

# Formulaire d'électrostatique

## 1 Champ électrostatique

$\vec{E}$  créé par une charge  $q$  à position  $P$  :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\vec{PM}\|^2} \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|} \\ &\equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}\end{aligned}$$

$\vec{E}$  créé par  $N$  charges ponctuelles :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\|\vec{P}_iM\|^2} \frac{\vec{P}_iM}{\|\vec{P}_iM\|} \\ &\equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{u}_i\end{aligned}$$

$\vec{E}$  créé par une distribution continue :

$$\vec{E}(M) = \int d\vec{E}_P(M), \quad d\vec{E}_P(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}$$

où  $dq$  est déterminé par une distribution de charge :

$$\begin{aligned}\text{linéique :} & \quad dq = \lambda(P) dl_P \equiv \lambda dl \\ \text{surfactive :} & \quad dq = \sigma(P) d^2S_P \equiv \sigma dS \\ \text{volumique :} & \quad dq = \rho(P) dV_P \equiv \rho d^3V\end{aligned} \quad (1)$$

(N.B.  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide )

$1/(4\pi\epsilon_0) \equiv K \simeq 9.10^9 \text{SI}$ .

## 2 Propriétés fondamentales

### 1. Théorème de Gauss :

$$\begin{array}{ll}\text{Forme intégrale} & \text{Forme différentielle} \\ \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} & \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\end{array}$$

(N.B. les deux formes du théorème de Gauss sont reliées par le théorème d'Ostrogradsky)

### 2. L'autre équation fondamentale de l'électrostatique, $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ entraîne qu'on peut toujours définir un potentiel électrostatique $V$ tel que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

## 3 Formulations alternatives

On peut insérer  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$  dans l'équation  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  afin de ramener l'électrostatique à une seule équation différentielle de deuxième degré (**L'équation de Poisson**) :

$$\text{div } \overrightarrow{\text{grad}}V \equiv \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

où l'opérateur  $\Delta \equiv \text{div } \overrightarrow{\text{grad}}$  est appelé le Laplacien.

Quand on résout cette équation dans une région sans charges on dit qu'on a affaire à **l'équation de Laplace** :

$$\Delta V = 0$$

## 4 Potentiel électrostatique $V$

La différence de  $V$  entre deux points ( $V_A - V_B$ ) est déterminé par la **circulation de  $\vec{E}$**  entre  $A$  et  $B$  :

$$U_{AB} \equiv V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$V$  créé par une charge  $q$  à position  $P$  :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\vec{PM}\|} + V_0 \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + V_0$$

$V$  créé par  $N$  charges ponctuelles :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\|\vec{P}_iM\|} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i} + V_0$$

$V$  créé par une distribution continue :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\|\vec{PM}\|} + V_0 \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} + V_0$$

où les  $dq$  sont spécifiés dans l'éq.(1). S'il n'y a pas de charges à l'infini, la convention est de prendre  $V(\infty) = 0$ , ce qui entraîne  $V_0 = 0$ .

## 5 Dipôle électrostatique

Un modèle d'un dipôle  $\vec{p}$  est deux charges  $\pm q$  séparées par une distance  $\vec{d}$ . Le moment dipolaire de ce système est  $\vec{p} = q\vec{d}$ . Pour des systèmes plus compliqués, le moment dipolaire électrostatique est donné par :

$$\begin{array}{ll}\text{charges ponctuelles} & \text{distribution surfacique} \\ \vec{p} = \sum_i q_i \vec{OP}_i & \vec{p} = \iiint \sigma \vec{OP} dS\end{array}$$

distribution volumique

$$\vec{p} = \iiint \rho \vec{OP} dV$$

Pour des distances grandes devant la taille du système :

$$V(M) \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad (2)$$

## 6 Diélectriques

Un diélectrique est généralement caractérisé par un **vecteur de polarisation**,  $\vec{P}$ , défini partout dans le diélectrique. Le vecteur polarisation peut être interprété comme une densité volumique de moment dipolaire telle que  $d\vec{p} = \vec{P} dV$ . Le potentiel créé par le diélectrique est donc :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{objet}} \frac{\vec{P} \cdot \hat{u}}{r^2} dV \quad (3)$$

