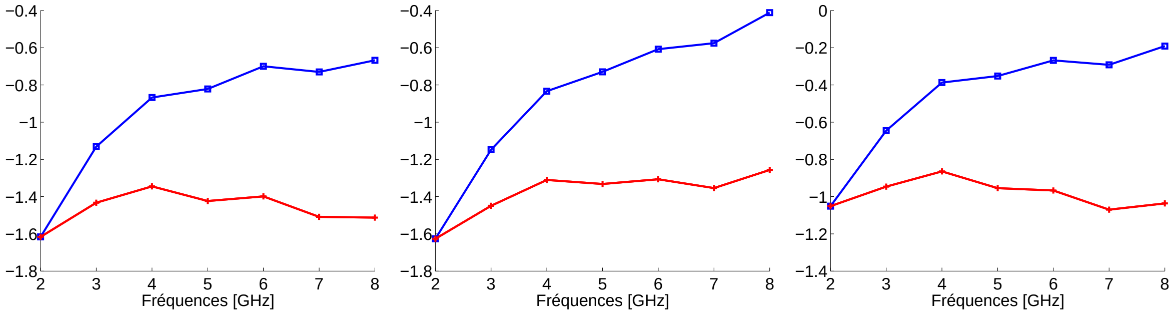
La seconde hypothèse que nous avons formulée est en rapport avec le poids des champs diffractés à chacune des différentes fréquences. Nous savons en effet que si nous ne travaillons qu'avec des hautes fréquences, les algorithmes ont de fortes chances de ne pas converger vers la solution. Ainsi, si les contributions des hautes fréquences dominent nettement dans la fonction coût (3.36), nous n'obtiendrons pas de reconstructions satisfaisantes.

Pour vérifier si cette seconde hypothèse suffit à expliquer les mauvais résultats, nous proposons de regarder le comportement des poids de chacune des fréquences dans la fonction coût (3.36). Pour cela, nous considérons la fonction W dépendante de la fréquence définie de la manière suivante :

$$W(p) = \sum_{l=1}^{L} \| E_{l,p}^{\mathrm{d;mes}} \|_{\Gamma}^{2} \,. \tag{7.1}$$

Nous reportons sur la Fig. 7.11 le logarithme en base dix de W pour les 7 fréquences et pour les trois objets diélectriques.

Nous constatons (courbes bleues de la Fig. 7.11) que, pour les trois objets diélectriques, le poids des hautes fréquences domine dans la fonction coût (3.36). La convergence des algorithmes d'inversion n'est donc pas assurée car ils utilisent essentiellement les champs diffractés à hautes fréquences, et pas suffisamment les champs diffractés à basses fréquences. Nous proposons alors de pondérer les différentes contributions de chaque fréquence par un coefficient pour abaisser le poids des hautes fréquences et ainsi faire en sorte que les contributions de chacune des fréquences soient de même niveau. Si nous voulons donner le même poids aux différentes fréquences, les courbes en rouge de la Fig. 7.11, qui représentent l'évolution $W(p)/p$ en échelle logarithmique, nous incitent à pondérer les contributions de chacune des fréquences par un coefficient en $1/p$. En effet, quelque soit le diffuseur utilisé, la fonction $W(p)/p$ varie moins que $W(p)$, et surtout les hautes fréquences sont du même ordre de grandeur que les basses.



(a) (b) (c)

FIG. 7.11 – *Évolution du logarithme en base 10 de $W(p)$ et de $W(p)/p$ pour les trois cibles diélectriques. (a) :* FoamDielInt. *(b) :* FoamDielExt. *(c) :* FoamTwinDiel. *En bleu : $W(p)$. En rouge : $W(p)/p$.*

7.4 Prise en compte des poids différents de chaque fréquence

Compte tenu de ce qui précède, nous modifions la fonction coût (3.36) pour tenir compte du fait que les contributions des hautes fréquences dominent tellement que les algorithmes ne peuvent converger.

7.4.1 Première modification et résultats

Comme nous l'avons dit, les courbes en rouge de la Fig. 7.11 nous incitent à pondérer les contributions des différentes fréquences par $1/p$, de sorte que $W(p)/p$ reste du même ordre de grandeur quelque soit la fréquence. Pour cela nous pouvons soit multiplier les champs incidents $E_{l,p}^{\text{inc}}$ et diffractés $E_{l,p}^{\text{d;mes}}$ par $1/p$, soit minimiser la fonction coût $\mathcal{F}_n^{(1/P)}$ définie de la façon suivante :

$$\mathcal{F}_n^{(1/P)} = \frac{\sum_{p=1}^{P}(1/p)\sum_{l=1}^{L} \| h_{l,p,n}^{(1)} \|_\Omega^2}{\sum_{p=1}^{P}(1/p)\sum_{l=1}^{L} \| E_{l,p}^{\text{inc}} \|_\Omega^2} + \frac{\sum_{p=1}^{P}(1/p)\sum_{l=1}^{L} \| h_{l,p,n}^{(2)} \|_\Gamma^2}{\sum_{p=1}^{P}(1/p)\sum_{l=1}^{L} \| E_{l,p}^{\text{inc}} \|_\Gamma^2}. \tag{7.2}$$

Nous reportons les résultats obtenus avec FoamDielInt sur la Fig. 7.12 pour la bande de fréquences $[2-5]$ GHz. Nous n'exposons que les cartes de permittivité reconstruite cependant, les valeurs maximales de la conductivité reconstruite seront systématiquement relevées.

Nous pouvons alors constater que cette pondération a des effets positifs. Les trois cibles sont alors bien reconstruites quelque soit la méthode utilisée. Concernant la conductivité, nous obtenons des valeurs maximales valant 0.08, 0.07 et 0.3 S.m^{-1} pour le FoamDielInt et pour les trois méthodes (M.^{2}G.M., M.G.M. et M.B.M.), 0.08, 0.09 et 0.38 S.m^{-1} pour le FoamDielExt, et 0.06,

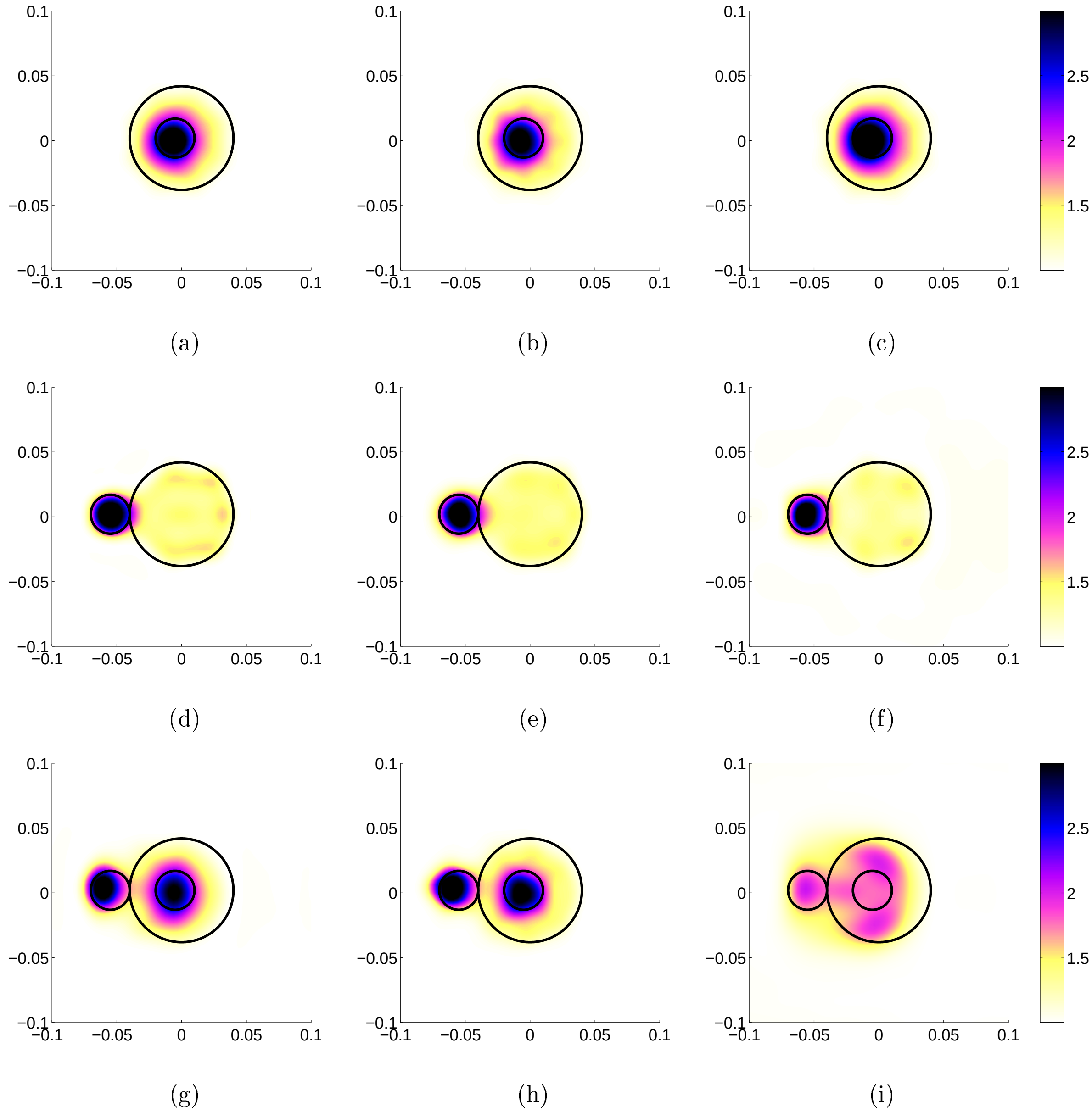


FIG. 7.12 – *Cartes de permittivité reconstruite en utilisant la bande de fréquences [2 − 5] GHz et en minimisant* $\mathcal{F}_n^{(1/P)}$. *(a), (b) et (c) : résultats pour le* FoamDielInt *avec la* M^2GM*, la M.G.M. et la M.B.M.. (d), (e) et (f) : résultats pour le* FoamDielExt *avec la* M^2GM*, la M.G.M. et la M.B.M.. (g), (h) et (i) : résultats pour le* FoamTwinDiel *avec la* $M.^2G.M.$*, la M.G.M. et la M.B.M..*

0.08 et 0.31 $S.m^{-1}$ pour le FoamTwinDiel. Ces valeurs sont maintenant satisfaisantes, exceptées pour la M.B.M. où elles restent importantes. En effet, pour la plus basse fréquence considérée (2 GHz), nous obtenons des épaisseurs de peau d'environ 9 cm (2.6 cm pour la M.B.M.).

La pondération en $1/p$ a donc permis d'améliorer la qualité des reconstructions avec la bande de basses fréquences. Regardons maintenant sur la Fig. 7.13 ce que nous obtenons avec les $P = 7$ fréquences.

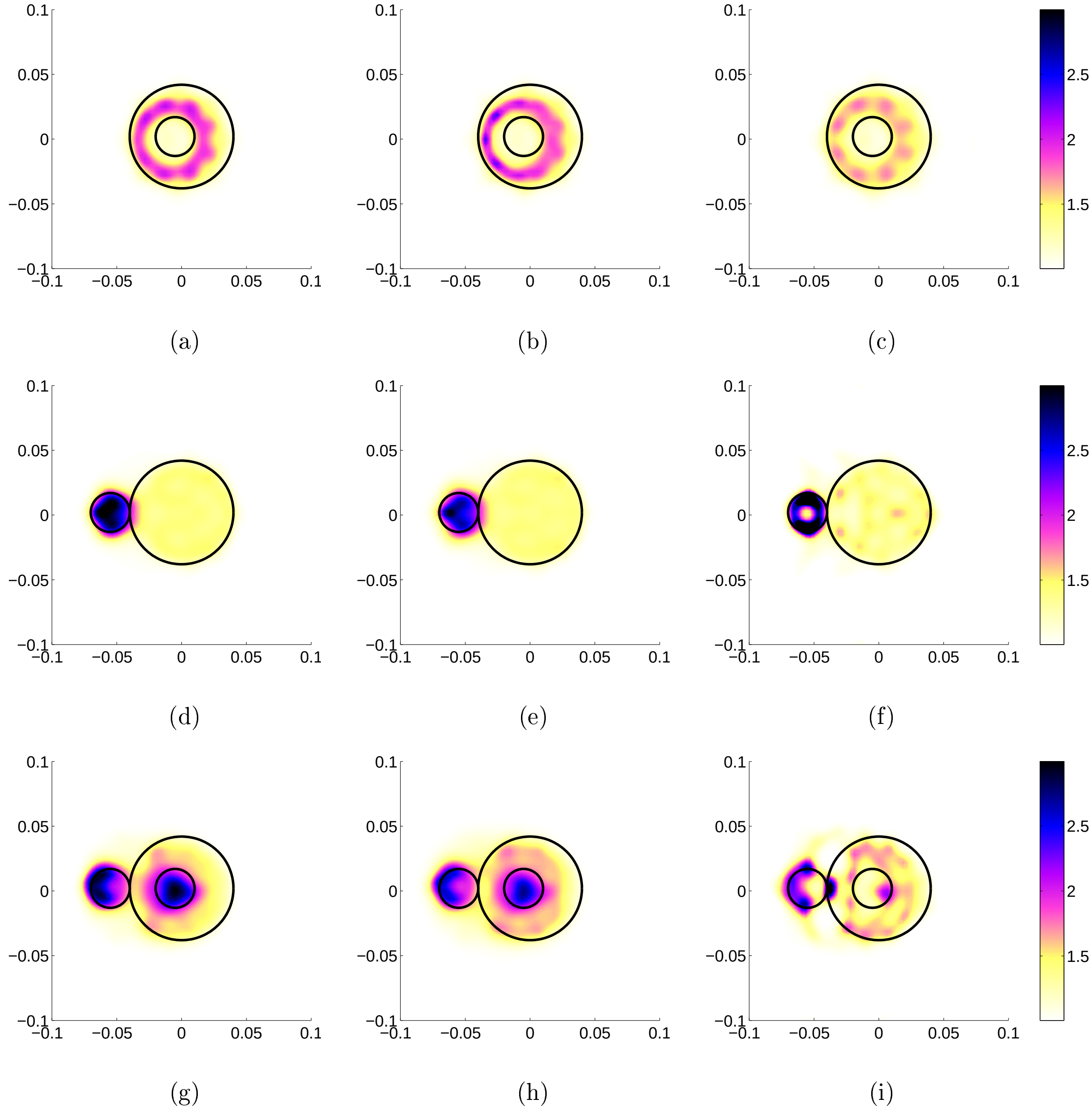


FIG. 7.13 – *Cartes de permittivité reconstruite en utilisant la bande de fréquences* $[2-8]$ *GHz et en minimisant* $\mathcal{F}_n^{(1/P)}$. *(a), (b) et (c) : résultats pour le* FoamDielInt *avec la* M^2GM*, la M.G.M. et la M.B.M.. (d), (e) et (f) : résultats pour le* FoamDielExt *avec la* M^2GM*, la M.G.M. et la M.B.M.. (g), (h) et (i) : résultats pour le* FoamTwinDiel *avec la* M^2GM*, la M.G.M. et la M.B.M..*

Cette fois-ci les résultats sont mitigés et les conclusions dépendent de la cible considérée. Pour FoamDielInt, la pondération n'a pas eu l'effet escompté ni sur la permittivité, ni sur la conductivité. En effet, bien qu'elle ait diminué (1.6, 0.8 et 0.8 S.m^{-1} pour la M.^{2}G.M., la M.G.M. et la M.B.M. sans pondération) nous obtenons des maxima valant 1.19, 0.67 et 0.48 S.m^{-1} pour la M.^{2}G.M., la M.G.M. et la M.B.M., ce qui correspond à des épaisseurs de peau comprises entre 1.1 et 1.5 cm.

