G est un groupe mais . . .
E possède une structure de groupe

DÉFINITION:
On dit que E est muni d'une structure de groupe si on a défini sur les éléments $\{a, b, \ldots\}$ de E une *loi de composition interne* (c'est à dire une application de $E \times E \to E$):

- associative: $(ab)c \;=\; a(bc),\; \forall a, b, c \in E$,
- ayant un élément neutre $e \in E$: $\quad ea \;=\; ae \;= a, \qquad\qquad \forall a \in E$,
- symétrisable: $\forall a \in E, \exists a^{-1} \in E$ t. q. $\quad aa^{-1} \;=\; a^{-1}a \;=\; e$.

E est une *réalisation* du groupe abstrait G qui gouverne les relations entre $a, b, c, \ldots$.

Table de Pythagore

Si on considère dans $\mathbb{R}^2$ les transformations suivantes:

$e =$ identité, $a =$ rotation de $\frac{\pi}{2}$, $b =$ rotation de π, $c =$ rotation de $\frac{-\pi}{2}$

$1 \searrow 2$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

On a une table identique avec

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Groupes de matrices régulières

$GL(n, \mathbb{R})$**:** groupe général linéaire des matrices réelles d'ordre n, *idem* avec $GL(n, \mathbb{C})$,

$SL(n, \mathbb{R})$**:** groupe spécial linéaire des matrices réelles d'ordre n, dont le déterminant est égal à 1, *idem* avec $SL(n, \mathbb{C})$,

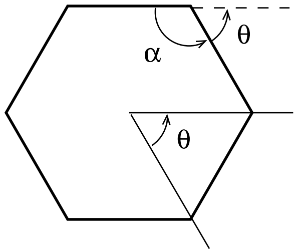
$O(n)$**:** groupe orthogonal des matrices réelles d'ordre n orthogonales, i.e. telles que $A^t A = I$, ce qui implique que $\det A = \pm 1$,

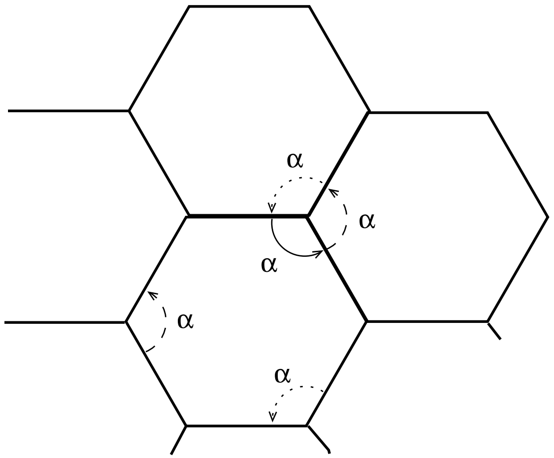
$SO(n)$**:** groupe spécial orthogonal: comme le précédent mais contenant seulement les matrices dont le déterminant est égal à 1,

$U(n)$**:** groupe unitaire des matrices complexes d'ordre n unitaires, i.e. telles que $A^* A = I$, ce qui implique que $|\det A| = 1$,

$SU(n)$**:** groupe spécial unitaire: comme le précédent mais avec la condition supplémentaire $\det A = 1$.

Groupes cristallographiques





$$\begin{cases} \theta & = \quad 2\pi/n, \quad n \in \mathbb{N} \\ \alpha & = \quad 2\pi/k, \quad k \in \mathbb{N} \\ \alpha + \theta & = \quad \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\pi}{k} + \frac{2\pi}{n} = \pi$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{2}{1 - \frac{2}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{llll} n = 3 & \Rightarrow k = \frac{2}{1-2/3} & = 6 \\ n = 4 & \Rightarrow k = \frac{2}{1-2/4} & = 4 \\ n = 5 & \Rightarrow k = \frac{2}{1-2/5} & = \frac{10}{3} \\ n = 6 & \Rightarrow k = \frac{2}{1-2/6} & = 3 \\ \ldots & & \end{array}$$

Institut FRESNEL MARSEILLE

Homomorphisme de groupes

Deux groupes G et G' sont *isomorphes* s'il existe entre eux une bijection φ telle que:

$$\forall (a,b) \in G \times G, \quad \varphi(ab) \;=\; \varphi(a)\,\varphi(b)$$

Si φ n'est pas nécessairement une bijection, on dit que les groupes G et G' sont seulement *homomorphes*.