Un regard alternative (complémentaire) est d'interpréter  $\vec{P}$  comme produisant une densité surfacique de polarisation  $\sigma_{\text{pol}}$  et une densité volumique de polarisation  $\rho_{\text{pol}}$

$$\sigma_{\text{pol}} = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad \rho_{\text{pol}} = -\text{div} \vec{P}$$

Cette interprétation amène à une expression équivalente de  $V$  :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \iint_S \frac{\sigma_{\text{pol}}}{r} dS + \iiint_V \frac{\rho_{\text{pol}}}{r} dV \right]$$

## 7 Déplacement électrique

En présence de diélectriques, il est pratique de définir le **déplacement diélectrique**  $\vec{D}$  :

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4)$$

L'équation différentielle de  $\vec{D}$  est :

$$\text{div} \vec{D} = \rho - \rho_{\text{pol}} \equiv \rho_{\text{libre}} \quad (5)$$

où  $\rho_{\text{libre}}$  correspond aux charges réellement manipulées dans une expérience.

On peut parfois résoudre  $\vec{D}$  en faisant appel à la forme intégrale de l'éq.(5) :

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre,int}} \quad (6)$$

Très souvent, il y a une relation linéaire entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (7)$$

où  $\chi_e$  est la **susceptibilité** du diélectrique.

Mettant (7) dans (4), on obtient une relation linéaire entre  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  (**relation constitutive**) :

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \equiv \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \equiv \epsilon_d \vec{E}$$

où  $\epsilon_r$  est la constante diélectrique (relative) du diélectrique et  $\epsilon_d$  est la permittivité du diélectrique.

## 8 Conducteurs parfaits à l'équilibre électrostatique

Le champ à l'intérieur d'un conducteur parfait est :

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}, \quad \vec{D}_{\text{int}} = \vec{0}, \quad V = Cte$$

Le champ à proximité d'un conducteur est donné par (Th. de Coulomb) :

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma_{\text{libre}}}{\epsilon_r \epsilon_0} \hat{n}, \quad \vec{D}_{\text{ext}} = \sigma_{\text{libre}} \hat{n}$$

où  $\hat{n}$  est le vecteur normale à la surface (de l'intérieur vers l'extérieur) et  $\sigma_{\text{libre}}$  est la charge surfacique du conducteur (dans le vide  $\epsilon_r = 1$ ).

**Capacité  $C$  d'un conducteur isolé :**

$$C = \frac{Q}{V} \quad \text{où} \quad Q = \iint_{\text{surface}} \sigma d^2 S$$

Coefficients d'influence d'un système de  $N$  conducteurs

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} V_j \quad \text{avec} \quad C_{ij} = C_{ji}$$

**Capacité d'un condensateur**

$$C = \frac{Q}{U} \quad \text{où} \quad U = V_1 - V_2, \quad Q = Q_1 = -Q_2$$

où  $Q_1, Q_2$  sont les charges sur les surfaces en influence totale (ou quasi totale).

## 9 Energie potentielle électrostatique

D'une charge ponctuelle :  $W_e = qV$

D'un dipôle :  $W_e = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$

De distributions de charge :

$$W_e = \iint_{\text{Surface(s)}} \sigma V d^2S + \iiint_{\text{objet(s)}} \rho V dV$$

Energie à partir du champ électrique

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{tout l'espace}} \epsilon_r \|\vec{E}\|^2 dV$$

D'un conducteur isolé :

$$W_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

D'un système de  $N$  conducteurs :

$$W_e = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}Q_i V_i$$

## 10 Force électrostatique

Sur une particule chargée (Coulomb)

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Sur un conducteur en équilibre :

$$\vec{F} = \iint_S d^2\vec{F} = \iint_S \mathcal{P} d\vec{S}$$

où  $\mathcal{P} = \sigma^2 / \epsilon_r \epsilon_0$  est la pression électrostatique.