Pour FoamTwinDiel, la permittivité a été améliorée pour la M.^{2}G.M.et la M.G.M.. Par contre, nous notons une dégradation pour la M.B.M.. Les valeurs maximales des conductivités reconstruites valent 0.09, 0.19 et 0.86 S.m^{-1} respectivement pour la M.^{2}G.M., la M.G.M. et la M.B.M., ce qui correspond à des épaisseurs de peau comprises entre 1 et 7 cm.

Enfin, pour la dernière cible diélectrique FoamDielExt, la pondération en $1/p$ permet d'améliorer la reconstruction de la permittivité quelque soit l'approche utilisée. La conductivité est, elle aussi, meilleure, car nous obtenons des valeurs maximales valant 0.16, 0.33 et 0.91 S.m^{-1} pour la M.^{2}G.M., la M.G.M. et la M.B.M., à comparer avec les valeurs obtenues sans pondérations (4.2, 2.1 et 1.5 S.m^{-1} pour la M.^{2}G.M., la M.G.M. et la M.B.M.).

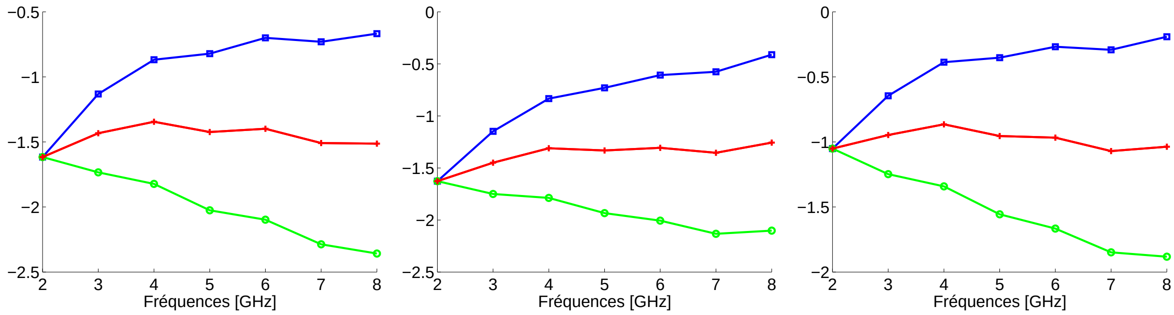
La synthèse des résultats exposés sur les Fig. 7.12 et 7.13 nous conduit à dire que la pondération en $1/p$ de la fonction coût nous permet d'améliorer les reconstructions de la permittivité pour les deux bandes de fréquences (sauf pour FoamDielInt). Cependant, pour la gamme de fréquences $[2-8]$ GHz, la valeur maximale de la conductivité reconstruite reste importante, et nous devons encore modifier la fonction coût.

7.4.2 Seconde modification et résultats

En poursuivant l'idée de pondérer la fonction coût en fréquence, nous examinons la puissance de $1/p$ suivante, à savoir $1/p^2$. La fonction coût à minimiser est maintenant définie de la manière suivante :

$$\mathcal{F}_n^{(1/P^2)} = \frac{\sum_{p=1}^{P}(1/p^2)\sum_{l=1}^{L} \| h_{l,p,n}^{(1)} \|_\Omega^2}{\sum_{p=1}^{P}(1/p^2)\sum_{l=1}^{L} \| E_{l,p}^{\mathrm{inc}} \|_\Omega^2} + \frac{\sum_{p=1}^{P}(1/p^2)\sum_{l=1}^{L} \| h_{l,p,n}^{(2)} \|_\Gamma^2}{\sum_{p=1}^{P}(1/p^2)\sum_{l=1}^{L} \| E_{l,p}^{\mathrm{inc}} \|_\Gamma^2}. \tag{7.3}$$

Cette nouvelle pondération nous permet de diminuer encore un peu plus la contribution des hautes fréquences comme nous pouvons le vérifier sur la Fig. 7.14, où nous traçons en vert le logarithme en base dix de $W(p)/p^2$ pour les 7 fréquences utilisées et pour les trois objets diélectriques. Pour pouvoir suivre l'effet de la pondération, nous rapportons aussi sur cette figure le logarithme en base dix de $W(p)$ (en bleu) et de $W(p)/p$ (en rouge).



(a) (b) (c)

Fig. 7.14 – *Évolution du logarithme en base 10 de $W(p)$, de $W(p)/p$ et de $W(p)/p^2$ pour les trois cibles diélectriques. (a) :* FoamDielInt. *(b) :* FoamDielExt. *(c) :* FoamTwinDiel. *En bleu : $W(p)$. En rouge : $W(p)/p$. En vert : $W(p)/p^2$.*

La contribution des hautes fréquences est bien inférieure à celle des basses fréquences. Regardons maintenant les reconstructions obtenues en minimisant la fonction coût (7.3). Nous reportons les permittivités reconstruites sur la Fig. 7.15 pour la bande de fréquences $[2-5]$ GHz ($P = 4$). Pour les conductivités, nous nous contentons des valeurs maximales.

Cette fois-ci, les reconstructions sont tout à fait acceptables : tous les objets ont la bonne forme, et la valeur de leur permittivité correspond quasiment à la bonne valeur. De plus, les valeurs maximales des conductivités reconstruites ont encore baissé par rapport aux résultats de la Fig. 7.12, et elles valent pour FoamDielInt 0.06, 0.08 et 0.08 $S.m^{-1}$, pour FoamDielExt 0.03, 0.04 et 0.05 $S.m^{-1}$ et pour FoamDielInt 0.06, 0.08 et 0.09 $S.m^{-1}$ pour la $M.^2G.M.$, la M.G.M. et la M.B.M. respectivement, ce qui ne laisse maintenant aucun doute sur le caractère purement diélectrique des cibles.

Il est donc intéressant maintenant de regarder si cette nouvelle pondération est suffisante pour la bande de fréquences $[2-5]$ GHz. Les résultats sont exposés sur la Fig. 7.16 où là encore, seules les cartes de permittivité reconstruite sont reportées.

En comparant les Fig. 7.13 et 7.16, nous constatons que les nouvelles reconstructions sont, pour toutes les cibles, bien meilleures que celles obtenues en pondérant la fonction coût par $1/p$. En effet, nous notons une nette amélioration des cartes de permittivité pour FoamDielInt. La conductivité maximale reconstruite vaut maintenant 0.08, 0.04 et 0.24 $S.m^{-1}$ pour la $M.^2G.M.$, la M.G.M. et la M.B.M. au lieu de 1.19, 0.67 et 0.48 $S.m^{-1}$ avec la pondération en $1/p$.

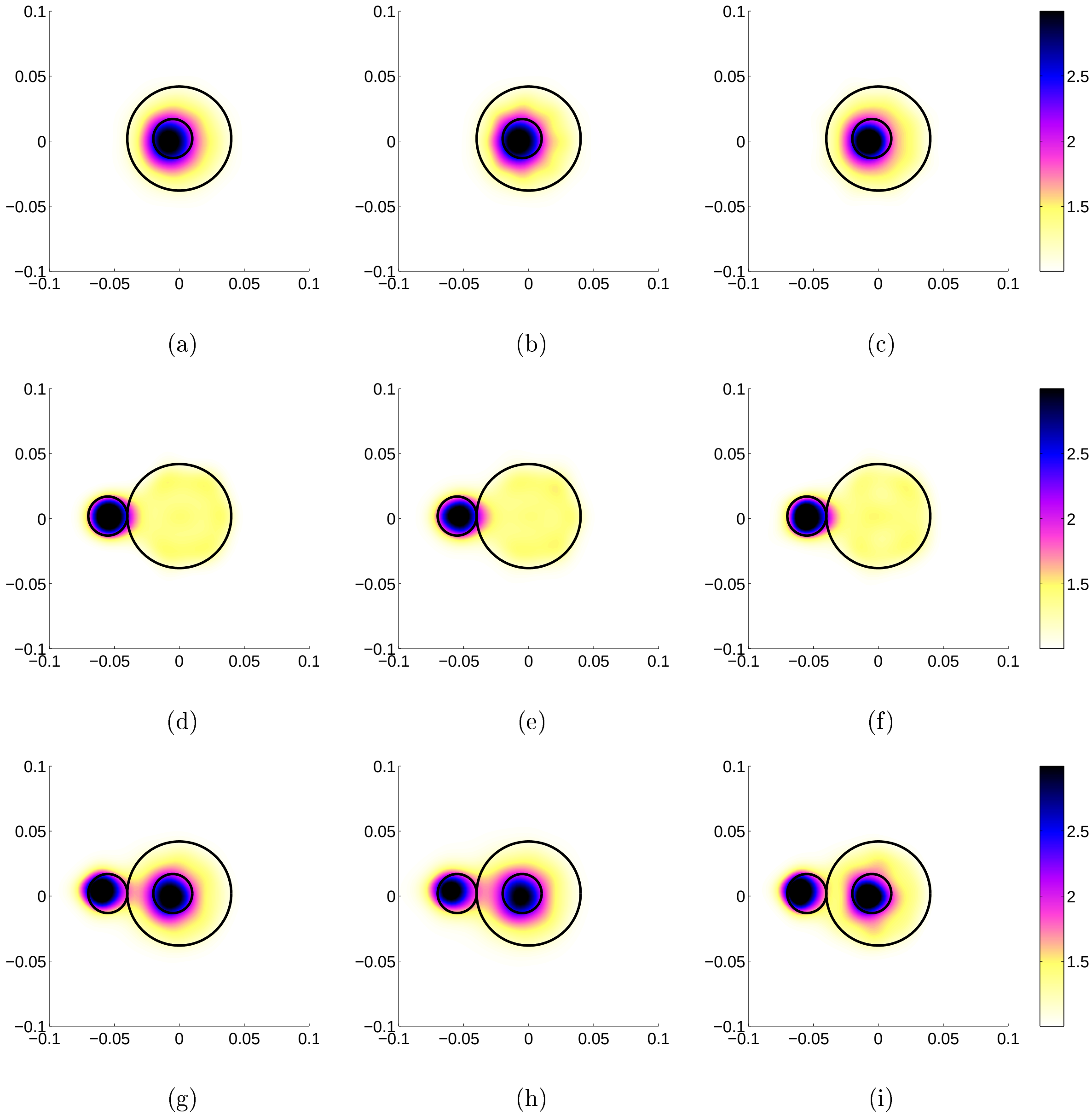


FIG. 7.15 – *Cartes de permittivité reconstruite en utilisant la bande de fréquences* $[2-5]$ *GHz et en minimisant* $\mathcal{F}_n^{(1/P^2)}$. *(a), (b) et (c) : résultats pour le* FoamDielInt *avec la M* ^{2}*GM, la M.G.M. et la M.B.M.. (d), (e) et (f) : résultats pour le* FoamDielExt *avec la M* ^{2}*GM, la M.G.M. et la M.B.M.. (g), (h) et (i) : résultats pour le* FoamTwinDiel *avec la M* ^{2}*GM, la M.G.M. et la M.B.M..*

Pour la cible FoamDielExt, la pondération en $1/p^2$ améliore encore un peu plus la reconstruction de la permittivité quelque soit l'approche utilisée. La conductivité est elle aussi meilleure, et nous obtenons des valeurs maximales valant 0.07, 0.08 et 0.09 S.m^{-1} pour la M.^{2}G.M., la M.G.M. et la