Supposons que dans la table de Pythagore, au lieu de

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & \alpha, \\ b & \longrightarrow & \beta, \\ c & \longrightarrow & \gamma, \\ \ldots & & \end{array} \right. \text{on change} \left\{ \begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & \alpha, \\ b & \longrightarrow & \alpha, \\ c & \longrightarrow & \gamma, \\ \ldots & & \end{array} \right.$$

On obtient ainsi une table plus pauvre que la précédente, mais compatible avec elle.

Institut FRESNEL MARSEILLE

Exemples d'homomorphismes

Exemple
Si $G = GL(n, \mathbb{R})$ et $G' = (\mathbb{R}, .)$, l'application $\varphi : \ A \quad \Rightarrow det(A)$.

Exemple
Le logarithme népérien ln établit un isomorphisme entre $(\mathbb{R}_+^*, .)$ qui est le groupe multiplicatif des réels positifs et $(\mathbb{R}, +)$ i.e. le groupe additif $\mathbb{R}$ car:

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*, .), \qquad \ln(xy) \ = \ \ln x + \ln y.$$

Composition des homomorphismes

La composition de deux homomorphismes est encore un homomorphisme.

Homomorphisme de $SU(2)$ sur $SO(3)$

Espace de Minkowsky: e.v. réel dim=4 avec

$$(x, y) = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3.$$

Transformation de Lorentz: $||\mathcal{T}x|| = ||x||$

Institut FRESNEL MARSEILLE

Action d'un groupe sur un ensemble

Soit M un ensemble donné. On dit qu'on a réalisé le groupe G comme *groupe de transformations* de M si on a défini une application φ de $G \times M \to M$ telle que:

$$\forall m \in M : \ \varphi(e, m) \ = \ m \qquad \text{et}$$

$$\forall a, b \in G : \ \varphi(ab, m) \ = \ \varphi[a, \ \varphi(b, m)].$$

En fait, on préfère souvent noter plus simplement am au lieu de $\varphi(a, m)$, ce qui donne à la relation ci-dessus l'allure d'une relation d'associativité :

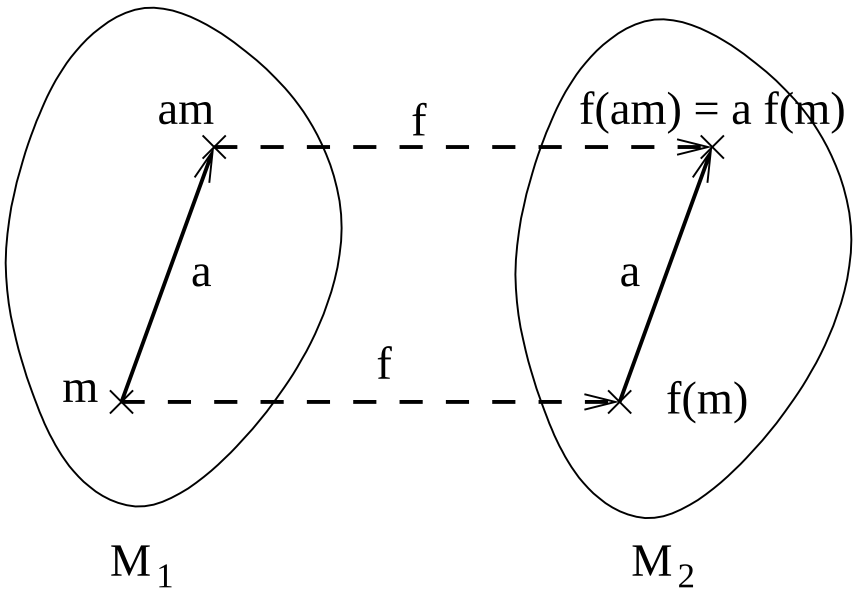
$$(ab)m \ = \ a(bm).$$

On dit alors que G agit ou *opère* sur M.

