Pouvoir des Points

I Pouvoir des pointes

1° - *Sphère isolée* : Une sphère métallique S_1 de rayon $R_1 = 9$cm porte initialement une charge de $Q_0 = 10$nC. Quels sont la répartition de la charge Q_0, le champ électrique dans tout l'espace, et le potentiel de S_1? Quel est la capacité de la sphère?

La charge Q_0 se répartit uniformément sur la sphère car celle-ci est métallique et isolée dans l'espace. La densité surfacique est

$$\sigma_0 = \frac{Q_0}{4\pi R_1^2} \tag{1}$$

La symétrie sphérique du système fait que

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(r) = E(r)\,\widehat{\mathbf{r}} \tag{2}$$

Le théorème de Gauss permet de calculer $\mathbf{E}$ dans tout l'espace

$$\begin{aligned} r > R_1 \qquad & \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{\widehat{\mathbf{r}}}{r^2} \\ r < R_1 \qquad & \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{\mathbf{0}} \qquad \text{champ nul à l'intérieur d'un conducteur} \end{aligned} \tag{3}$$

On remarque que le champ électrique à la surface de la sphère satisfait le théorème de Coulomb :

$$\mathbf{E}_{\mathrm{s}} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\widehat{\mathbf{n}}_{\mathrm{ex}} = \frac{Q_0}{4\pi R_1^2}\widehat{\mathbf{r}} \tag{4}$$

où $\widehat{\mathbf{n}}_{\mathrm{ex}}$ est le vecteur normale à la surface du conducteur dirigé de l'intérieur du conducteur vers l'extérieur. Le potentiel se calcule au moyen de $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$ et la convention $V(\infty) \to 0$

$$\begin{aligned} r > R_1 \qquad & V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \\ r < R_1 \qquad & V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_1} \end{aligned} \tag{5}$$

Le potentiel de la sphère est constant et égale au potentiel de $r < R_1$

$$V_{S_1} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_1} \tag{6}$$

Remarque : pour calculer le potentiel de la sphère, on peut dire que E étant nul à l'intérieur de la sphère, le potentiel y est constant et en particulier est égal au potentiel en son centre. Comme tous les éléments de la sphère d'aire ds sont porteurs de la charge $\sigma_0 ds$ et sont distants de R_1 du centre O, on peut écrire

$$V_{S_1} = V(0) = \int \frac{\sigma_0 ds}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{4\pi R_1^2\sigma_0}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{\sigma_0 R_1}{\epsilon_0} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_1} \tag{7}$$

A.N. : Calculer le potentiel de S_1 et sa charge surfacique pour $R_1 = 9$cm et $Q_0 = 10^{-8}$C.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{c^2}{10^7} \qquad & V_{S_1} = \frac{c^2}{10^7}\frac{10^{-8}}{910^{-2}} = \frac{9\times10^{16}}{10^7}\frac{10^{-8}}{9\times10^{-2}} = 10^3\mathrm{V} \\ \sigma = \frac{Q_0}{4\pi R_1^2} &= \frac{10^{-8}}{4\pi\times81\times10^{-4}} \simeq 9.8\times10^{-8}\mathrm{Cm}^{-2} \end{aligned} \tag{8}$$

Par la définition de la capacité, $C = Q_0/U_{S_1,\infty} = Q_0/V_{S_1}$, et la capacité de la sphère isolée est :

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{V_{S_1}}{C_{S_1}} \\ &= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_1} \\ &\Rightarrow C_{S_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \end{aligned} \tag{9}$$

2° *Deux sphères reliées par un fil conducteur* : Une deuxième sphère métallique S_2, initialement neutre de rayon R_2 est reliée par un fil conducteur long et fin à la sphère S_1. On supposera que le fil ne porte pas de charges et que les effets d'influence d'une sphère sur l'autre sont négligeables.

- Calculez, en considérant que la répartition de charge est uniforme sur chaque sphère, la nouvelle répartition de la charge Q_0.
- Trouvez le champ électrique E_1 et E_2 dans le voisinage de chaque sphère pour $Q_0 = 10nC$, $R_1 = 9$cm et $R_2 = 1$cm.
- Discutez le comportement du rapport E_2/E_1 en fonction du rapport R_1/R_2.
- Quelle conclusion peut-on tirer de ce problème au sujet du pourvoir des pointes? Autrement dites, que pouvons-nous dire au sujet des champs électriques près des surfaces avant un petit rayon de courbure?

Quand on relie les 2 sphères par le fil on va avoir un nouvel état d'équilibre. Les charges des sphères seront désignées par q_1 et q_2 et ils seront au même potentiel V'. On doit avoir : (conservation de la charge) $Q_0 = q_1 + q_2$.

Puisque on néglige les phénomènes d'influence, chaque sphère se comporte comme si elle était seule :

$$V' = q_1 C_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_1} \qquad\qquad V' = q_2 C_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_2} \tag{10}$$

Par la suite

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_2} = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0\,(R_1 + R_2)} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\,(R_1 + R_2)} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow q_1 &= \frac{R_1}{(R_1 + R_2)} Q_0 \\ q_2 &= \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} Q_0 \end{aligned} \tag{12}$$

Du fait que les potentiels des deux sphères sont égaux, on obtient

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_2} \tag{13}$$

ce qui donne pour le rapport des charges

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{R_2}{R_1} \tag{14}$$

Le champ $E_1 = \|\mathbf{E}_1\|$ au voisinage de (S_1, R_1) est d'après 1° :

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \tag{15}$$

De même $E_2 = \|\mathbf{E}_2\|$ au voisinage de (S_2, R_2) est :

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \tag{16}$$

d'où

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{q_2}{R_2^2}\frac{R_1^2}{q_1} = \frac{R_2}{R_1}\frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{R_1}{R_2} \tag{17}$$

Pour des objets qui ont le même potentiel, plus le rayon de courbure est faible, plus le champ au voisinage de la surface est intense. Ce phénomène s'appelle le pouvoir (ou effet) des pointes. Les champs électriques intenses près des objets à faible rayon de courbure peuvent ioniser l'air afin de le rendre conducteur et donc permettre des décharges d'électricité. Ce phénomène fait en sorte que le foudre a une tendance a tomber sur des objets conducteurs pointus à faible rayon de courbure (para-tonnerres, arbres, êtres humains,...).