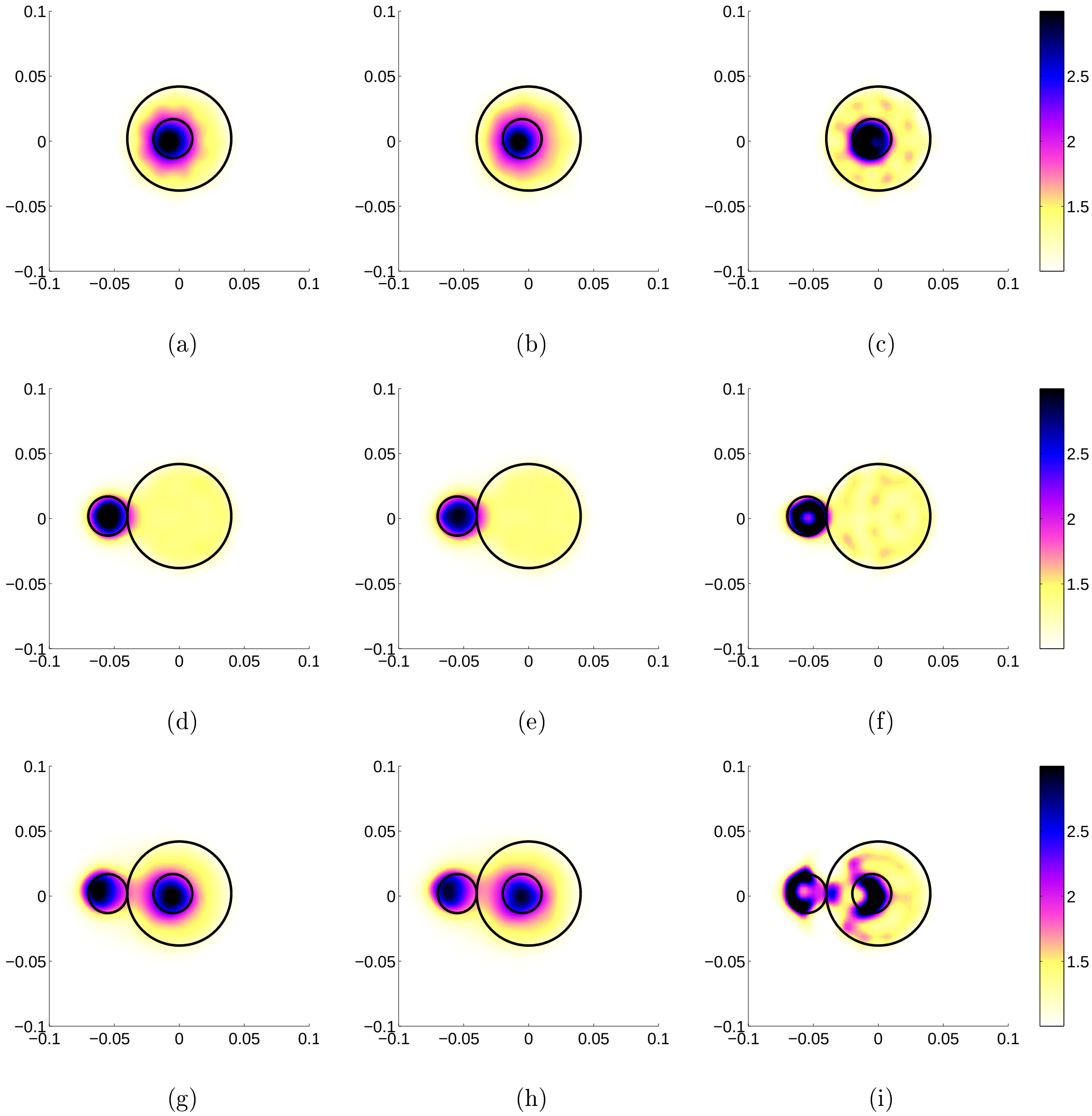


FIG. 7.16 – *Cartes de permittivité reconstruite en utilisant la bande de fréquences* $[2-8]$ *GHz et en minimisant* $\mathcal{F}_n^{(1/P^2)}$. *(a), (b) et (c) : résultats pour le* FoamDielInt *avec la* M^2GM*, la M.G.M. et la M.B.M.. (d), (e) et (f) : résultats pour le* FoamDielExt *avec la* M^2GM*, la M.G.M. et la M.B.M.. (g), (h) et (i) : résultats pour le* FoamTwinDiel *avec la* M^2GM*, la M.G.M. et la M.B.M..*

M.B.M. (0.16, 0.33 et 0.91 $\mathrm{S.m}^{-1}$ avec la pondération en $1/p$).

Enfin, pour la dernière cible diélectrique FoamTwinDiel, nous observons là aussi une réelle amélioration des permittivités reconstruites pour les trois méthodes d'inversion utilisées. Quant à la conductivité maximale, elle vaut maintenant 0.06, 0.12 et 0.38 S.m^{-1} pour la M.^{2}G.M., la M.G.M. et la M.B.M. (0.09, 0.19 et 0.86 S.m^{-1} avec la pondération en $1/p$).

Pour en terminer avec les cibles diélectriques, nous pouvons dire que cette fois-ci, la pondération en $1/p^2$ de la fonction coût est suffisante pour obtenir des reconstructions quantitatives. Ceci est vrai aussi bien pour la permittivité que pour la conductivité quelque soit la cible et quelque soit la méthode d'inversion utilisiées.

Avant de conclure ce chapitre, nous pouvons revenir sur la cible hybride. Nous avons constaté que sur les Fig. 7.8 et 7.9, les reconstructions obtenues sans aucune pondération de la fonction coût étaient tout à fait acceptables. Il est cependant intéressant de voir si nous les améliorons avec cette pondération. Les résultats sont reportés sur la Fig. 7.17 pour la bande de fréquences $[2-5]$ GHz et sur la Fig. 7.18 pour $[2-8]$ GHz.

La pondération n'a en rien détérioré les reconstructions, et au contraire, elle les a même améliorées, notamment pour la gamme de fréquences $[2-5]$ GHz. En effet, le second diffuseur diélectrique que nous observions sur la Fig. 7.8 n'est plus présent ici. De plus, le diélectrique reconstruit sur la Fig. 7.18 est beaucoup plus homogène et moins oscillant que celui reporté sur la Fig. 7.9.

7.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les résultats que nous avons obtenus en utilisant des champs diffractés provenant de plusieurs sources et de plusieurs fréquences en même temps dans la procédure de minimisation. Les diffuseurs étaient éclairés successivement par L sources rayonnant un champ harmonique à P fréquences différentes. Les cibles étaient soit totalement diélectriques, soit hybrides, mélanges de diélectrique et de métal.

Nous nous sommes limités à la configuration «espace homogène» et nous avons utilisé les champs électriques mesurés dans la chambre anéchoïque. Ceci nous a permis de valider encore une fois les algorithmes d'inversion.

Les premiers résultats obtenus ont été décevants, car les contributions des différentes fréquences dominaient dans la fonction coût, ce qui a entraîné la non convergence vers la solution des algorithmes utilisés. Nous avons alors proposé de pondérer en fréquence les différentes contributions. Avec cette pondération, nous avons obtenus des résultats quantitatifs sans jamais utiliser de procédure de régularisation. Une partie de ces résultats sont reportés dans [60].

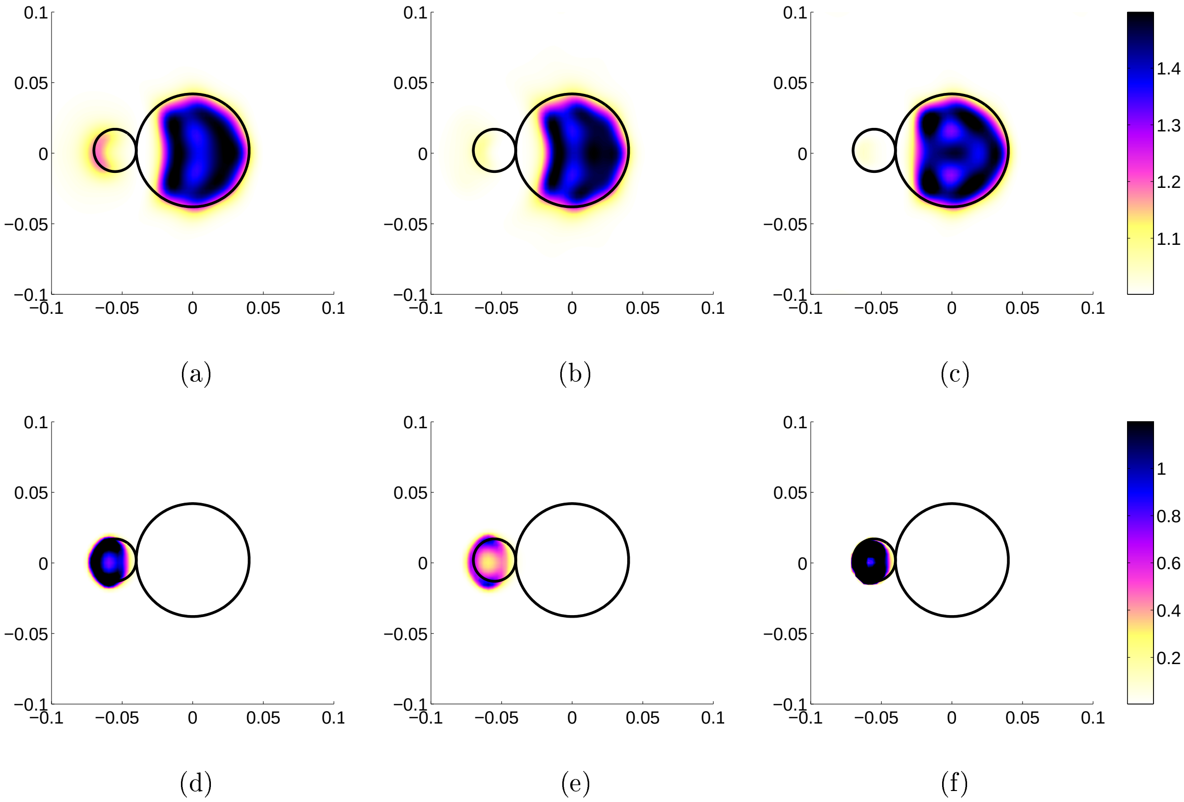


FIG. 7.17 – *Reconstructions obtenues en minimisant* $\mathcal{F}_n^{(1/P^2)}$ *avec la M.*^{2}*G.M. (première colonne), la M.G.M. (deuxième colonne) et la M.B.M. (troisième colonne), à partir des champs mesurés diffractés par* FoamMetExt *pour la bande de fréquences [2-5] GHZ. (a), (b) et (c) : permittivité recontruite. (d), (e) et (f) : conductivité recontruite.*

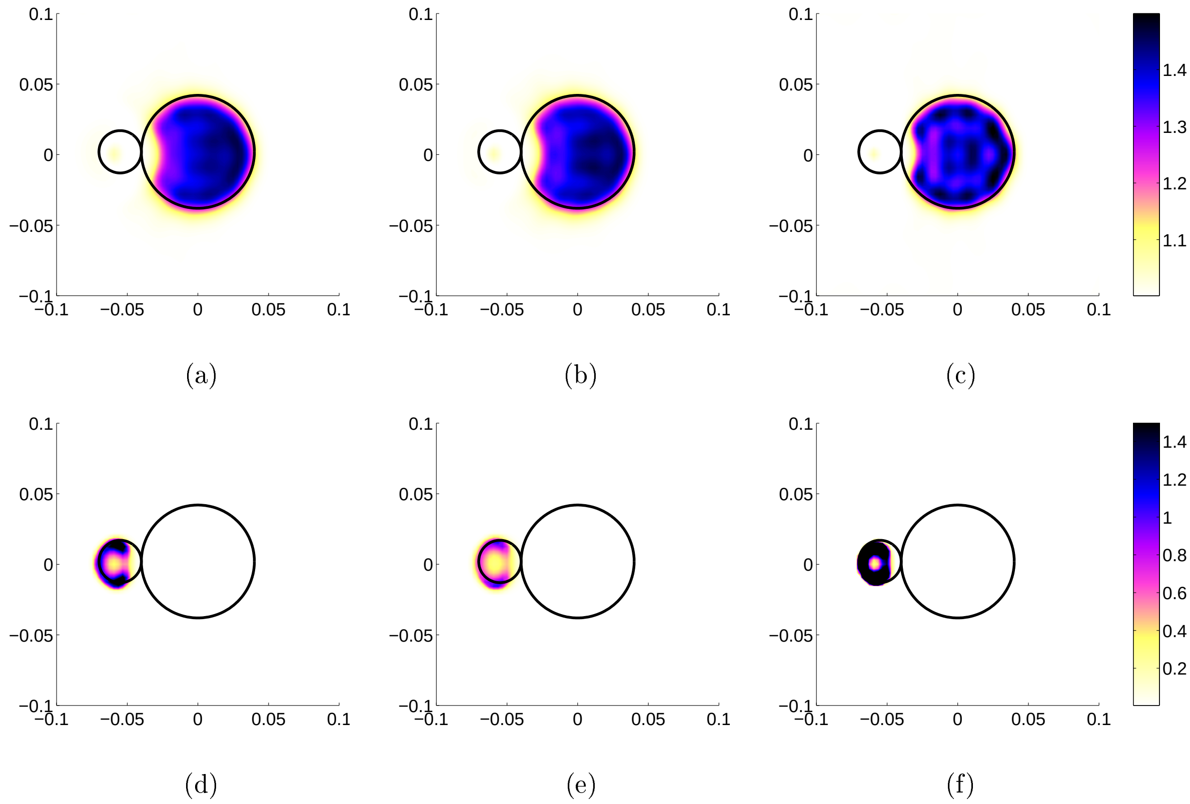


Fig. 7.18 – *Reconstructions obtenues en minimisant* $\mathcal{F}_n^{(1/P^2)}$ *avec la M.²G.M. (première colonne), la M.G.M. (deuxième colonne) et la M.B.M. (troisième colonne), à partir des champs mesurés diffractés par* FoamMetExt *pour la bande de fréquences [2-8] GHZ. (a), (b) et (c) : permittivité recontruite. (d), (e) et (f) : conductivité recontruite.*

Conclusion et perspectives

Dans ce manuscrit est décrit l'état d'avancement de nos travaux sur les problèmes de diffraction en régime transitoire. Les deux types de problèmes, directs et inverses, ont été successivement abordés pour deux configurations d'intérêt pratique : «espace homogène» et «objets enfouis».