Morphismes de groupes

Soit G un groupe opérant sur deux ensembles M_1 et M_2
et f une application de M_1 dans M_2.
On dit que f est un *morphisme de groupe* si :

$$\forall a \in G, \quad \forall m \in M_1 : \quad f(am) \; = \; af(m).$$



Institut FRESNEL MARSEILLE

Classes de conjugaison

Soit a et $b \in G$. On définit la transformation de conjugaison φ_a par:

$$\varphi_a(b) \;=\; a\, b\, a^{-1}.$$

L'ensemble des transformations de conjugaison de G est un groupe.
La conjugaison définit une relation d'équivalence:

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x \in G \quad \text{t.q.} \quad b = xax^{-1}.$$

(N.B. x n'est pas unique).

Classes de conjugaison

Cette relation permet de définir des *classes de conjugaison*.

Classes de conjugaison (suite)

- Du point de vue du physicien, chaque classe est constituée d'opérations semblables (symétries, rotations, ...),
- Dans le cas de groupes de matrices: $B = XAX^{-1}$, B et A ont donc: même déterminant, mêmes valeurs propres, même trace.
- L'identité forme une classe à elle toute seule
- les autres classes ne sont pas des groupes car elles ne contiennent pas l'identité,
- si G est abélien, chaque élément forme une classe à lui tout seul car alors:
$$xax^{-1} = xx^{-1}a = a.$$
- Plus généralement, si a commute avec tout les autres éléments d'un groupe, il forme une classe à lui tout seul.

Institut FRESNEL MARSEILLE

Représentation des groupes finis

Le groupe G agit sur un *espace vectoriel* V de dimension fini: ses éléments sont alors représentés par des *matrices*.
L'application $\mathcal{R}$ qui associe aux éléments de G les matrices $\mathcal{R}(a)$ en question est la *représentation* de G d'espace V.

$\mathcal{R}$ est donc un homomorphisme de G dans $GL(n)$:

$$\forall (a,b) \in G \times G, \quad \mathcal{R}(ab) \;=\; \mathcal{R}(a)\,\mathcal{R}(b)$$

Dimension de la représentation = dimension de V.
Remarque: ne pas confondre avec l'ordre du groupe.

Représentation équivalentes

Deux représentations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ d'espaces V et V' sont dites *équivalentes* si il existe un isomorphisme linéaire $\mathcal{U}$ de V dans V' tel que:

$$\forall a \in G, \quad \mathcal{R}'(a) = \mathcal{U}\,\mathcal{R}(a)\,\mathcal{U}^{-1}.$$

Ceci implique donc que V et V' ont même dimension.

En remplaçant les applications linéaires par des matrices, on peut aussi interpréter la relation ci-dessus comme une relation de changement de base pour deux matrices représentant une même application linéaire.

Fidèle ou infidèle ?

Si la représentation $\mathcal{R}$ est

- un isomorphisme, elle est *fidèle*,
- un homomorphisme, elle n'est *pas fidèle*

Représentation unitaire

On montre qu'il est toujours possible de trouver une base de V dans laquelle toutes les matrices de la représentation sont unitaires.

Réductible ou irréductible ?

On dit que la représentation $\mathcal{R}$ d'espace V est *irréductible* s'il n'existe pas de sous-espace invariant non banal par rapport aux transformations du groupe.

Sinon , dans une base bien choisie, toutes les matrices de la représentation $\mathcal{R}$ peuvent prendre la même forme diagonale par blocs :

$$\mathcal{R}(a) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathcal{R}_1(a)} & & & \\ & \boxed{\mathcal{R}_2(a)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathcal{R}_n(a)} \end{pmatrix}$$

Caractère(s) d'une représentation

Définition

$$\chi(a) = trace[\mathcal{R}(a)].$$

Propriétés

- $\chi(e) = \dim V$
- Représentation triviale:
  $\chi(a) = 1 \qquad \forall a \in G.$
- *deux représentations équivalentes ont mêmes ensemble de caractères.*

Institut FRESNEL MARSEILLE

Table de caractères

Théorème

Le nombre de représentations irréductibles inéquivalentes est égal au nombre de classes de conjugaison

Exemple: table de caractères de $\mathcal{S}_3$

$6\mathcal{S}_3$	$1C_1$	$3C_2$	$2C_3$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

- 1C identité,
- $3C_2$ symétries par rapport aux médianes,
- $2C_3$ rotations de $\pm\frac{2\pi}{3}$.

