

Electricité et magnétisme - TD n°9
Induction

1. **Force électromotrice** Une tige métallique de longueur $l = 1,5\text{m}$ se trouve dans un champ magnétique uniforme, constant $B = 0,5\text{T}$. La tige est perpendiculaire à \vec{B} . Elle bouge avec une vitesse constante $v = 4\text{m/s}$ dans une direction perpendiculaire à \vec{B} et à la tige. Calculer la différence du potentiel électrique entre les extrémités de la tige.

$$\frac{\vec{F}_m}{q} = \vec{v} \wedge \vec{B} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$e = \int \frac{\vec{F}_m}{q} \cdot d\vec{l} = \int \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2 \frac{3}{2} = 3\text{V}$$

2. **Force électromotrice** Le plan d'un cadre conducteur carré de côté a contient un fil de courant constant I rectiligne infini qui ne touche pas le cadre. Le cadre s'éloigne du fil avec une vitesse constante, v , orthogonale au courant et dans le plan du cadre.

- (a) Calculer le potentiel électrique induit (force électromotrice) dans le cadre par le champ magnétique du courant en fonction de la distance b entre le fil et le cadre (voir dessin).

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{\varphi}$$

$$dS = a dx \quad \hat{n} = \hat{\varphi}$$

$$d\Phi(x) = \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \frac{\mu_0 I a}{2\pi x} \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi x} dx$$

$$\Phi_{\text{circuit}} = \int_b^{b+a} d\Phi(x) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_b^{b+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b}\right)$$

$$\Phi_{\text{circuit}} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{vt+a}{vt}\right)$$

$$e(t) = -\frac{d\Phi_{\text{circuit}}}{dt} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{d}{dt} [\ln(vt+a) - \ln(vt)]$$

$$= -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[\frac{v}{vt+a} - \frac{v}{vt} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I a v}{2\pi} \left[\frac{1}{vt} - \frac{1}{vt+a} \right] = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \left[\frac{a^2}{b(b+a)} \right]$$

- (b) La spire carrée possède une résistance R . Calculer le courant $i(t)$ induite dans la spire carrée.

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi R} \left[\frac{a^2}{b(b+a)} \right]$$

- (c) Calculer la puissance dissipée par l'effet joule.

$$P_J(t) = i(t)U_R(t) = i^2(t)R = \frac{1}{R} \left[\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \frac{a^2}{b(b+a)} \right]^2 \quad b(t) = vt + b_0$$

Il est pratique de prendre $b_0 = 0$.

(d) Calculer la force de Laplace sur la spire carrée.

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_L(t) &= \oint (i(t) d\vec{l} \wedge \vec{\mathbf{B}}) = \frac{\mu_0 a I i(t)}{2\pi} \frac{1}{a+b} \hat{\mathbf{u}}_x - \frac{\mu_0 a I i(t)}{2\pi} \frac{1}{b} \hat{\mathbf{u}}_x \\ &= \frac{\mu_0 a I i(t)}{2\pi} \left[\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b} \right] \hat{\mathbf{u}}_x = -\frac{\mu_0 I i(t)}{2\pi} \left[\frac{a^2}{b(a+b)} \right] \hat{\mathbf{u}}_x\end{aligned}$$

Le champ $\vec{\mathbf{B}}$ est constant, et On remarque que ceci vérifie le théorème de Maxwell avec $dx = v dt$. Le travail pour sortir le cadre est

$$dW(t) = -\vec{\mathbf{F}}_L(t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_x dx = \frac{\mu_0 I i(t)}{2\pi} \left[\frac{a^2}{b(a+b)} \right] v dt$$