Dans la première partie, nous avons présenté une méthode de résolution du problème direct en régime transitoire, qui consiste à déterminer la réponse d'un objet soumis à une excitation maîtrisée; nous nous sommes ainsi dotés d'un modèle de diffraction. À une résolution directement dans le domaine temporel, nous avons préféré un passage par le domaine fréquentiel. Nous avons utilisé une formulation rigoureuse donnée par la représentation intégrale des champs. Cela a permis de limiter le domaine de calcul au support des diffuseurs et de satisfaire les conditions de rayonnement au travers des fonctions de Green. Après avoir obtenu une première validation de l'algorithme en comparant nos résultats avec ceux de la littérature et mené une étude paramétrique, nous nous sommes confrontés à l'expérience. Nous avons alors comparé les champs mesurés dans la chambre anéchoïque et ceux que nous avons calculés. L'algorithme a donc pu être validé une seconde fois. Nous avons ainsi pu mettre le doigt sur des contraintes pratiques, matérielles, mécaniques, et même financières. Sans oublier bien sûr les problèmes liés à la mesure de champs électromagnétiques, notamment à hautes fréquences. Cependant, cela nous a aussi permis de rester en contact avec la «réalité», en simulant des matériaux réalistes.

Nous avons ensuite présenté les différents algorithmes d'inversion que nous avons développés puis utilisés dans différentes approches. Nous avons tout d'abord supposé que le diffuseur était successivement éclairé par plusieurs sources rayonnant un champ harmonique (multi-sources et mono-fréquence). Ensuite, nous ne considérions qu'une seule source rayonnant un champ transitoire (mono-source et multi-fréquences). Enfin, la dernière approche était une combinaison des précédentes : plusieurs sources rayonnant successivement un champ transitoire (multi-sources et multi-fréquences).

La dernière partie de ce manuscrit était consacrée à la présentation des résultats numériques. Nous avons commencé par l'approche multi-sources et mono-fréquence, dans la configuration «objets enfouis». Après avoir comparé les différents algorithmes sur des données idéales et vérifié l'intérêt de la marche en fréquences, nous nous sommes intéressés au problème plus compliqué d'un diffuseur enfoui dans un milieu hétérogène. Afin d'augmenter le rapport signal sur bruit et ainsi améliorer les reconstructions, nous avons incorporé les champs focalisants donnés par D.O.R.T. dans la procédure de minimisation. En effet, en apportant de l'énergie essentiellement sur le diffuseur, il nous a été possible de l'extraire du fouillis. Nous avons montré que l'apport des champs focalisants était particulièrement intéressant lorsque nous utilisions de l'information *a priori* sur le signe du contraste à déterminer. La contrainte de positivité que nous avons rajoutée nous a permis de lever l'ambiguïté sur le contraste inhérente à la géométrie stratifiée de la configuration.

Nous avons ensuite présenté les résultats obtenus à partir de données transitoires, en considérant une approche mono-source et multi-fréquences. Nous espérions que le caractère multi-fréquences nous permettrait de lever l'ambiguïté sur le signe du contraste pour la configuration «objets enfouis». Cela n'a malheureusement pas été le cas. Nous avons alors rajouté de l'information *a priori* en forçant le contraste à être positif. Puis, nous nous sommes intéressés à la configuration «espace homogène», où la positivité du contraste est contenue dans le fait que nous recherchions seulement des objets d'indice optique supérieur à un. Nous avons alors comparé deux façons de traiter les données transitoires. En effet, après avoir pris la transformée de Laplace des champs temporels, nous pouvions soit les inverser fréquence par fréquence (inversion harmonique) soit les considérer tous en même temps dans la procédure de minimisation (inversion temporelle). Contrairement à la première approche, l'inversion temporelle s'est révélée être robuste vis-à-vis du bruit. Nous avons ensuite proposé deux manières d'améliorer le pouvoir de résolution en jouant sur les différents paramètres de l'impulsion incidente. Nous pouvions réduire la durée de l'impulsion dans le temps, ce qui revenait à élargir le support du spectre du champ incident, et ainsi augmenter le nombre de fréquences à prendre en compte dans la procédure de minimisation. Il était aussi possible de mettre en œuvre une marche en fréquences de modulation. Cette seconde technique a été testée sur des champs mesurés en chambre anéchoïque.

Enfin, nous avons présenté les résultats de l'approche multi-sources et multi-fréquences en configuration «espace homogène» et sur plusieurs cibles diélectriques et/ou métalliques. Cette partie nous a permis de tester et valider les algorithmes avec les champs mesurés dans la chambre anéchoïque qui figurent dans la base de données 2005. Afin d'améliorer les reconstructions nous avons proposé de pondérer la fonction coût de sorte que les hautes fréquences ne dominent pas de manière excessive. Un article sur cette étude a été soumis dans Inverse Problems [60].

Pour poursuivre ces travaux, plusieurs voies sont envisageables. Il serait tout d'abord intéressant de pouvoir tester les différents algorithmes de résolution de problèmes directs et inverses en configuration «objets enfouis» avec des champs mesurés expérimentalement. Le dispositif de mesure mis en place à l'INTEC ne nous a pas permis d'effectuer des mesures satisfaisantes pour le moment, que se soit pour le problème direct ou pour l'inversion.
Par ailleurs, une seconde chambre anéchoïque permettant de faire des mesures de diffraction d'objets enfouis dans un bac à sable est en construction à l'Institut Fresnel. Les expérimentateurs de l'équipe S.E.M.O. pourront alors multiplier les configurations en variant les cibles et les différentes sortes de sables, voir imaginer des empilements de couches de sables différents...

Il serait aussi intéressant d'utiliser un dispositif expérimental capable de générer un champ transitoire. En utilisant un récepteur adapté, nous pourrions mesurer directement un champ dans le régime temporel. Cela permettrait de comparer les champs ainsi mesurés et ceux que nous calculons *via* un passage par le domaine fréquentiel.

La deuxième perspective envisageable serait de transposer le traitement harmonique que nous avons effectué avec les champs donnés par D.O.R.T. au régime transitoire. Nous pourrions alors utiliser les champs retournés comme des champs incidents supplémentaires et ainsi améliorer les reconstructions d'objets placés dans un milieu hétérogène. Pour cela nous pourrions utiliser l'approche multi-sources et multi-fréquences mais avec des champs transitoires au lieu de ne considérer que quelques fréquences.

Enfin, la dernière proposition que nous donnerons ici serait d'adapter tous ces travaux à une géométrie à trois dimensions. Cela permettrait de se rapprocher encore un peu plus de la réalité.

Bibliographie

[1] A.G. Tijhuis. *Electromagnetic Inverse Profiling: Theory and numerical Implementation.* PhD thesis, Delft University Technology, 1987.

[2] A.G. Tijhuis. Iterative Determination of Permittivity and Conductivity Profiles of a dielectric Slab in the Time Domain. *IEEE Transactions on Antennas Propagation*, 29(2):239–245, 1981.

[3] W.H. Weedon and W.C. Chew. Time-domain inverse scattering using the local shape function (LSF) method. *Inverse Problems*, 9:551–564, 1993.

[4] Z.Q. Peng and A.G. Tijhuis. Transient Scattering by a Lossy Dielectric Cylinder: Marching-on-in-Frequency Approch. *Journal of electromagnetic Waves and Applications*, 7(5):739–763, 1993.

[5] M. Moghaddam and W. C. Chew. Nonlinear Two-Dimensional Velocity Profile Inversion Using Time Domain Data. *IEEE transactions of geoscience an remote sensing*, 30(1):147–155, 1992.

[6] M. Moghaddam and W. C. Chew. Study of Some Parctical Issues in Inversion with the Born Iterative Method Using Time Domain Data. *IEEE transactions on antennas and propagation*, 41(2):177–184, 1993.

[7] B.A. Roberts and A.C. Kak. Reflexion mode diffraction tomography. *Ultrasonic Imaging*, 7:300–320, 1985.

[8] C. Prada and M. Fink. Eigenmodes of the time reversal operator: a solution to selective focusing in multiple-target media. *Wave Motion*, 20:151–163, 1994.

[9] C. Prada, S. Manneville, D. Spolianski, and M. Fink. Decomposition of the time reversal operator: detection and selective focusing on two scatterers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 9:2067–2076, 1996.

[10] Micolau G. *Etude théorique et numérique de la méthode de la Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel (D.O.R.T.) en diffraction électromagnétique.* Thèse de doctorat, Université de droit, d'économie et des sciences d'Aix-Marseille, 2001.

[11] H. Tortel, G. Micolau, and M. Saillard. Decomposition of the time reversable operator for electromagnetic scatterring. *Journal of electromagnetic Waves and Applications*, 13:687–719, 1999.

[12] S. Bonnard. *Reconstruction d'objets homogènes bidimensionnels en électromagnétisme : application à la tomographie.* Thèse de doctorat, Université de droit, d'économie et des sciences d'Aix-Marseille, 2002.

[13] A. Roger. Newton-Kantorovitch Algorithm Applied to an Electromagnetic Inverse Problem. *IEEE transactions on Antennas and Propagation*, AP-29(2):232–238, 1981.

[14] K. Belkebir, J.-M. Elissalt, J.-M. Geffrin, and C. Pichot. Newton-Kantorovich and Modified Gradient-Inversion Algorithms Applied to Ipswich Data. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 38(3):41–44, 1996.

[15] K. Belkebir, R. E. Kleinman, and C. Pichot. Microwave Imaging-Location and Shape Reconstruction from Multifrequency Scattering Data. *IEEE Transactions on microwave theory and techniques*, 45(4):469–476, 1997.

[16] W.C. Chew and Y.M. Wang. Reconstruction of Two-Dimensional Permittivity Distribution Using the Distorted Born Iterative Method. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 9(2):218–225, 1990.

[17] A. G. Tijhuis, K. Belkebir, A.C.S. Litman, and B.P. de Hon. Multiple-frequency distorted-wawe Born approach to 2D inverse profiling. *Inverse Problems*, 17:1635–1644, 2001.

[18] A. Franchois and C. Pichot. Microwave imaging - complex permittivity reconstruction with a Levenberg-Marquardt method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 45:203–215, 1997.

[19] R.F. Remis and P.M. van den Berg. On the equivalence of the Newton-Kantorovich and distorted Born methods. *Inverse Problems*, 16:L1–L4, 2000.

[20] T. M. Habashy, R. W. Groom, and B. R. Spies. Beyond the Born and Rytov Approximation: A Nonlinear Approach to Electromagnetic Scattering. *Journal of Geophysical research*, 98(B2):1759–1775, 1993.

[21] C. Torres-Verdin and T. M. Habashy. A two-Step Linear Inversion of Two-Dimensional Electrical Conductivity. *IEEE transactions on antennas and propagation*, 43(4):405–415, 1996.

[22] A. Abubakar and T. M. Habashy. A Green function formulation of the Extended Born approximation for three-dimensional electromagnetic modelling. *Wave Motions.*, 41:211–227, 2005.

[23] R.E. Kleinman and P.M. van den Berg. A modified gradient method for two-dimensional problems in tomography. *Journal of Computational Applied Mathematics*, 42:17–35, 1992.

[24] R.E. Kleinman and P.M. van den Berg. An extended range-modified gradient technique for profile inversion. *Radio Science*, 28(5):877–884, 1993.

[25] P. M. van den Berg and R. Kleinman. A contrast source inversion method. *Inverse Problems.*, 13:1607–1620, 1997.

[26] P. M. van den Berg, A.L. van Broekhoven, and A. Abubakar. Extended contrast source inversion. *Inverse Problems.*, 15:1325–1344, 1999.

[27] R.F. Bloemenkamp, A. Abubakar, and P.M. van den Berg. Inversion of experimental multi-frequency data using the contrast sources inversion method. *Invers Problems*, 17:1611–1622, 2001.

[28] K. Belkebir and A. G. Tijhuis. Modified^2 gradient method and modified Born method for solving a two-dimensional inverse scattering problem. *Inverses Problems*, 17:1671–1688, 2001.

[29] P. M. van den Berg and R. Kleinman. A total variation enhanced modified gradient algorithm for profile reconstruction. *Inverse Problems.*, 11:L5–L10, 1995.

[30] K. Belkebir A. Baussard and D. Prémel. Edge-preserving regularization sheme applied to Modified Gradient Method to reconstruct two-dimensional targets from data laboratory-controlled. *Journal of the Optical Society of America A*, 20(7):1223–1229, 2003.

[31] A. Baussard, K. Belkebir, and D. Prémel. A markovian regularization approach of the modified gradient method for solving a two-dimensional inverse scattering problem. *Journal of electromagnetic Waves and Applications*, 17(7):989–1008, 2003.

[32] L. Souriau, B. Duchêne, D. Lesselier, and R.E. Kleinman. Modified gradient method approach to inverse scattering for binary objects in statified media. *Inverse Problems*, 12:463–481, 1996.

[33] A. Litman. *Deux méthodes d'inversion pour la caractérisation électromagnétique d'objets enfouis : transformée de Fourier-Laplace inverse et déformation d'ensemble de niveaux.* Thèse de doctorat, Université de Paris xI, 1997.

[34] A. G. Tijhuis, K. Belkebir, A.C.S. Litman, and B.P. de Hon. Theorical and Computational Aspects of 2-D Inverse Profiling. *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*, 39(6):1316–1330, 2001.

[35] W.C. Chew and J.H. Lin. A Frequency-Hopping Approach for Microwave Imaging of Large Inhomogeneous Bodies. *IEEE Microwave and guided wave letters*, 5(12):439–441, december 1995.

[36] K. Belkebir and M. Saillard. Special section : Testing inversion algorithms against experimental data. *Inverse Problems*, 17:1565–1571, 2001.

[37] A. Dubois, K. Belkebir, and M. Saillard. Localization an characterization of two-dimensional targets buried in a cluttered environment. *Inverse Problems*, 20:S63–S79, 2004.

[38] D. Lesselier and B. Duchêne. *Buried, 2-Dpenetrable objects illuminated by line sources : FFT-based iterative computations of the anomalous field.* Tapan K. Sarkar, Syracuse University, Syracuse, NY, USA, 1991.