Orthogonalité des caractères

En définissant le produit scalaire par :

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{N_G} \sum_{a \in G} \chi_1(a)\, \overline{\chi_2(a)}. = \frac{1}{N_G} \sum_{j} \chi_1(c_j)\, \overline{\chi_2(c_j)}.$$

on montre que (somme sur les classes):

$$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \text{ irréductibles} \Rightarrow \begin{array}{lcl} \mathcal{R}_1 \not\sim \mathcal{R}_2 & \Rightarrow & (\chi_1, \chi_2) = 0, \\ \mathcal{R}_1 \sim \mathcal{R}_2 & \Rightarrow & (\chi_1, \chi_2) = 1. \end{array}$$

On montre aussi (somme sur les représentations)

$$. \sum_{j} \chi_j(c_l)\, \chi_j(c_k) = \frac{N_G}{n_k}\, \delta_{k,l}$$

Institut FRESNEL MARSEILLE

Réduction d'une représentation

Choisir une base de V dans laquelle toutes les matrices de la représentation sont de la forme diagonale par blocs :

$$\mathcal{R}(a) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathcal{R}_1(a)} & & & \\ & \boxed{\mathcal{R}_2(a)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathcal{R}_n(a)} \end{pmatrix}$$

Le nombre de fois n_i où la représentation irréductible $\mathcal{R}_i$ apparaît dans $\mathcal{R}$ est donné par

$$n_i = (\chi_i, \chi).$$

Application

Opérateur invariant par un groupe

Si Q commute avec toutes les matrices de la représentation du groupe G, on dit qu'il est *invariant par le groupe*.

Sous-espaces propres

Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est aussi invariant par G:

$$Q\,\mathcal{R}(a)\,\vec{v} \;=\; \mathcal{R}(a)\,Q\,\vec{v} \;=\; \mathcal{R}(a)\lambda\,\vec{v},$$

Principe d'irréductibilité

Les représentations de G définies par les sous-espaces propres de Q sont des représentations *irréductibles* de G.

Règles de sélection

Représentation attachée à une fonction

Soit f une fonction sur un espace E, et G_f l'ensemble des fonctions obtenues en faisant agir toutes les transformations du groupe sur f. Les combinaisons linéaires de ces fonctions définissent un espace vectoriel de représentation V_f pour le groupe. On notera $\mathcal{R}_f$ la représentation qui lui est associée.

Théorème

Soit f_1 et f_2 deux fonctions définies sur E, $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ les deux représentations supposées unitaires qui leur sont attachées: si les réductions de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ ne contiennent pas de représentations irréductibles équivalentes le produit scalaire $< f_1, f_2 >$ est nul.

Institut FRESNEL MARSEILLE

Exemple: le carré

CLASSES DE CONJUGAISON

- E: identité e,
- C_2: rotation de π,
- $2\mathrm{C}_4$: rotations de $\pm\frac{\pi}{2}$,
- $2\sigma_v$: symétries par rapport aux médianes,
- $2\sigma'_v$: symétries par rapport aux diagonales.

TABLE DE CARACTÈRES

C_{4v}	E	C_2	$2\mathrm{C}_4$	$2\sigma_v$	$2\sigma'_v$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
B_1	1	1	-1	1	-1
B_2	1	1	-1	-1	1
E	2	-2	0	0	0

Les modes peuvent être classés par rapport aux représentations irréductibles A_1, A_2, B_1, B_2 (dimension=1) et E (dimension 2: dégénéré).