La puissance versée pour sortir le cadre est alors :

$$P(t) = \frac{dW(t)}{dt} = \frac{\mu_0 I i(t)}{2\pi} \left[\frac{a^2}{b(a+b)} \right] v = \frac{1}{R} \left[\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \frac{a^2}{b(b+a)} \right]^2$$

$$b(t) = vt + b_0$$

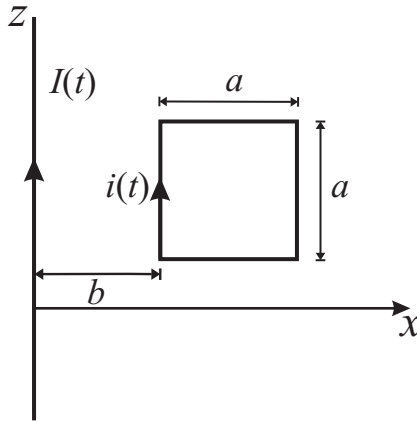


FIGURE 1 – Induction dans un cadre carré

3. **Force électromotrice** On prend la même situation que dans le problème 2 mais on fixe la distance b constante et on prend le fil conducteur rectiligne de longueur infinie d'être parcouru par un courant alternatif $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ La spire carrée possède une résistance R .

(a) Calculer le potentiel électrique induit (force électromotrice) dans le cadre.

Le flux magnétique se calcul de la même manière que dans le TD8.

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{B}} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{\varphi} \\ dS &= a dx \quad \hat{\mathbf{n}} = \hat{\varphi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\Phi(x) &= \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{\mu_0 I a}{2\pi x} \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi x} dx \\ \Phi_{\text{circuit}} &= \int_b^{b+a} d\Phi(x) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_b^{b+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left(\frac{b+a}{b} \right)\end{aligned}$$

La force électromotrice, e se calcul par la loi de Faraday.

$$e(t) = -\frac{d\Phi_{\text{circuit}}}{dt} = -\frac{dI}{dt} \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \left(\frac{b+a}{b} \right) = I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \left(\frac{b+a}{b} \right)$$

(b) Calculer le courant $i(t)$ induite dans la spire carrée.

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{I_0 \omega \mu_0 a}{R} \sin(\omega t) \ln\left(\frac{b+a}{b}\right)$$

(c) Calculer la puissance dissipé par l'effet joule.

$$P_J(t) = i(t)U_R(t) = i^2(t)R = \frac{1}{R} \left[\frac{\mu_0 I_0 \omega a}{2\pi} \sin(\omega t) \ln\left(\frac{b+a}{b}\right) \right]^2$$

(d) Calculer la force de Laplace sur la spire carrée.

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}}_L(t) &= \oint \left(i(t) \vec{dl} \wedge \vec{\mathbf{B}} \right) = -\frac{\mu_0 I(t) i(t)}{2\pi} \left[\frac{a^2}{b(a+b)} \right] \hat{\mathbf{u}}_x \\ &= -\frac{\mu_0 I_0 \cos(\omega t)}{2\pi} \frac{I_0 \omega \mu_0 a}{R} \sin(\omega t) \ln\left(\frac{b+a}{b}\right) \left[\frac{a^2}{b(a+b)} \right] \hat{\mathbf{u}}_x \\ &= -\left[\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \right]^2 \omega \frac{a}{R} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \ln\left(\frac{b+a}{b}\right) \left[\frac{a^2}{b(a+b)} \right] \hat{\mathbf{u}}_x \end{aligned}$$

4. Disque de Faraday

Parmi les nombreuses expériences effectuées par Faraday pour étudier le phénomène d'induction, une fut dédiée à montrer qu'un courant apparaît dans un conducteur en mouvement dans un champ magnétique. Pour cela, il considéra un disque conducteur mobile autour de son axe et placé dans un champ magnétique uniforme colinéaire à l'axe du disque. Un circuit contenant un galvanomètre reliait le centre du disque au bord du disque par un contact glissant (figure 2). Faraday observa que quand le disque tournait, l'aiguille du galvanomètre subissait une déflexion.

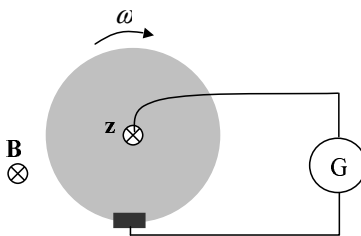


FIGURE 2 – Disque de Faraday

On considère un disque d'axe (Oz) , de rayon R et d'épaisseur a , en rotation à la vitesse ω et placé dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}} = B\hat{\mathbf{z}}$ uniforme.