[39] R. Petit. *Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique.* Masson, 1993.

[40] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of mathematical fonctions.* Dover publications, INC., New York, 1972.

[41] A.G. Tijhuis and Z.Q. Peng. Marching-on-in-frequency method for solving integral equations in transient electromagnetic scattering. *IEEE Proceedings-H*, 138(4):347–355, 1991.

[42] A. Sentenac. *Étude de la diffusion des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses. Application à la conception de surfaces sélectives.* Thèse de doctorat, École centrale Paris, 1993.

[43] A. Taflove. *Advances in Computational Electrodynamics the Finite-Difference Time-Domain Method.* Artech House, inc., 1998.

[44] R.F. Harrington. The Method of Moments in Electromagnetics. *Journal of electromagnetic Waves and Applications*, 1(3):181–200, 1987.

[45] A.G. Tijhuis. Angularly Propagating Waves in a Radially Inhomogeneous, Lossy Dielelctric Cylinder and Their Connection with the Natural Modes. *IEEE Transactions on Antennas Propagation*, AP-34(6):813–824, 1986.

[46] G. Gazoty, R. Deleuil, and P. Sabouroux. Electromagnetic Diffraction From Metallic Deep Cross-Gratings. *IEEE Transactions on Antennas Propagation*, 51(7):1669–1670, 2003.

[47] S. Enoch, G. Tayeb, P. Sabouroux, N. Guerin, and P. Vincent. A metamaterial for directive emission. *Physical Review Letters*, 89(21):213902–1–213902–4, 2002.

[48] P. Boschi. Réalisation d'un kit de mesures temps réel de détermination des caractéristRapport de stage, Conservatoire National des Arts et Métiers, 2005.

[49] P. Sabouroux and P. Boschi. EpsiMu: A New Microwave Materials Measurements Kit. European Test and Telemetry Conference 2005, Toulouse, France.

[50] J.-M. Geffrin, P. Sabouroux C. Eyraud, and H. Tortel. 3D scattering measurements, validation with canonical targets. MMS 2004,pp. 122, Marseille, France.

[51] J.-M. Geffrin, P. Sabouroux, and C. Eyraud. Free Space Scattering Database Continuation: 2D Multi-dielectric and Hybrid Targets. ANTEM 2005, Saint Malo, France.

[52] K. Belkebir, S. Bonnard, F. Pezin, P. Sabouroux, and M. Saillard. Validation of 2D inverse scattering algorithms from multi-frequency experimental data. *Journal of electromagnetic Waves and Applications*, 14:1637–1667, 2000.

[53] C. Eyraud, J.-M. Geffrin, and P. Sabouroux. On the Accuracy of Scattering Measurements in Free Space: Random and Systematic Errors. ANTEM 2005, Saint Malo, France.

[54] M. Saillard and G. Toso. Electromagnetic scattering from bounded or infinite subsurface bodies. *Radio Science*, 32(4):1347–1360, 1997.

[55] A. Franchois, P. Lewyllie, and L. Taerwe. 2-D near-field SAR non-destructive testing of rebars in a concrete wall. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 19:333–338, 2004.

[56] A. Dubois. Tomographie par diffraction appliquée à l'imagerie bidimensionnelle électromagnétique. Rapport de stage, Université de Provence, 1998.

[57] R.E. Kleinman and P.M. van den Berg. Two-dimensional location and shape reconstruction. *Radio Science*, 29(4):1157–1196, 1994.

[58] C. Tsogka and G.C. Papanicolaou. Time reversal through a solid-liquid interface and super-resolution. *Inverse Problems*, 18:1639–1657, 2002.

[59] M. Lambert, D. Lesselier, and B.J. Kooij. The retrieval of a buried cylindrical obstacle by a constrained modified gradient method in the H-polarization case for Maxwellian materials. *Inverse Problems*, 14:1265–1283, 1998.

[60] A. Dubois, K. Belkebir, and M. Saillard. Retrivial of inhomogeneous targets from experimental frequency diversity data. *Inverse Problems*, 2005.

Annexe A

Annexe A : quelques propriétés mathématiques

A.1 Transformée de Laplace

Soit f une fonction à valeur dans $\mathcal{R}$ de la variable réelle t. Notons $\tilde{f}$ la transformée de Laplace de f, que nous définissons comme suit :

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \exp(st) \, \mathrm{d}t, \tag{A.1}$$

où nous avons adopté la notation suivante : $s = \beta + i\omega$, avec β positif. La transformée de Laplace inverse s'écrit alors :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \tilde{f}(s) \exp(st) \, \mathrm{d}s. \tag{A.2}$$

La fonction f étant réelle, elle est égale à son complexe conjugué $f^\star$. Ainsi, en effectuant le changement de variable $s = \beta + i\omega$, il vient :

$$f(t) = f(t)^\star = \frac{\exp(\beta t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}^\star(\beta + i\omega) \exp(-i\omega) \, \mathrm{d}\omega, \tag{A.3}$$

ce qui s'écrit aussi, en coupant le domaine d'intégration en deux :

$$f(t) = \frac{\exp(\beta t)}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{0} \tilde{f}^\star(\beta + i\omega) \exp(-i\omega) \, \mathrm{d}\omega + \int_0^{+\infty} \tilde{f}^\star(\beta + i\omega) \exp(-i\omega) \, \mathrm{d}\omega \right\}. \tag{A.4}$$

Après avoir changé ω en $-\omega$ dans la première intégrale, et après avoir regroupé les deux intégrandes sous le même signe somme, nous obtenons :

$$f(t) = \frac{\exp(\beta t)}{2\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} \left[\tilde{f}^\star(\beta + i\omega) \exp(-i\omega) \; + \; \tilde{f}(\beta - i\omega) \exp(+i\omega) \right] \, \mathrm{d}\omega \right\}, \tag{A.5}$$

et par conséquent,

$$f(t) = \frac{\exp(\beta t)}{\pi} \Re e \left\{ \int_0^{+\infty} \tilde{f}^\star(\beta + i\omega) \exp(-i\omega) \, \mathrm{d}\omega \right\}. \tag{A.6}$$

Posons $g(\omega) = \tilde{f}(\beta - i\omega)\exp(+i\omega)$. La méthode des trapèzes nous donne une bonne approximation de l'intégrale que nous devons calculer numériquement. De plus, nous devons faire l'hypothèse suivante, pour pouvoir tronquer le domaine d'intégration et ainsi se limiter à une intégrale entre deux bornes finies :

$$\exists\ \omega_{max},\ \text{tel que } \forall\omega \geq \omega_{max},\ \mid g(\omega) \mid \ll 1. \tag{A.7}$$

Remarquons tout de suite que cette propriété est vérifiée par le champ électrique E. L'intervalle $[0; \omega_{max}]$ est ensuite découpé en N intervalles de largeur $\Delta\omega = \dfrac{\omega_{max}}{N}$. Nous pouvons alors faire l'approximation suivante :

$$\int_0^{+\infty} g(\omega)\ \mathrm{d}\omega \approx \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\Delta\omega}^{(n+1)\Delta\omega} g(\omega)\ \mathrm{d}\omega. \tag{A.8}$$

En utilisant la méthode des trapèzes, nous obtenons :

$$\int_0^{+\infty} g(\omega)\ \mathrm{d}\omega \approx \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ g(n\Delta\omega)\Delta\omega + \frac{1}{2}\left[g\left((n+1)\Delta\omega\right)\Delta\omega - g(n\Delta\omega)\Delta\omega\right] \right\}, \tag{A.9}$$

ce que nous pouvons écrire, après avoir effectué quelques simplifications, sous la forme :

$$\int_0^{+\infty} g(\omega)\ \mathrm{d}\omega \approx \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Delta\omega}{2} \left\{ g(n\Delta\omega) + g((n+1)\Delta\omega) \right\} \tag{A.10}$$

Dans cette suite, un grand nombre de termes se regroupe, et la relation (A.10) s'écrit :

$$\int_0^{+\infty} g(\omega)\ \mathrm{d}\omega \approx \frac{\Delta\omega}{2} g(0) + \sum_{n=1}^{N-1} \Delta\omega g(n\Delta\omega) + \frac{\Delta\omega}{2} g(N\Delta\omega). \tag{A.11}$$

Or, g doit vérifier, par hypothèse, la propriété (A.7), et par conséquent, le dernier terme de (A.11) est négligeable devant un. En effet, $\mid g(N\Delta\omega) \mid = \mid g(\omega_{max}) \ll 1$. En reportant ce résultat dans l'équation (A.6), nous obtenons un calcul approché de la transformée de Laplace inverse, que nous écrivons comme suit :

$$f(t) \approx \frac{\exp(\beta t)}{\pi} \Re e \left\{ \Delta\omega \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}_n^{\star} \exp(-in\Delta\omega t) \right\}, \tag{A.12}$$

où $\tilde{f}_n^{\star}$ est définie de la façon suivante :

$$\tilde{f}_n^{\star} = \begin{cases} \frac{1}{2}\tilde{f}^{\star}(0), & \text{si } n = 0, \\ \tilde{f}^{\star}(\beta + i\omega), & \forall n \in [1; N-1]. \end{cases}$$

Ce calcul se fera par un algorithme de type FFT. Pour cela, il faut que la fonction soit périodique dans le temps. Ainsi, en posant $t = k\Delta t$, nous devons vérifier, pour tous k, la relation suivante :

$$\exp(-i\omega_{max} k\Delta t) = 1. \tag{A.13}$$

Ceci doit être vrai pour tous k, et en particulier pour $k = 1$. Nous obtenons alors une relation liant différents paramètres nécessaires au calcul numérique, à savoir :

$$N\Delta\omega\Delta t = 2\pi, \tag{A.14}$$

ce qui implique:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_{max}}. \tag{A.15}$$

Et par conséquent, la transformée de Laplace inverse se calculera de la manière suivante :

$$f(k\Delta t) = \frac{\exp(\beta t)}{\pi}\Delta\omega\Re e\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{f}_n^{\star}\exp\left(-\frac{2i\pi nk}{N}\right)\right\}. \tag{A.16}$$

A.2 Propriétés des produits de convolution-corrélation

Soit f et g deux fonctions continues de $\mathcal{R}$. Notons $\left(f \overset{y}{*} g\right)$ le produit de convolution de f et g, défini de la manière suivante :

$$\left(f \overset{y}{*} g\right)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y')g(y-y')\mathrm{d}y'. \tag{A.17}$$

Nous savons la transformée de Fourier du produit de convolution de f et g est le produit simple des transformées de Fourier de f et de g :

$$\mathcal{TF}\left(f \overset{y}{*} g\right) = \mathcal{TF}(f)\mathcal{TF}(g). \tag{A.18}$$

Notons $\left(f \overset{y}{\otimes} g\right)$ le produit de corrélation de deux fonctions f et g défini de la manière suivante :

$$C(y) = \left(f \overset{y}{\otimes} g\right)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y')g(y+y')\mathrm{d}y'. \tag{A.19}$$

Soit $\tilde{f}$ la transformée de Fourier de f définie par :

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\exp(-2i\pi\nu y)\ \mathrm{d}y. \tag{A.20}$$

Calculons la transformée de Fourier $\tilde{C}$ de (A.20) :

$$\tilde{C}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(y)\exp(-2i\pi\nu y)\ \mathrm{d}y. \tag{A.21}$$

En tenant compte de (A.19) et en inversant les intégrales, il vient :

$$\tilde{C}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y')g(y+y')\exp(-2i\pi\nu y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}y'. \tag{A.22}$$

Posons $Y = y + y'$. L'équation (A.22) s'écrit alors :

$$\tilde{C}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y')g(Y)\exp(-2i\pi\nu(Y-y')\ \mathrm{d}Y\ \mathrm{d}y'. \tag{A.23}$$

Nous obtenons alors que :

$$\tilde{C}(\nu) = \tilde{f}(-\nu)\tilde{g}(\nu). \tag{A.24}$$

Il est facile de vérifier que :

$$\tilde{f}(-\nu) = (\mathcal{TF}(f^\star))^\star, \tag{A.25}$$

où $f^\star$ désigne le complexe conjugué de f. Ainsi :

$$\mathcal{TF}\left(f \overset{y}{\otimes} g\right) = (\mathcal{TF}(f^\star))^\star\mathcal{TF}(g). \tag{A.26}$$

Annexe B

Annexe B : résolution numérique

Nous devons résoudre numériquement l'équation (1.8). Aprés avoir remarqué que la fonction de Hankel présentait une singularité logarithmique en zéro, l'intégrale de (1.8) a été coupée en deux (1.11) afin de séparer la singularité pour la calculer à part. Nous noterons I_1 le terme régulier et I_2 le terme singulier.