Force via l'énergie (travaux virtuels) :

$$\vec{F} = - \left( \overrightarrow{\text{grad}} W_e \right)_Q = \left( \overrightarrow{\text{grad}} W_e \right)_V$$

Force et moment sur un dipôle :

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} \left( \vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}} \right) \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{\text{ext}}$$

Force sur l'armature  $i$  d'un condensateur :

$$\vec{F}_{\rightarrow i} = - \left( \overrightarrow{\text{grad}}_i W_e \right)_Q = \frac{U^2}{2} \overrightarrow{\text{grad}}_i C$$

où  $i$  désigne qu'il s'agit d'un gradient par rapport aux coordonnées du conducteur  $i$ .

## 11 Courrant et résistance

Densité de courant  $\vec{j}$  :

$$\vec{j} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$$

Courrant  $I$  :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \iint_{\text{section}} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Loi d'Ohm local :  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

( $\gamma$  conductivité,  $\eta = 1/\gamma$  résistivité)

Résistance d'un conducteur

$$R = \frac{V_A - V_B}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint \gamma \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

D'un fil de section  $S$  et longueur  $L$  :

$$R = \frac{L}{\gamma S}$$

D'un conducteur de section variable :

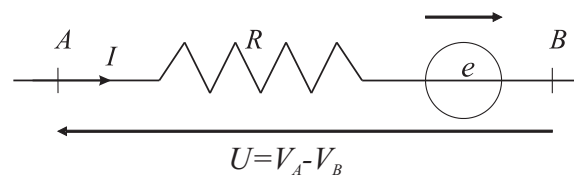
$$R = \int \frac{dl}{\gamma S} \quad (8)$$

## 12 Electrocinétique

Force électromotrice (fém) entre  $A$  et  $B$

$$e = \int_A^B \frac{\vec{F}_m}{q} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

Bilan de puissance d'une portion de circuit



- $U = V_A - V_B = RI - e$
- $P = UI$ , puissance disponible entre  $A$  et  $B$
- $P_J = RI^2$ , puissance dissipée par effet Joule
- $P = eI$  puissance fournie  
générée ( si  $e > 0$  ) ou consommée ( si  $e < 0$  )

Lois de conservation

- Lois des noeuds (conservation de charge)

$$\sum I_{\text{entrants}} = \sum I_{\text{sortants}}$$

- Loi des mailles (conservation d'énergie)

$$\sum (R_k I_k - e_k) = 0$$

# Formulaire de magnétostatique et Induction

## 1 Champ magnétostatique

$\vec{B}$  créé par une particule en mouvement à vitesse constante :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 q \vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{4\pi \frac{\|\overrightarrow{PM}\|^3}{} = \frac{1}{4\pi c^2 \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{v} \wedge \hat{u}}$$

$\vec{B}$  créé par une distribution continue de courant :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} dV$$

$\vec{B}$  créé par un circuit filiforme (Loi de Biot Savart) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{d\vec{l}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

(N.B.  $\mu_0$  est la perméabilité du vide  $\mu_0 \equiv 4\pi 10^{-7} \text{SI}$  (Henry  $\text{m}^{-1}$ ))

Flux magnétique à travers une surface

$$\Phi \equiv \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

## 2 Propriétés fondamentales

1. Flux conservatif :

|                                      |                           |
|--------------------------------------|---------------------------|
| Forme intégrale                      | Forme différentielle      |
| $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ | $\text{div } \vec{B} = 0$ |

2. Théorème d'Ampère : la circulation de  $\vec{B}$  sur un contour fermé est égal à  $\mu_0$  fois le courant traversant une surface qui s'appuie sur ce contour :

|   |                                       |
|---|---------------------------------------|
| Forme intégrale   | Forme différentielle                  |
| $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ | $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ |
| $= \mu_0 I_{\text{enl}}$  |                                       |