(a) Expliquez l'origine du courant induit. Calculez la force électromotrice. Application numérique : $B = 0,2 \text{ T}$, $R = 0,1 \text{ m}$, $\omega = 50 \text{ s}^{-1}$.

L'origine de la force est la partie électromotrice de la Force de Lorentz.

On choisit l'axe Oz afin qu'il porte l'axe de rotation. Le vecteur $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ est porté par l'axe Oy . La fréquence angulaire s'écrit $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega \hat{\mathbf{z}}$ avec $\omega \equiv \|\vec{\boldsymbol{\omega}}\| = 20 \times 2\pi \text{ s}^{-1}$. La vitesse à une distance ρ du centre O dans la direction $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ est :

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{fil}}(\rho) = \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \vec{\boldsymbol{\rho}} = \rho \omega \hat{\mathbf{u}}_\phi$$

Le champ magnétique est constant est donné par $\vec{\mathbf{B}} = B\hat{\mathbf{u}}_z$.

Puisque $\vec{dl} = d\rho\hat{\mathbf{u}}_\rho + \rho d\phi\hat{\mathbf{u}}_\phi + dz\hat{\mathbf{u}}_z$, la force électromotrice le long du chemin entre l'axe du disque et le bord du disque est

$$\begin{aligned} e &= \int_0^R (\vec{\mathbf{v}}_{\text{fil}} \wedge \vec{\mathbf{B}}) \cdot \vec{dl} \\ &= - \int_0^R \rho\omega B (\hat{\mathbf{u}}_\phi \wedge \hat{\mathbf{u}}_z) \cdot \vec{dl} = \int_0^R \rho\omega B \hat{\mathbf{u}}_\rho \cdot \vec{dl} \\ &= \omega B \int_0^R \rho d\rho = \frac{\omega B}{2} [\rho^2]_0^R = \frac{\omega B}{2} R^2 \\ &\stackrel{\text{A.N.}}{=} \frac{5 \cdot 10^1 \times 2 \cdot 10^{-1} \times 10^{-2}}{2} \\ &= 5 \times 10^{-2} V = 0,05 V = 50 \text{mV} \end{aligned}$$

5. Auto-inductance d'un solénoïde

On considère un solénoïde toroïdal de section carrée et parcouru par un courant I (côté $a = 4$ mm, grand rayon $R = 8$ cm, $N = 1000$ spires).

(a) Calculer, à l'aide du théorème d'Ampère, le champ magnétique et son flux.

L'invariance du problème en ϕ donne $\vec{\mathbf{B}}_i = \hat{\mathbf{z}}B_i(\rho, z)$. Le théorème d'Ampère indique que le champ à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde soit constant et que $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}} = \vec{\mathbf{0}}$. Le théorème d'Ampère donne :

$$\begin{aligned} lB_i &= \mu_0 n I l \\ \Rightarrow \vec{\mathbf{B}}_i &= \hat{\mathbf{z}}\mu_0 n I = \hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0 N I}{2\pi R} \end{aligned}$$

Le flux magnétique est donné par :

$$\begin{aligned} \int \vec{\mathbf{B}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \frac{\mu_0 N I}{2\pi} a \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) \\ &\simeq \frac{\mu_0 N I}{2\pi R} a^2 \end{aligned}$$

Le flux à travers le circuit est

$$\Phi_m = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2\pi R} I$$

(b) A partir de l'expression du flux magnétique, déduire l'inductance propre du tore L .

La définition de l'inductance propre est :

$$\Phi_m \equiv L I$$

donc

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2\pi R}$$

L'énergie propre magnétique du circuit

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V \|\vec{\mathbf{B}}_i\|^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 N^2 I^2}{4\pi^2 R^2} 2\pi R a^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2\pi R} I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2\pi R} I^2 = \frac{1}{2} L I^2 \end{aligned}$$

On remarque que c'est le même résultat que pour une bobine infinie ($l/a \rightarrow \infty$) :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{l}$$

(c) Estimer sa valeur numérique.

