Électricité et magnétisme - TD n° 5
Diélectriques et Conducteurs

1. **Permittivité -** Le permittivité du diamant vaut ϵ_m =$5\,10^{-11}$ F m^{-1}. Calculer sa constante diélectrique et sa susceptibilité.

   Solution :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\,10^9 \qquad \Rightarrow \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi\,9\,10^9} \simeq 8.8410^{-12}\mathrm{Fm}^{-1}$$
$$\epsilon_m = \varepsilon_r\epsilon_0 = 5\,10^{-11}\mathrm{Fm}^{-1} \qquad \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{\epsilon_m}{\epsilon_0} = \frac{5\,10^{-11}}{8.8410^{-12}} \simeq 5,7$$
$$\varepsilon_r = 1 + \chi_m \qquad \Rightarrow \chi_m \simeq 4,7$$

2. **Milieux diélectrique -**Considérer une boule conductrice de rayon R dans un milieu diélectrique de permittivité ϵ_m. La boule porte une charge Q. Calculer le champ électrique partout dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Calculer le potentiel électrique partout en prenant un point de référence à l'infini.

   Solution : Le calcul est exactement le même que pour une boule conductrice dans le vide, simplement ϵ_0 est remplacé par $\epsilon_m = \varepsilon_r\epsilon_0$

$$r > R : \vec{\boldsymbol{E}}\,(r) = \widehat{\boldsymbol{u}}_r E_r = \widehat{\boldsymbol{u}}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\epsilon_0}\frac{1}{r^2} = \widehat{\boldsymbol{u}}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_m}\frac{1}{r^2} \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_m}\frac{1}{r}$$
$$r < R : \vec{\boldsymbol{E}}\,(r) = \widehat{\boldsymbol{u}}_r E_r = \vec{\boldsymbol{0}} \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_m}\frac{1}{R}$$

3. **Densité de courant - vitesse des porteurs**

   Le cuivre, qui est un bon conducteur du courant électrique, possède 1 électron libre par atome; sa densité volumique de charge ρ vaut $1,36.10^{10}$ C.m^{-3}. Un fil de cuivre de section $s = 1\,\mathrm{mm}^2$ est parcouru par un courant $I = 10\,\mathrm{A}$. Calculer la densité de courant j et la vitesse moyenne des porteurs.

   Solution :

$$I = \left\|\vec{\boldsymbol{j}}\right\| \times s \Longrightarrow \left\|\vec{\boldsymbol{j}}\right\| = \frac{I}{s} \overset{\text{A.N.}}{=} \frac{10}{(10^{-3})^2} = 10^7\mathrm{Cs}^{-1}\mathrm{m}^{-2}$$

$$\vec{\boldsymbol{j}} = \rho_p \vec{\boldsymbol{v}} \Longrightarrow \left\|\vec{\boldsymbol{v}}\right\| = \frac{\left\|\vec{\boldsymbol{j}}\right\|}{\rho_p} \overset{\text{A.N.}}{=} \frac{10^7\mathrm{m.s}^{-1}}{1,36\,10^{10}} \simeq 10^{-3}\mathrm{m.s}^{-1} = 1\mathrm{mm.s}^{-1}$$

4. **Résistance ohmique**

Un conducteur filaire de longueur ℓ, de section S, est soumis à une différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre ses extrémités.

(a) En appelant $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ le vecteur densité de courant, montrer que, en régime permanent, le flux de $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ est conservateur.

Solution : Les équations de base en magnétostatique sont :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{\textbf{rot}}\, \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \overrightarrow{\boldsymbol{j}} \tag{2}$$

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky, l'éq.(1) montre que le flux de $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ est conservatif :

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \overrightarrow{\boldsymbol{B}}\, dV = \oiint\limits_S \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \cdot \widehat{\boldsymbol{n}}\, dS = 0$$

On peut prendre la divergence de l'éq.(2) afin de trouver :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\textbf{rot}}\, \boldsymbol{B} \equiv 0 = \mu_0 \operatorname{div} \overrightarrow{\boldsymbol{j}}\ .$$

Combinant ce résultat que $\operatorname{div} \overrightarrow{\boldsymbol{j}} = 0$ avec de nouveau le théorème de Green-Ostrogradsky, on déduit que $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ est conservatif en magnétostatique :

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \overrightarrow{\boldsymbol{j}} = \oiint\limits_S \overrightarrow{\boldsymbol{j}} \cdot \widehat{\boldsymbol{n}} dS = 0\ .$$

(b) Calculer la résistance R de cette portion de fil de conductivité γ.

Solution : Nous avons que $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$, et $\overrightarrow{d\ell}$ sont colinéaires.

$$I = jS = \gamma E S$$

et

$$U = V_1 - V_2 = -\int_2^1 \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -E\ell$$

donc

$$I = \gamma E S = -\gamma \frac{U}{\ell} S$$

$$U = -I \frac{\ell}{S\gamma}$$

Dans la convention générateur de U positif et I positif sont dans le même sens $U = -IR$ donc on peut conclure que :

$$R = \frac{\ell}{S\gamma}$$

5. **Résistance de fuite**

L'âme de rayon $a = 1\,\mathrm{cm}$ d'un câble coaxial et sa gaine extérieure de rayon $b = 2\,\mathrm{cm}$ sont séparés par un isolant imparfait de conductivité $\gamma = 10^{-22}\,\Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$.

(a) Calculer la résistance de fuite R_f de ce câble pour un longueur ℓ de câble.

Pour un fil ordinaire, la section S constante, la résistance se calcul simplement en intégrant la longueur du fil :

$$\begin{aligned} dR &= \frac{d\ell}{S\gamma} \\ R &= \int dR = \int \frac{d\ell}{S\gamma} = \frac{\ell}{S\gamma} \end{aligned}$$

La résistance de fuite est similaire sauf qu'ici le courant de fuit latéralement entre a et b dans la direction radial (ρ en coordonnées cylindriques), et la section pour le courant grandit au fur et à mesure que les porteurs de courant s'éloignent du rayon intérieur car la surface de conduction à un rayon ρ est :

$$S = 2\pi\rho\ell$$

La résistance de fuite se calcul en intégrant $d\ell = d\rho$ du rayon inférieur, a et le rayon extérieur, b:

$$\begin{aligned} R_f &= \int_a^b \frac{d\rho}{S\gamma} = \int_a^b \frac{d\rho}{2\pi\rho\ell\gamma} = \frac{1}{2\pi\ell\gamma}\int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho} \\ &= \frac{1}{2\pi\ell\gamma} \ln\frac{b}{a} \,. \end{aligned}$$

(b) En déduire le courant de déperdition latérale d'un kilomètre de câble soumis à une différence de potentiel de 1000 volts.

$$R_f \overset{\text{A.N.}}{=} \frac{1}{2 \times 3.1416 \times 10^{-22} \times 10^3} \ln 2 \simeq 1.1 \times 10^{18}\Omega$$

et le courant de fuite, I_f est

$$\begin{aligned} I_f R_f &= U = 10^3 \\ I_f &\overset{\text{A.N.}}{=} \frac{10^3}{1.1 \times 10^{18}} \simeq 9 \times 10^{-16}\mathrm{A}\,. \end{aligned}$$