B.1 Traitement de la partie régulière de la fonction de Green

Soit χ^p une approximation de la fonction contraste χ définie par (1.7) et qui jouit de la propriété de continuité spatiale dans Ω. La composante tangentielle du champ électrique étant continue à la traversée d'une interface [39], nous en déduisons que, en polarisation $\mathcal{E}_{//}$, E et sa dérivée normale sont des fonctions continues des variables d'espace. Après avoir remplacé χ par χ^p, l'intégrande de I_1, qui contient la partie régulière, peut être remplacée par une interpolation bilinéaire de la forme :

$$\begin{aligned}&\left\{H_0^{(2)}(k_0R) + A\ln(k_0R)\right\}\chi^{\mathrm{p}}(\mathbf{r}')E(\mathbf{r}') = \\ &\quad \sum_{l'=0}^{N_x}\sum_{m'=0}^{N_y}\tilde{H}\left(\mid l-l'\mid,\mid m-m'\mid\right)\chi^{\mathrm{p}}\left(\mathbf{r}_{l',m'}\right)E(\mathbf{r}_{l',m'})\phi_{l'}(x')\phi_{m'}(y') + \mathcal{O}(d^2).\end{aligned} \tag{B.1}$$

Nous avons introduit la fonction $\tilde{H}$, qui contient la partie régulière de la fonction de Green (1.5) et qui est définie comme suit :

$$\tilde{H}\left(\mid l-l'\mid,\mid m-m'\mid\right) = H_0^{(2)}\left(k_0\mid \mathbf{r}_{l,m}-\mathbf{r}_{l',m'}\mid\right) + A\ln(k_0\mid \mathbf{r}_{l,m}-\mathbf{r}_{l',m'}\mid). \tag{B.2}$$

Les fonctions $\phi_{l'}$ et $\phi_{m'}$ sont des fonctions triangles définies de la façon suivante :

$$\phi_j(\zeta) = \begin{cases} 1-\frac{|\zeta - jd|}{d}, & \text{si } (j-1)d < \zeta < (j+1)d, \\ 0, & \text{sinon.}\end{cases} \tag{B.3}$$

Le support de la fonction produit $\phi_l\phi_m$ des deux fonctions ϕ_l et ϕ_m est le domaine carré $\mathcal{D}_{l,m}$ qui correspond à une maille carrée de notre espace discrétisé et qui est défini par :

$$\mathcal{D}_{l,m} = \{\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y, \ \mid x - ld \mid < d, \ \mid y - md \mid < d\}\,. \tag{B.4}$$

Soit le vecteur $\mathbf{r}_{l,m}$, qui correspond à un des quatre sommets de la maille $\mathcal{D}_{l,m}$, et qui sera représenté uniquement par le couple $\{l,\, m\}$. Nous confondrons les fonctions $\chi^{\mathrm{p}}\,(\mathbf{r}_{l,m})$ et $\chi^{\mathrm{p}}(l,m)$.

Le domaine d'intégration de I_1, qui se limite d'après (1.11) à $\mathcal{D}$, peut être étendu à Ω. En effet, en dehors de $\mathcal{D}$, le prolongement χ^p de la fonction contraste est nul, comme nous l'avons déjà fait remarquer. Ainsi, en utilisant l'interpolation bilinéaire (B.1), I_1 peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathcal{D}} \left\{H_0^{(2)}(k_0R) + A\ln(k_0R)\right\}\chi(\mathbf{r}')E(\mathbf{r}')\ \mathrm{d}\mathbf{r}' = \\ h^2\sum_{l'=0}^{N_x}\sum_{m'=0}^{N_y}\tilde{H}(\mid l - l' \mid\,,\mid m - m' \mid)W_{l',m'}\chi^p(l',m')E(\mathbf{r}_{l',m'}) + \mathcal{O}(d^2).\end{aligned} \tag{B.5}$$

L'ensemble des coefficients $\{W_{l',m'}\}$ introduits dans l'équation précédente provient de l'intégration sur Ω du produit des fonctions ϕ_l' et ϕ_m', c'est-à-dire :

$$W_{l',m'} = \frac{1}{d^2}\int\int_{\Omega}\phi_{l'}(x')\phi_{m'}(y')\ \mathrm{d}x'\mathrm{d}y', \tag{B.6}$$

où d correspond à la dimension d'une maille. Les coefficients $W_{l',m'}$ ne dépendent que de la forme du diffuseur. Ils sont donc calculés indépendamment des autres paramètres , et notamment de la fréquence. Ils présentent alors deux propriétés intéressantes :

- premièrement, ils se calculent de la même façon. En effet, par définition, ces coefficients proviennent de l'intégration du produit des fonctions ϕ sur le domaine Ω. Or, nous avons déjà précisé que le support $\mathcal{D}_{l,m}$ de la fonction $\phi_l\phi_m$ correspondait à une maille. Il nous faut donc calculer des expressions de la forme :

$$w_p = \int\int_S (1- \mid x \mid)(1- \mid y \mid)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{B.7}$$

  où p correspond à un des sommets de la maille, donc à un point d'observation. Puisque la frontière $\partial\mathcal{D}$ de l'objet est remplacée par des segments de droite, le domaine S sur lequel il faut intégrer se limite aux géométries simples reportées sur Fig. 1.3. Le calcul de ces coefficients se fait de manière analytique, comme décrit dans une annexe de [4].
- deuxièmement, nous avons l'inégalité suivante :

$$0 \leq W_{l,m} \leq 1, \tag{B.8}$$

  où les deux cas extrêmes $W_{l,m} = 0$ et $W_{l,m} = 1$ correspondent respectivement à la situation où la maille $\mathcal{D}_{l,m}$ est entièrement à l'extérieur ou à l'intérieur de $\mathcal{D}$.

B.2 Traitement de la partie singulière de la fonction de Green

En ce qui concerne I_2, nous allons procéder de la même manière que pour I_1, et nous efforcer de conserver la structure convolutive de (1.11). Pour cela, il faut que la forme de l'intersection entre la maille $\mathcal{D}_{l,m}$ et $\mathcal{D}$ soit indépendante du couple l,m. Cette condition est violée quand le contour $\partial\mathcal{D}$ traverse une maille. Pour résoudre ce problème, nous utilisons l'interpolation bilinéaire (B.9) définie dans [4] :

$$\chi(\mathbf{r}')E(\mathbf{r}') \approx \sum_{l'=0}^{N_x}\sum_{m'=0}^{N_y} W_{l',m'}\chi^{\mathrm{p}}(l',m')E(\mathbf{r}_{l',m'})\phi_{l'}(x')\phi_{m'}(y'). \tag{B.9}$$

L'intégration est effectuée sur $\mathbb{R}^2$. Les coefficients $W_{l,m}$ sont définis de la même façon que dans (B.6). L'erreur commise par l'utilisation de (B.9) pour le calcul total de l'intégrale est, toujours d'après [4], de l'ordre de $\mathcal{O}[d^2\ln(d)]$.
L'intégrale I_2 peut être approchée par :

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathcal{D}} A\ln(k_0 \mid \mathbf{r}_{l',m'} - \mathbf{r}\,' \mid)\chi(\mathbf{r}')E(\mathbf{r}')\ \mathrm{d}\mathbf{r}' = \\ h^2\sum_{l'=0}^{N_x}\sum_{m'=0}^{N_y}\tilde{L}\left(\mid l-l'\mid, \mid m-m'\mid\right)W_{l',m'}\chi^{p}(l',m')E(\mathbf{r}_{l',m'}) + \mathcal{O}[d^2\ln(d)].\end{aligned} \tag{B.10}$$

Pour obtenir cette équation (B.10), il faut utiliser la propriété de symétrie :

$$\begin{aligned}\int_{(l'-1)h}^{(l'+1)h}\int_{(m'-1)h}^{(m'+1)h}\ln(k_0 \mid \mathbf{r}_{l,m} - \mathbf{r}_{l',m'}\mid)\phi_{l'}(x')\phi_{m'}(y')dx'dy' = \\ \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\ln(k_0 \mid \mathbf{r}_{|l-l'|,|m-m'|} - \mathbf{r}\text{''}\mid)\phi_0(x\text{''})\phi_0(y\text{''})dx\text{''}dy\text{''},\end{aligned} \tag{B.11}$$

et la notation :

$$\tilde{L}(l,m) = \frac{1}{d^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} A\ln\left(\frac{\mid \mathbf{r}_{l,m} - \mathbf{r}'\mid}{a}\right)\phi_0(x')\phi_0(y')\ \mathrm{d}\mathbf{r}'. \tag{B.12}$$

Finalement, en utilisant (B.5) et (B.10) et en négligeant les différentes erreurs dûes à ce traitement numérique, l'équation intégrale (1.8) peut s'écrire aux points du maillage $\mathbf{r}_{l,m}$ comme un système d'équations :

$$\begin{aligned}E_{l,m} = E_{l,m}^{\mathrm{inc}} - \\ \frac{i}{4}k_0^2 d^2\sum_{l'=0}^{N_x}\sum_{m'=0}^{N_y}\left[\tilde{H}\left(\mid l-l'\mid, \mid m-m'\mid\right) - \tilde{L}\left(\mid l-l'\mid, \mid m-m'\mid\right)\right]. \\ W_{l',m'}\chi^{\mathrm{p}}(l',m')E_{l',m'}.\end{aligned} \tag{B.13}$$

Annexe C

Annexe C : mise en forme des opérateurs

Nous devons résoudre une équation matricielle de la forme :

$$\mathbf{A}\ x = b, \tag{C.1}$$

où $\mathbf{A}$ est un opérateur présentant une structure de type «convolution». La matrice $\mathbf{A}$ est alors de rang $R = (N_x + 1)(N_y + 1)$. En résolvant cette équation de manière itérative avec un gradient conjugué, nous allons être amenés à effectuer à chaque itérée n une multiplication entre $\mathbf{A}$ et l'estimation x_n de x. Afin de bien visualiser la structure de l'équation (C.1), écrivons la matrice $\mathbf{A}$ sous la forme suivante :

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{B}.\mathbf{D}, \tag{C.2}$$

où $\mathbf{I}$ représente la matrice identité, $\mathbf{B}$ a une structure «convolution bidimensionnelle», et $\mathbf{D}$ est une matrice.

Nous devons calculer les transformées de Fourier de $\mathbf{B}$ et de $\mathbf{D}$. Nous utiliserons des algorithmes de types T.F.R. qui nécessitent l'emploi de fonctions à support positif. Il nous faudra donc périodiser ces opérateurs. Pour ce faire, nous étendons la dimension de $\mathbf{D}(l,m)x(l,m)$ à une dimension $(M_x \times M_y)$, telle que $M_x \geq 2N_x$ et $M_y \geq 2N_y$, en complétant par des zéros (zéro padding). $\{\mathbf{B}(l,m)\}$ de dimension $(N_x \times N_y)$ est aussi étendue en $\{\mathbf{B}_1(l,m)\}$, de dimension $(M_x \times M_y)$, qui vérifie :

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{B}_1(l,m) \\ \mathbf{B}_1(M_x - l,m) \\ \mathbf{B}_1(l,M_y - m) \\ \mathbf{B}_1(l - M_x,M_y - m) \end{array}\right\} = \mathbf{B}(l,m),$$

pour tout $l = 0 \cdots N_x$, et $m = 0 \cdots N_y$, $\mathbf{B}_1(l,m,s) = 0$ sinon. Les calculs seront faits en utilisant ces opérateurs ainsi étendus, et nous ne récupérerons que les composantes de ces vecteurs qui correspondent au calcul que nous voulons faire, à savoir les termes tels que $l = 0 \cdots N_x$, et $m = 0 \cdots N_y$.

Le gradient conjugué nécessite aussi de connaître l'opérateur $\mathbf{A}^\dagger$, adjoint de $\mathbf{A}$, et nous déduisons de (C.2) que :

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{I} + \mathbf{D}^\dagger.\mathbf{B}^\dagger \tag{C.3}$$

Les multiplications par $\mathbf{A}^\dagger$ se feront aussi en utilisant des algorithmes T.F.R., et les dimensions des opérateurs adjoints se feront de la même façon.

Annexe D

Annexe D : gradient conjugué

Soit l'équation matricielle suivante, d'inconnue x :

$$\mathbf{A}x = b. \tag{D.1}$$

Soit un produit scalaire, défini par:

$$< u \mid v > \stackrel{déf}{=} \begin{cases} \int u^\star v, & \text{si } u \text{ et } v \text{ sont deux fonctions continues,} \\ \sum u^\star v, & \text{si } u \text{ et } v \text{ sont deux suites de fonctions discrètes.} \end{cases}$$

L'étoile désigne le complexe conjugué. La solution de (D.1) est donnée par :

$$x = \mathbf{A}^{-1}b, \tag{D.2}$$

où $\mathbf{A}^{-1}$ représente l'inverse de la matrice $\mathbf{A}$. Le calcul de $\mathbf{A}^{-1}$ est long et délicat dés que la taille de la matrice devient grande. Nous allons donc chercher une solution approchée de (D.1), que nous noterons X. Pour ce faire, nous minimiserons au sens des moindres carrés la fonction $\mathcal{F}$, définie par :

$$\mathcal{F}(X) = < b - \mathbf{A}X \mid b - \mathbf{A}X > = \| \mathbf{A}X - b \|_{L^2}^2 . \tag{D.3}$$

Pour trouver le minimum de la fonction $\mathcal{F}$, définie par (D.3), nous utilisons une procédure itérative de type gradient conjugué (C.G.F.F.T.). Il faut déterminer une suite $(X_n)_n$ qui converge vers x, solution exacte de (D.1). Soit R_n le résiduel à l'itérée n, défini de la manière suivante :

$$R_n \stackrel{déf}{=} b - \mathbf{A}X_n. \tag{D.4}$$

On pose :

$$X_n = X_{n-1} + \alpha_n D_n. \tag{D.5}$$

Le scalaire α_n est déterminé en minimisant la fonction $\mathcal{F}$, et D_n est appelée direction de descente. Son expression sera établie par la suite. En tenant compte de (D.5), et en le reportant dans (D.3), il vient :

$$\mathcal{F}(\alpha_n) =< b - \mathbf{A}(X_{n-1} + \alpha_n D_n) \ \mid \ b - \mathbf{A}(X_{n-1} + \alpha_n D_n) > . \tag{D.6}$$

En utilisant la linéarité du produit scalaire, nous obtenons :

$$\mathcal{F}(\alpha_n) =< b \ \mid R_n > - < \mathbf{A}X_{n-1} \ \mid R_n > -\alpha_n^\star < \mathbf{A}D_n \ \mid R_n > , \tag{D.7}$$

où l'on a remplacé $b - \mathbf{A}(X_{n-1} + \alpha_n D_n)$ par R_n. Nous cherchons la valeur de α_n qui minimise $\mathcal{F}$. Cette valeur annulera la dérivée de $\mathcal{F}$. Ainsi, calculons la dérivée de $\mathcal{F}$ par rapport à $\alpha_n^\star$.