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2\pi R} = \frac{4\pi \times 10^6 \times 16 \times 10^{-6}}{10^7 \times 2\pi \times 8 \times 10^{-2}} = \frac{4}{10^5} = 4 \cdot 10^{-5} \text{H}$$

$$= 40 \mu\text{H}$$

(d) Trouver la tension $U(t)$, entre les bornes du solénoïde quand le courant a la forme : $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. A.N. $\omega = 2\pi 50$ et $I_0 = 0.5$ A.

$$U_L(t) = -L \frac{dI}{dt} = LI_0 \omega \sin(\omega t)$$

$$= 4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{2} 2\pi 50 \sin(\omega t)$$

$$= 2\pi 10^{-3} \sin(\omega t)$$

6. Soit $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$. Pour quelles valeurs de I_0 et ϕ , $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ est-il solution de l'équation $L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dU}{dt}$?

$$\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \cos(\omega t) \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(\omega t) \cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(\omega t)$$

$$\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \cos(\omega t) \cos(-\frac{\pi}{2}) - \sin(\omega t) \sin(-\frac{\pi}{2}) = \sin(\omega t)$$

$$U(t) = \text{Re} \{ U_0 e^{i\omega t} \}$$

$$I(t) = \text{Re} \{ I_0 e^{i\omega t} \}$$

Solution particulière de l'équation :

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dU}{dt}$$

$$L \frac{d^2 (I_0 e^{i\omega t})}{dt^2} + R \frac{d(I_0 e^{i\omega t})}{dt} + \frac{(I_0 e^{i\omega t})}{C} = \frac{d(U_0 e^{i\omega t})}{dt}$$

$$I_0 \left[L \frac{d^2 (e^{i\omega t})}{dt^2} + R \frac{d(e^{i\omega t})}{dt} + \frac{e^{i\omega t}}{C} \right] = U_0 \frac{d(e^{i\omega t})}{dt}$$

Ce qui donne l'équation caractéristique

$$I_0 \left[-L\omega^2 + i\omega R + \frac{1}{C} \right] = U_0 i\omega$$

$$i\omega I_0 \left[Li\omega + R + \frac{1}{i\omega C} \right] = U_0 i\omega$$

$$I_0 \left[R + i \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right] \right] = U_0$$

$$I_0 = U_0 \frac{1}{\left[R - i \left[\frac{1}{\omega C} - \omega L \right] \right]} e^{i\phi} = U_0 \frac{\left[R + i \left[\frac{1}{\omega C} - \omega L \right] \right]}{\left[R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2 \right]}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{\left[R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2 \right]}} \quad \tan \phi = \frac{\left[\frac{1}{\omega C} - \omega L \right]}{R}$$

$$\tan \phi = \frac{\left[\frac{1}{\omega C} - \omega L\right]}{R}$$

$$\arctan \phi = \frac{\left[\frac{1}{\omega C} - \omega L\right]}{R}$$

7. En $t = 0$, un condensateur de capacité C portant une charge Q_0 est connecté à une bobine de self L . Calculer, pour tout temps, la charge du condensateur, l'énergie de son champ électrique et l'énergie du champ magnétique dans la bobine.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{C} = 0$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = -\frac{I}{LC} \quad \Rightarrow \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int dQ = \int I_0 \sin(\omega t + \phi) dt$$

$$Q(t) = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \phi) = Q_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow Q_0 = \frac{I_0}{\omega}$$

La phase ϕ est déterminé par la condition initiale

$$Q(t=0) = Q_0 \Rightarrow Q(t) = Q_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = Q_0 \cos(\omega t)$$

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -Q_0 \omega \sin(\omega t)$$

Les potentiels aux bornes du condensateur et de la bobine son respectivement :