Levées de dégénérescence

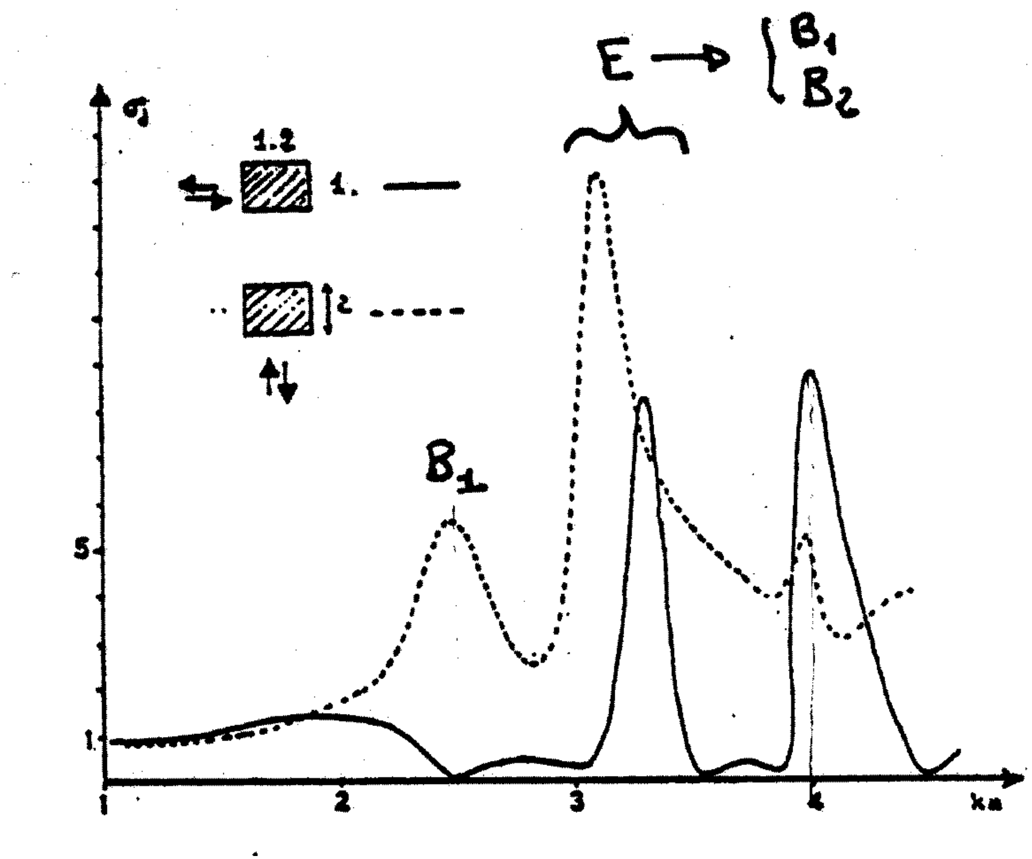
On a vu que si le sous-espace propre est de dimension supérieure à un, le mode est dit dégénéré. Cela signifie que l'allure du champ obtenu à la résonance dépend de la forme du champ incident. Pour le groupe C_{4v}, c'est le cas pour la représentation E. On peut se demander ce que devient cette propriété lorsque l'on déforme le cylindre pour passer d'une section carrée à une section rectangulaire. Pour cela, il faut comparer la table de caractères de C_{4v} avec celle de C_{2v} qui est celle correspondant au rectangle et que l'on donne ci-dessous.

C_{2v}	E	C$_2$	$\sigma_x v$	$2\sigma_y$
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	-1	1

Levées de dégénérescence (suite)

La représentation irréductible E de C_{2v} définit une représentation réductible de C_{2v}: pour la réduire en représentations irréductibles de C_{2v} il suffit d'utiliser la formule donnée plus haut. On voit alors que E se décompose en B_1 et B_2 de C_{2v}, donc qu'il y a une *levée de dégénérescence*, c'est à dire que lors de la déformation, les pics de résonances se dédoublent et que les cartes de champs sont alors fixées par celles des modes excités.

Levées de dégénérescence (suite 2)



Institut FRESNEL MARSEILLE