## 3 Action magnétique

Sur une particule chargée (Force de Lorentz) :

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Sur un circuit filiforme (Force de Laplace) :

$$\vec{F}_L = \oint_{\text{circuit}} I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

**Théorème de Maxwell :** Quand le champ magnétique est **statique**, le travail fait par la force de Laplace,  $\vec{F}_L \cdot d\vec{r}$ , lors d'un déplacement,  $d\vec{r}$ , du circuit, est égal au courant dans le circuit fois le changement du flux magnétique traversant le circuit,  $d\Phi_c$  :

$$dW = Id\Phi_c \Rightarrow W = I\Delta\Phi_c$$

**Conséquences du Th. de Maxwell :**

Energie potentielle d'interaction magnétique,  $\mathcal{U}_m$  :

$$\mathcal{U}_m = -I\Phi_c + Cst$$

Force (à partir de l'énergie potentielle)

$$\vec{F}_L = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{U}_m = I \overrightarrow{\text{grad}} \Phi_c$$

Couple (à partir de l'énergie potentielle)

$$\vec{\Gamma}_L = \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \vec{e}_i \quad \text{avec} \quad \Gamma_i = I \frac{\partial \Phi_c}{\partial \alpha_i}$$

## 4 Dipôle magnétique

Définition du moment dipolaire magnétique,  $\vec{m}$  :

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2} \iiint \overrightarrow{OP} \wedge \vec{j} dV$$

D'un circuit filiforme dans un plan de surface  $S$  :

$$\vec{m} = IS\hat{n}$$

Energie d'interaction magnétique :

$$\mathcal{U}_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$$

Couple magnétique sur un dipôle :

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$$

Force magnétique sur un dipôle :

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{ext}})$$

## 5 Induction

L'induction s'applique à des circuits en mouvement et/ou des champs magnétiques qui varient dans le temps.

**Loi de Faraday :** la force électromotrice  $e$  dans un circuit est donné par le changement du flux magnétique à travers le circuit :

$$e \equiv \oint_{\text{circuit}} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$= - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d^2\vec{S} - \frac{d\Phi_c}{dt} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Ceci mène à une loi fondamentale

|   |   |
|---|---|
| <b>Forme différentielle</b>                                   | <b>Forme intégrale</b>  |
| $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ | $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ |

Coefficient d'induction mutuelle

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$$

Coefficient d'auto induction

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

Force électromotrice produit dans un solénoïde :

$$e = -L \frac{dI}{dt}$$

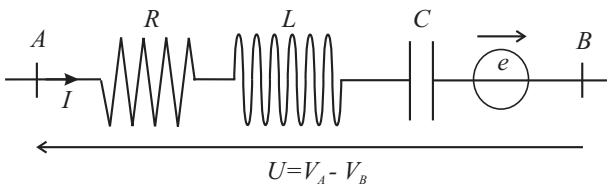
**Energie magnétique** emmagasinée (champ) :

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \mu_r \|\vec{B}\|^2 dV$$

Energie magnétique emmagasinée **dans une bobine** :

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

## 6 Circuits en régime quasi stationnaires



$$U_{AB} = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} - e$$

Circuit fermé :  $U_{AB} = 0$

$$e = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}$$

## 7 « Potentiel vecteur »

Une conséquence mathématique de la loi  $\text{div } \vec{B} = 0$ , est qu'on peut toujours définir un champ vectoriel  $\vec{A}$  tel que  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ . On appelle  $\vec{A}$  le « potentiel vecteur » même si il n'a pas les propriétés d'un potentiel. De plus est, le champ  $\vec{A}$  n'est pas bien définie puisqu'on peut toujours ajouter le gradient d'un champ scalaire  $f$  à  $\vec{A}$  sans changer sa rotationnelle