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = -LQ_0 \omega \frac{d \sin(\omega t)}{dt} = -LQ_0 \omega^2 \cos(\omega t)$$

$$P = U_C I + U_L I$$

$$= -\frac{Q_0^2 \omega}{C} \sin(\omega t) \cos(\omega t) + Q_0^2 L \omega^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$

$$= -\omega \frac{Q_0^2}{C} \frac{\sin(2\omega t)}{2} + \omega \frac{Q_0^2}{C} \frac{\sin(2\omega t)}{2}$$

$$= P_e(t) + P_m(t)$$

où nous avons utilisé

$$\sin(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{\sin(2\omega t)}{2}$$

L'énergie dans champ électrique à $t = 0$, est $W_{e,0} = \frac{Q_0^2}{2C}$

$$W_e(t) = W_e(t) + W_{e,0} = \int_0^t P_e(t) dt + \frac{Q_0^2}{2C} = -\omega \frac{Q_0^2}{2C} \int_0^t \sin(2\omega t) dt + \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{4C} [\cos(2\omega t) - 1] + \frac{Q_0^2}{2C}$$

$$= \frac{Q_0^2}{2C} - \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2(\omega t) = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2(\omega t)$$

$$W_m(t) = \int_0^t P_m(t) dt = \omega \frac{Q_0^2}{2C} \int_0^t \sin(2\omega t) dt = \frac{Q_0^2}{4C} [1 - \cos(2\omega t)]$$

$$= \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2(\omega t)$$

où nous avons utilisé

$$\begin{aligned}\cos(2\omega t) &= \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) \\ \cos(2\omega t) - 1 &= -2\sin^2(\omega t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_e(t) &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2(\omega t) \\ W_m(t) &= \frac{1}{2} LI^2 = \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2(\omega t)\end{aligned}$$

Bien entendu, comme il n'y a pas de résistance, on a conservation d'énergie :

$$W_e(t) + W_m(t) = \frac{Q_0^2}{2C}$$

8. Un circuit *RLC* avec $R = 2\Omega$, $L = 10^{-3}\text{H}$, $C = 10^{-3}\text{F}$ (en série) est branché sur une tension alternante avec valeur maximale $U_0 = 100\text{V}$. Trouver sans calculatrice le courant maximal pour les fréquences angulaires (pulsation : ω) de la tension : 0 Hz, 10 Hz, 10^2 Hz, 10^3 Hz, 10^4 Hz, 10^5 Hz. Faire un plot du courant maximal versus le logarithme de la fréquence.

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]^2}} \stackrel{\text{A.N.}}{=} \frac{100}{\sqrt{4 + \left[\omega 10^{-3} - \frac{1}{\omega 10^{-3}}\right]^2}}$$

$$\omega = 0\text{Hz} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{100}{\sqrt{4 + \left[\omega 10^{-3} - \frac{1}{\omega 10^{-3}}\right]^2}} \rightarrow 0\text{A}$$

$$\omega = 10^1\text{Hz} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{100}{\sqrt{4 + \left[10^{-2} - \frac{1}{10^{-2}}\right]^2}} \simeq \frac{10^2}{\sqrt{[10^2]^2}} \rightarrow 1\text{A}$$

$$\omega = 10^2\text{Hz} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{100}{\sqrt{4 + \left[10^{-1} - \frac{1}{10^{-1}}\right]^2}} \simeq \frac{10^2}{\sqrt{[10^1]^2}} \rightarrow 10\text{A}$$

$$\omega = 10^3\text{Hz} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{100}{\sqrt{4 + [1 - 1]^2}} = \frac{10^2}{\sqrt{4}} \rightarrow 50\text{A}$$

$$\omega = 10^4\text{Hz} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{100}{\sqrt{4 + \left[10^1 - \frac{1}{10^1}\right]^2}} \simeq \frac{10^2}{\sqrt{[10^1]^2}} \rightarrow 10\text{A}$$

$$\omega = 10^5\text{Hz} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{100}{\sqrt{4 + \left[10^2 - \frac{1}{10^2}\right]^2}} \simeq \frac{10^2}{\sqrt{[10^2]^2}} \rightarrow 1\text{A}$$