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_n^\star} = - < \mathbf{A}D_n \ \mid R_n > . \tag{D.8}$$

Développons R_n :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_n^\star} = - < \mathbf{A}D_n \ \mid b - \mathbf{A}(X_{n-1} + \alpha_n D_n) > , \tag{D.9}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_n^\star} = - < \mathbf{A}D_n \ \mid R_{n-1} - \alpha_n \mathbf{A}D_n > . \tag{D.10}$$

Par linéarité, il vient :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_n^\star} = - < \mathbf{A}D_n \ \mid R_{n-1} > +\alpha_n < \mathbf{A}D_n \ \mid \mathbf{A}D_n > . \tag{D.11}$$

Nous voulons minimiser F, et par conséquent, nous cherchons α_n, tel que :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_n^\star} = 0. \tag{D.12}$$

Nous déduisons alors immédiatement α_n de (D.11) :

$$\alpha_n = \frac{< \mathbf{A}D_n \ \mid R_{n-1} >}{\| \mathbf{A}D_n \|^2}. \tag{D.13}$$

Il reste à définir la direction de descente. Pour cela, explicitons la dérivée de $\mathcal{F}$ par rapport à X, dans la direction u.

$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}(X)}{\partial X}\right]_u = \lim_{t \to 0} \frac{\mathcal{F}(X + tu) - F(X)}{t}. \tag{D.14}$$

Calculons $\mathcal{F}(X + tu)$:

$$\mathcal{F}(X + tu) =< b - \mathbf{A}X - t\mathbf{A}u \mid b - \mathbf{A}X - t\mathbf{A}u > . \tag{D.15}$$

Par linéarité, il vient :

$$\mathcal{F}(X + tu) =< R \mid R > -t^\star < \mathbf{A}u \mid R > -t < R \mid \mathbf{A}u > +t^2 < \mathbf{A}u \mid \mathbf{A}u > , \tag{D.16}$$

où $R = b - \mathbf{A}X$ est le résiduel. Nous obtenons alors facilement :

$$\mathcal{F}(X + tu) = \mathcal{F}(X) - 2t\Re e\,(< R \mid \mathbf{A}u >) + \mathcal{O}(t^2). \tag{D.17}$$

Ainsi, il vient :
$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}(X)}{\partial X}\right]_u = -2\Re e\left(< R \mid \mathbf{A}u >\right), \tag{D.18}$$
ce qui s'écrit, en utilisant $\mathbf{A}^\dagger$, opérateur adjoint de $\mathbf{A}$:
$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}(X)}{\partial X}\right]_u = -2\Re e\Big(< \mathbf{A}^\dagger R \mid u >\Big). \tag{D.19}$$

Si l'on utilise comme direction de descente la relation $\forall n, D_n = \mathbf{A}^\dagger R_{n-1}$, la méthode sera dite du gradient simple. Pour que la convergence soit plus rapide, la direction de descente à l'ordre n dépendra de celle à l'ordre $n-1$. Ainsi, une méthode du gradient conjugué prendra la direction de descente $\tilde{D}_n$ donnée par :
$$\tilde{D}_n = D_n + \gamma_n D_{n-1}, \tag{D.20}$$
où γ_n est un scalaire, tel que : $\gamma_n = \dfrac{< \mathbf{A}^\dagger R_n \mid \mathbf{A}^\dagger R_n >}{< \mathbf{A}^\dagger R_{n-1} \mid \mathbf{A}^\dagger R_{n-1} >}$.

Annexe E

Annexe E : estimation initiale obtenue par extrapolation

Cette annexe a pour but de déterminer l'estimation intiale utilisée dans la résolution itérative du problème direct de diffraction. Nous devons résoudre :

$$\mathbf{A}(s_n)x(s_n) = b(s_n), \tag{E.1}$$

pour un ensemble de fréquences (ou pour un ensemble d'incidences). Cette équation est résolue de manière itérative en utilisant un algorithme de gradien conjugué. Il nous faut donc une estimation initiale. Nous avons choisi comme point de départ à la fréquence s_n non pas le champ incident à cette fréquence, mais une extrapolation des résultats finaux obtenus aux k fréquences inférieures. Ainsi, $x^0(s_n)$ sera une $k-$combinaison linéaire des $x(s_{n-k})$. Elle s'écrira alors sous la forme :

$$x^0(s_n) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k x(s_{n-k}). \tag{E.2}$$

Ceci s'appuie sur le fait que si les fréquences s_{n-1} et s_n ne sont pas trop espacées les unes des autres, alors les solutions $x(s_{n-1})$ et $x(s_n)$ ne seront pas très différentes. Il reste alors à déterminer les coefficients α_k. Ils seront pris de telle sorte qu'ils minimisent la fonction $\mathcal{F}$ définie comme suit.

$$\mathcal{F}(x^0(s_n)) =< \mathbf{A}x^0(s_n) - b \ \mid \ \mathbf{A}x^0(s_n) - b > . \tag{E.3}$$

En reportant le choix de l'estimation initiale (E.2) dans la définition de F, il vient :

$$\mathcal{F}(x^0(s_n)) =< \mathbf{A}\sum_{k=1}^{K} \alpha_k x(s_{n-k}) - b \ \mid \ \mathbf{A}\sum_{k'=1}^{K} \alpha_{k'} x(s_{n-k'}) - b > . \tag{E.4}$$

En utilisant la linéarité du produit scalaire, l'équation (E.4) devient :

$$\mathcal{F}(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{k'=1}^{K} < \mathbf{A}\alpha_k x(s_{n-k}) - b \ \mid \ \mathbf{A}\alpha_{k'} x(s_{n-k'}) - b > . \tag{E.5}$$

où l'on a remplacé par abus de langage $F(x^0(s_n))$ par $F(\alpha_k))$. Développons cette expression.

$$F(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{k'=1}^{K} \{\alpha_k^\star \alpha_{k'} < \mathbf{A}x(s_{n-k}) \mid \mathbf{A}x(s_{n-k'}) > \\ -\alpha_k^\star < \mathbf{A}x(s_{n-k}) \mid b > -\alpha_{k'} < b \mid \mathbf{A}x(s_{n-k'}) > + < b \mid b >\} . \tag{E.6}$$

Nous cherchons à déterminer les α_k qui minimisent F. Il nous faut donc résoudre l'équation

$$\frac{\partial F(\alpha_k)}{\partial \alpha_k^\star} = 0, \tag{E.7}$$

pour chacun des α_k. En reportant (E.6) dans (E.7), il vient :

$$\sum_{k'=1}^{K} \alpha_{k'} < \mathbf{A}x(s_{n-k}) \mid \mathbf{A}x(s_{n-k'}) > - < \mathbf{A}x(s_{n-k}) \mid b >= 0. \tag{E.8}$$

Ainsi, les coefficients α_k cherchés sont solutions du système (E.8).

Annexe F

Annexe F : rétro-propagation

La rétro-propagation permet d'obtenir facilement une estimation du contraste et du champ électrique dans le domaine de recherche Ω, à partir des champs diffractés mesurés. Elle se décompose en trois étapes. Nous décrirons ici la rétro-propagation dans le cas le plus large où un diffuseur est éclairé successivement par L sources rayonnant un champ transitoire. Bien évidemment, nous transposons nos données dans le domaine fréquentiel, et nous écrirons les équations en considérant L sources, et P fréquences. Il sera alors facile de traiter les deux autres possibilités décrites dans le troisième chapitre de ce manuscrit : si l'on considère une seule source rayonnant un champ transitoire, il suffira de prendre $L = 1$, et si l'on considère plusieurs sources rayonnant un champ harmonique, il suffira de prendre $P = 1$.

La première étape de la rétro-propagation consiste à déterminer la fonction contraste-source définie de la manière suivante :

$$\Phi_{l,p} = \chi_{p,0} E_{l,p,0}. \tag{F.1}$$

En toute rigueur, $\Phi_{l,p}$ peut se déterminer d'après (3.4), en calculant $\mathbf{K}^{-1}$, inverse de l'opérateur $\mathbf{K}$. Dans la méthode de rétro-propagation, nous calculons une approximation de $\Phi_{l,p}$ de la manière suivante :

$$\Phi_{l_p} = \chi_p E_{l,p} \stackrel{déf}{=} \mathbf{K}_p^{-1} E_{l,p}^{\mathrm{d;mes}} \approx \alpha_p \mathbf{K}_p^{\dagger} E_{l,p}^{\mathrm{d;mes}}, \tag{F.2}$$

où α_p est un coefficient complexe. Il est calculé en minimisant la fonctionnelle $\mathcal{F}_p$ définie par :

$$\mathcal{F}_p = \sum_{l=1}^{L} || \, E_{l,p} - \mathbf{K}_p \Phi_{l,p} \, ||_{\Gamma}^2 \, . \tag{F.3}$$

En tenant compte de (F.2), il vient :

$$\mathcal{F}_p = \sum_{l=1}^{L} || \, E_{l,p} - \alpha_p \mathbf{K}_p \mathbf{K}_p^{\dagger} E_{l,p} \, ||_{\Gamma}^2 \, . \tag{F.4}$$

En développant ce calcul, l'obtention de la valeur de α_p qui minimise $\mathcal{F}_p$ ne pose pas de difficulté particulière, et nous nous contentons de donner ici le résultat :

$$\alpha_p = \frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{L} < \mathbf{K}_p \;\mid\; \mathbf{K}_p\mathbf{K}_p^{\dagger}E_{l,p}^{\mathrm{d;mes}} >_{\Gamma}}{\displaystyle\sum_{l=1}^{L} \mid\mid \mathbf{K}_p\mathbf{K}_p^{\dagger}E_{l,p}^{\mathrm{d;mes}} \mid\mid_{\Gamma}^{2}}. \tag{F.5}$$

La deuxième étape de cette méthode est consacrée au calcul du champ dans le domaine test Ω. Pour cela, il suffit de reporter la contraste-source que nous venons de calculer dans l'équation (3.3). Il vient alors :

$$E_{l,p,0} = E_{l,p}^{\mathrm{inc}} + \mathbf{G}_p\Phi_{l,p}. \tag{F.6}$$

Enfin, la dernière étape de cette méthode nous permet de déterminer une estimation du contraste, ou plus précisément ξ_0 et η_0. L'identification des parties réelle et imaginaire de (F.1) permet d'obtenir, en utilisant (3.13), les relations suivantes :

$$\Re e(\Phi_{l,p}E_{l,p,0}^{\star}) = (1 + \xi_0^2 - \varepsilon_{rb}) \mid E_{l,p,0} \mid^2 , \tag{F.7}$$

$$\Im m(\Phi_{l,p}E_{l,p,0}^{\star}) = \left(\frac{\eta_0^2}{\omega_p\varepsilon_0}\right) \mid E_{l,p,0} \mid^2 . \tag{F.8}$$

Ensuite, nous construisons deux fonctions coût $\mathcal{F}_\xi$ et $\mathcal{F}_\eta$ de la manière suivante :

$$\mathcal{F}_\xi = \sum_{p=1}^{P}\sum_{l=1}^{L}\left[\Re e(\Phi_{l,p}E_{l,p,0}^{\star}) - (1 + \xi_0^2 - \varepsilon_{rb}) \mid E_{l,p,0} \mid^2\right]^2, \tag{F.9}$$

$$\mathcal{F}_\eta = \sum_{p=1}^{P}\sum_{l=1}^{L}\left[\Im m(\Phi_{l,p}E_{l,p,0}^{\star}) - \left(\frac{\eta_0^2}{\omega_p\varepsilon_0}\right) \mid E_{l,p,0} \mid^2\right]^2. \tag{F.10}$$

Les coefficients réels ξ_0 et η_0 qui minimisent $\mathcal{F}_\xi$ et $\mathcal{F}_\eta$ sont obtenus sans difficulté et sont donnés par :

$$\xi_0^4 = \frac{\displaystyle\sum_{p=1}^{P}\sum_{l=1}^{L}\frac{\Re e^2\left(\Phi_{l,p}E_{l,p,0}^{\star} + \varepsilon_{rb} \mid E_{l,p,0} \mid^2 - \mid E_{l,p,0} \mid^2\right)}{\mid E_{l,p}^{\mathrm{d;mes}} \mid^2}}{\displaystyle\sum_{p=1}^{P}\sum_{l=1}^{L} \mid E_{l,p,0} \mid^2} \tag{F.11}$$

$$\eta_0^4 = \frac{\displaystyle\sum_{p=1}^{P}\omega_p\varepsilon_0\sum_{l=1}^{L}\frac{\Im m^2\left(\Phi_{l,p}E_{l,p,0}^{\star} + \varepsilon_{rb} \mid E_{l,p,0} \mid^2\right)}{\mid E_{l,p}^{\mathrm{d;mes}} \mid^2}}{\displaystyle\sum_{p=1}^{P}\sum_{l=1}^{L} \mid E_{l,p,0} \mid^2} \tag{F.12}$$

Annexe G

Annexe G : caractère mal posé des problèmes inverses

G.1 Problème à une dimension

Considérons le problème harmonique à une dimension décrit par la Fig. G.1.

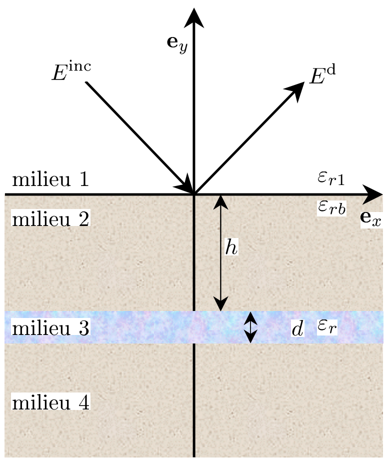


FIG. G.1 – *Géométrie du problème* $1-D$.