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } f$$

$$\text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} + \text{rot } \text{grad } f = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}$$

Insérant  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  dans  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , on obtient une équation différentielle pour  $\vec{A}$  :

$$\text{rot } \text{rot } \vec{A} \equiv \text{grad } \text{div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (1)$$

où nous avons utilisé une autre identité mathématique  $\text{rot } \text{rot} \equiv \text{grad } \text{div} - \Delta$ . On peut enlever une partie de la liberté dans la définition de  $\vec{A}$  en imposant la contrainte de la «gauge de Coulomb», c.-à.-d. on impose la condition :

$$\text{div } \vec{A} = 0$$

Ainsi l'équation (1) dans cette gauge devient

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

et la solution de  $\vec{A}$  prend une forme intégrale analogue à celle de  $V$  en électrostatique :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P) dV}{\|\vec{PM}\|}$$

et pour un circuit filiforme

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{d\vec{l}_P}{\|\vec{PM}\|}$$

## 8 Matériaux magnétiques

Puisque les électrons tournent autour de leurs noyaux ont le comportement de circuits microscopiques, tout milieu matériel à une réponse magnétique non nulle même si celle-ci est généralement très faible (sauf pour les matériaux ferromagnétiques). La réponse magnétique des matériaux est caractérisée par un **vecteur de polarisation magnétique**,  $\vec{M}$ , qui peut être interprété comme une densité volumique de moment dipolaire magnétique telle que le moment

dipolaire  $\vec{dm}$  d'un volume  $dV$  soit donné par  $\vec{dm} = \vec{M}dV$ .

La densité de courant,  $\vec{j}_m$ , (de nature atomique) associée avec l'existence de  $\vec{M}$ , se trouve avec la relation :

$$\text{rot} \vec{M} = \vec{j}_m$$

L'équation d'ampère s'écrit donc

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j}_m + \vec{j}_{\text{libre}} \right)$$

où  $\vec{j}_{\text{libre}}$  correspond à la densité de courant présent dans des circuits.

Puisque nous n'avons pas de contrôle direct de  $\vec{j}_m$ , il est pratique en présence de milieux matériels de définir le champ  $\vec{H}$  :

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (2)$$

L'équation différentielle de  $\vec{H}$  en magnétostatique est :

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}} \quad (3)$$

Si la symétrie du problème est suffisamment élevée, on peut obtenir  $\vec{H}$  en faisant appel à la forme intégrale de l'éq.(3) :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enl}} \quad (4)$$

Très souvent, il y a une relation linéaire entre  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$

$$\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (5)$$

où  $\chi_m$  est la **susceptibilité** magnétique du matériau.

Mettant (5) dans (2), on obtient une relation linéaire entre  $\vec{H}$  et  $\vec{B}$  (**relation constitutive**) :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} (1 - \chi_m) \vec{B} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_r \mu_0} \quad (6)$$

où  $\mu_r = 1/(1 - \chi_m)$  est la perméabilité magnétique relative du matériau.

## 9 Equations de Maxwell

Maxwell a modifié l'équation  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  afin que les équations d'électromagnétisme soient

consistantes avec l'équation de conservation de charge :

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{conservation de charge}$$

$$\text{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j} \quad \text{équation modifiée}$$

Les équations d'un champ électromagnétique dans le vide sont appelées les **quatre équations de Maxwell** :

|   |  |
|---|--|
| $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$           | $\text{div} \vec{B} = 0$   |
| $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ | $\text{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}$ |

On peut également exprimer ces quatre équations sous **forme intégrale** :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d^2\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}, \quad \iint_S \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

## 10 Equations de Maxwell en milieux matériels :

|  |  |
|--|--|
| $\text{div} \vec{D} = \rho,$                                 | $\text{div} \vec{B} = 0$   |
| $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$ | $\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$ |

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

## 11 Conditions limites à des interfaces

$$\hat{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$\hat{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_s$$

$$\hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$$

$$\hat{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$