Une couche d'épaisseur d et de permittivité ε_r est enfouie dans un milieu de permittivité ε_{rb} à la profondeur h. Le milieu supérieur de permittivité ε_1 est séparé du milieu inférieur par une interface plane. Nous distinguons alors 4 milieux différents. Le milieu supérieur noté 1, le milieu entre la couche et l'interface noté 2, la couche notée 3, et le milieu en-dessous de la couche noté 4. En illuminant cette structure par un champ incident E^{inc}, nous pouvons mesurer un champ diffracté

E^{d} dans le milieu supérieur. Nous allons calculer le coefficient de réflexion de ce multi-couches en polarisation $E_{//}$, en incidence normale, et avec une dépendance temporelle en $\exp(-i\omega t)$. Dans chacun des milieux j, $j = 1 \ldots 4$, le champ électrique s'écrit :

$$E_j(y) = A_j \exp(-ik_j y) + B_j \exp(ik_j y), \tag{G.1}$$

où k_j^2, est le nombre d'onde du milieu j, et A_j et B_j sont des constantes d'intégration, que nous déterminons par les conditions de passage. La continuité de E et de sa dérivée [39] en chacun des plans y_j séparant deux milieux nous permet d'obtenir facilement le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} A_j \exp(-i\gamma_j y_j) + B_j \exp(i\gamma_j y_j) = A_{j+1} \exp(-i\gamma_{j+1} y_j) + B_{j+1} \exp(i\gamma_{j+1} y_j) \\ -i\gamma_j A_j \exp(-i\gamma_j y_j) + i\gamma_j B_j \exp(i\gamma_j y_j) = -i\gamma_{j+1} A_{j+1} \exp(-i\gamma_{j+1} y_j) + i\gamma_{j+1} B_{j+1} \exp(i\gamma_{j+1} y_j) \end{cases} \tag{G.2}$$

Les ordonnées y_j sont les ordonnées des différents plans qui séparent les milieux. Ce système peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} 2i\gamma_j B_j \exp(i\gamma_j y_j) = i(\gamma_j - \gamma_{j+1}) A_{j+1} \exp(-i\gamma_{j+1}) + i(\gamma_j + \gamma_{j+1}) B_{j+1} \exp(i\gamma_{j+1}) \\ 2i\gamma_j A_j \exp(-i\gamma_j y_j) = i(\gamma_j + \gamma_{j+1}) A_{j+1} \exp(-i\gamma_{j+1}) + i(\gamma_j - \gamma_{j+1}) B_{j+1} \exp(i\gamma_{j+1}) \end{cases} \tag{G.3}$$

Pour simplifier les écritures, nous allons utiliser des notations matricielles. Ainsi, nous posons :

$$u_j(y) = \begin{bmatrix} A_j \exp(-i\gamma_j y) \\ B_j \exp(i\gamma_j y) \end{bmatrix}, \tag{G.4}$$

$$C_j = \begin{bmatrix} \exp(-i\gamma_j e_j) & 0 \\ 0 & \exp(\gamma_j e_j) \end{bmatrix}, \tag{G.5}$$

où e_j est l'épaisseur de la couche j, et enfin :

$$T_j = \begin{bmatrix} s_j & d_j \\ d_j & s_j \end{bmatrix}. \tag{G.6}$$

Les coefficients s_j et d_j sont définis de la manière suivante :

$$s_j = \frac{\gamma_j + \gamma_{j+1}}{2\gamma_j}, \text{ et } d_j = \frac{\gamma_j - \gamma_{j+1}}{2\gamma_j}. \tag{G.7}$$

La matrice T_j nous permet de relier les champs u_j et u_{j+1} à la traversée d'une interface. Quant à la matrice C_j, elle permet de relier le champ u_j aux deux extrémités de la couche. Il s'agit du terme propagatif à l'intérieur de la couche. De ces considérations nous déduisons que le champ dans les milieux supérieur et inférieur sont reliés par la relation matricielle suivante :

$$u_0(0) = M u_3(d+h), \text{ avec } M = T_0 C_1 T_1 C_2 T_3. \tag{G.8}$$

Par définition [39]:

$$r = \frac{M_{21}}{M_{11}}, \tag{G.9}$$

où M_{21} et M_{11} sont deux des quatre éléments de la matrice M. Une fois les calculs des produits de matrices effectués, il vient :

$$\frac{r}{r_0} = \frac{\frac{t_1 t_b}{2} - i\tan(\gamma_1 d)\left\{\frac{\gamma_1^2+\gamma_2^2}{(\gamma_1+\gamma_2)^2} + \frac{r_1}{r_0}\exp(2i\gamma_2 h)\right\}}{\frac{t_1 t_b}{2} - i\tan(\gamma_1 d)\left\{\frac{\gamma_1^2+\gamma_2^2}{(\gamma_1+\gamma_2)^2} + r_1 r_0 \exp(2i\gamma_2 h)\right\}}. \tag{G.10}$$

Les coefficients r_0, r_1, t_1, et t_b sont les coefficients de réflexion et de transmission de Fresnel des différents dioptres plans. Ils s'écrivent :

$$r_0 = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \text{ et } r_1 = \frac{\gamma_2 - \gamma_3}{\gamma_2 + \gamma_3}. \tag{G.11}$$

$$t_1 = \frac{2\gamma_3}{\gamma_3 + \gamma_2}, \text{ et } t_b = \frac{2\gamma_2}{\gamma_2 + \gamma_3}. \tag{G.12}$$

Nous pouvons alors remarquer que h n'apparaît que dans le terme en $\exp(2i\gamma_2 h)$ de (G.10). De plus, si nous changeons $\chi = \varepsilon_r b - \varepsilon_r$ en $\tilde{\chi} = -\chi$, et en prenant $\tilde{h} = \frac{(2p+1)\pi}{2\gamma_d}$, où p est un entier relatif, nous obtenons le même coefficient de réflexion. Ainsi, le champ diffracté dans le milieu supérieur sera le même pour deux structures différentes.

G.2 Problème à deux dimensions

Proposons une autre façon de voir le caractère mal posé, et replaçons-nous dans la configuration à deux dimensions de la Fig. 1.4. Nous avons défini par l'équation (1.33) de la première partie de ce manuscrit le coefficient de transmission t d'une onde qui passerait du milieu inférieur au milieu supérieur. Nous pouvons, à partir de cette relation, définir le coefficient de transmission $\tilde{t}$ d'une onde qui passerait du milieu supérieur au milieu inférieur. Ainsi, d'après (1.31), le champ incident à l'intérieur du domaine de recherche Ω s'écrit :

$$E^{\mathrm{inc}}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}(\alpha) a(\alpha) \exp(i\alpha x - i\beta_2 y) \mathrm{d}\alpha. \tag{G.13}$$

Le coefficient β_2 est donné par (1.23), avec $\alpha = 2\pi\nu$, et nous définissons de manière analogue le coefficient β_1. Dans le cadre de l'approximation de Born, le champ total dans le domaine test est approché par le champ incident et l'équation d'observation (3.2) peut s'écrire :

$$E^{\mathrm{d}}(x,y) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\chi(\mathbf{r}')E^{\mathrm{inc}}(\mathbf{r}')\mathrm{d}\mathbf{r}'. \tag{G.14}$$

En reportant (1.31) et (G.13) dans (G.14), en changeant l'ordre des signes somme et en plaçant l'origine du repère sur l'interface, il vient :

$$E^{\mathrm{d}}(x,y) \approx \frac{-ik_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\beta_2'} \exp(-i(\beta_2' y' - \beta_1' y))$$
$$\exp(-i\alpha'(x'-x))\chi(x',y'))\tilde{t}a(\alpha)\exp(i\alpha x' - i\beta_2 y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}\alpha'\mathrm{d}\alpha. \tag{G.15}$$

En regroupant les termes en x' et y', la relation (G.15) se met sous la forme :

$$E^{\mathrm{d}}(x,y) \approx \frac{-ik_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\tilde{t}a(\alpha)}{\beta_2'} \exp(i\alpha x + i\beta_1' y)$$
$$\chi(x',y')) \exp(-ix'(\alpha' - \alpha) - iy'(\beta_2 + \beta_2')) \mathrm{d}x' \mathrm{d}y' \mathrm{d}\alpha' \mathrm{d}\alpha. \qquad \text{(G.16)}$$

En considérant une transformée de Fourier à deux dimensions, définie de la même manière que (1.20), avec $\alpha = 2\pi\nu$, il vient :

$$E^{\mathrm{d}}(x,y) \approx -i\pi k_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\tilde{t}a(\alpha)}{\beta_2'} \exp(i\alpha x + i\beta_1' y) \hat{\chi}(\alpha' - \alpha, \beta_2 + \beta_2') \mathrm{d}\alpha' \mathrm{d}\alpha. \qquad \text{(G.17)}$$

Lorsque les récepteurs et les sources ne sont pas proches de l'interface, la contribution des ondes évanescentes est très faible, et elles ne sont pas prises en compte dans le processus d'inversions. De plus, si $k_2 >> k_1$, alors, lorsque $\mid \alpha' \mid < k_1$, β_2 et β_2' peuvent être approchés par k_2. Ainsi, la relation (G.17) devient :

$$E^{\mathrm{d}}(x,y) \approx -i\pi k_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\tilde{t}a(\alpha)}{\beta_2'} \exp(i\alpha x + i\beta_1' y) \hat{\chi}(\alpha' - \alpha, 2k_2) \mathrm{d}\alpha' \mathrm{d}\alpha. \qquad \text{(G.18)}$$

Dans le cas simple d'un diffuseur ponctuel enfoui à la profondeur h et de contraste $\chi(x,y) = \chi\delta(x,y+h)$, l'équation (G.18) s'écrit :

$$E^{\mathrm{d}}(x,y) \approx -i\chi k_0^2 \exp(2ik_2 h) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\tilde{t}a(\alpha)}{4i\pi\beta_2'} \exp(i\alpha x + i\beta_1' y) \mathrm{d}\alpha' \mathrm{d}\alpha. \qquad \text{(G.19)}$$

Ainsi, il est facile de constater qu'en changeant χ en $-\chi$ et en prenant $h = h \pm \frac{\lambda_2}{4}$, le champ diffracté donné par (G.19) reste le même. Ce raisonnement s'applique aussi à la configuration à une dimension de la Fig. G.1 illuminée sous incidence normale, où le contraste peut s'écrire $\chi(x,y) = \chi\Pi(\frac{y+h}{d})$, où Π représente la fonction porte, et $a(\alpha) = \delta(\alpha)$. Le champ diffracté ne dépend plus de x (par invariance du problème par translation selon $\mathbf{e}_x$), et s'écrit :

$$E^{\mathrm{d}}(y) \approx \chi \frac{-ik_0^2}{2k_2^2} t\tilde{t} \exp(2ik_2 h) \sin(k_2 d) \exp(ik_1 y). \qquad \text{(G.20)}$$

Là encore, en changeant χ en $-\chi$ et en prenant $h = h \pm \frac{\lambda_2}{4}$, le champ diffracté donné par (G.20) reste le même, et cette démonstration, dans le cadre de l'approximation de Born, donne une seconde illustration du caractère mal posé des problèmes inverses : deux structures différentes donnent le même champ diffracté.

Résumé : Ce travail porte sur les problèmes inverses de diffraction d'onde électromagnétique en régime temporel. Il s'agit de déterminer des caractéristiques (présence, position, forme, constitution...) d'un diffuseur à partir de la seule mesure d'un champ diffracté. Le caractère muli-fréquences du régime transitoire (par transformée de Laplace) permet de combiner la propriété de convergence à basses fréquences des processus itératifs avec un bon pouvoir de résolution à hautes fréquences. Trois approches ont été abordées dans deux configurations d'intérêt pratique : soit la cible est présente dans un espace homogène, soit elle est enfouie dans un demi-espace séparé du milieu supérieur par une interface plane. Ces approches sont :

Inversion harmonique : le diffuseur est supposé être successivement éclairé par plusieurs sources monochromatiques. Les reconstructions d'objets enfouis dans un milieu fortement inhomogène se trouve être considérablement améliorées en utilisant les champs focalisant obtenus par la méthode de Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel.

Inversion temporelle : le diffuseur est supposé être éclairé par une seule source générant un champ transitoire. Le problème inverse est alors résolu dans le domaine harmonique pour une collection de fréquences. Une impulsion courte dans le temps équivaut à considérer un champ incident à large support spectral, ce qui garantira la convergence (grâce aux basses fréquences) et un bon pouvoir de résolution (grâce aux hautes fréquences). Il est aussi possible de mettre en oeuvre une marche en fréquence de modulation de l'impulsion pour améliorer les reconstructions.

Inversion multi-sources et multi-fréquences : le diffuseur est supposé être successivement éclairé par plusieurs sources rayonnant un champ transitoire. Ici, seules quelques fréquences ont été prises en compte (nous ne parlerons donc pas de champs transitoires), ce qui a permis d'utiliser des champs électromagnétiques mesurés dans une chambre anéchoïque.

Mots clefs : Problème inverse, régime temporel, retournement temporel, diffraction électromagnétique.

Abstract: This work deals with inverse electromagnetic scattering problems in time domain. The aim of inverse problem is to determine characteristics (presence, position, shape, material constitutionĚ) of targets, using the scattered field only. The multi-frequencial character of transient data permits to combine the properties of convergence of iterative inversion scheme at low frequencies and the resolution at upper frequencies. Three different approaches were explored in two configurations of practical interests. The unknown target can be located in a homogeneous space or buried in a half-space separated from the upper medium by a plan interface. These three approaches are:

Harmonic inversion: the target is assumed to be successively illuminated by several sources radiating a time harmonic incident field. Reconstructions of target buried in a cluttered environment can be considerably improved by using the field given by the Decomposition of the Time Reversal Operator method.

Inversion of transient data: the target is assumed to be illuminated by only one source radiating a transient incident field. The inverse problem is solved in frequency domain for a set of frequencies. A short pulse in time domain is equivalent to considering a field with a large spectrum. This guarantees the convergence (with low frequencies) and the resolution (with upper frequencies). It is possible to use a modulation frequency-hopping too to improve the reconstructions.

Inversion of multi-sourcial and multi-frequencial data: the target is assumed to be successively illuminated by several sources radiating a transient incident field. In these works, only a few frequencies are considered at the same time. So they are not transient data. In this study, experimental data measured in a anechoic chamber are used.

Keywords : Inverse problem, time domain, time reversal, electromagnetic scattering.