**Partiel Électromagnétisme - PEIP 2**
*8 novembre 2023*
*4 problèmes / Durée de l'épreuve 2h.*
*Formulaire A4 manuscrit autorisé / Calculettes standards autorisées*

POLYTECH MARSEILLE Aix Marseille Université

1. (6 pt) Problèmes d'électrostatique

(a) (1 pt) Une charge ponctuelle $q$ est située à la position $P = (a/2, a/2, a/2)$, à l'intérieur d'un cube de côté $2a$ centré en $O$. Le flux du champ électrique, $\Phi_e = \oiint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{S}}$, créé par la charge à travers le cube est :

**i)** 0

**ii)** $q\epsilon_0$

**iii)** $\frac{q}{\epsilon_0}$ **Solution :** car $\Phi_e = \oiint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{S}} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ et $q$ est la charge à l'intérieure du cube.

**iv)** on ne peut pas savoir

(b) (2 pt) On considère un plan chargé infini de densité surfacique uniforme, $\sigma_0$, dans le plan $(xOz)$ (c.-Ã -d. le plan avec $y = 0$ avec normal, $\widehat{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{u}}_y$). Ce plan crée un champ $\vec{\boldsymbol{E}}(M)$ en tout point $M$ de l'espace repéré par coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$.

**i)** $\vec{\boldsymbol{E}}(M)$ ne dépend pas des coordonnées $x$ et $z$ (vrai/faux).
**Solution :** (0,5 pt)

(vrai) Car déplacements en $x$ et $z$ sont des invariances du problème.

**ii)** La composante $E_y(x, y, z)$ est fonction paire de la coordonnée $y$ (vrai/faux).
**Solution :** (0,5 pt) (faux) $E_y(x, y, z)$ est une fonction impaire de la coordonnée $y$ .

**iii)** (1 pt) Donner l'expression de $\vec{\boldsymbol{E}}(M)$ pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace.
**Solution :**

$$\vec{\boldsymbol{E}}(M) = \frac{y}{|y|} \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \widehat{\boldsymbol{u}}_y,$$

(c) (2 pt) Un potentiel électrique dans une certaine région de l'espace s'écrit $V(r, \theta, \phi) = C\frac{\cos\theta}{\epsilon_0 r^2}$ où $C$ est une constante.

**i)** Spécifier les dimensions de $C$.
**Solution :** (1 pt)

$$[C] = [\epsilon_0] .\text{V.m}^2 = \text{F.m}^{-1}.\text{V.m}^2 = \text{C.m}$$

où on a utilisé la relation $Q = CU$ , afin de déterminer que (C=F.V.

**ii)** Trouver le champ électrique, $\vec{\boldsymbol{E}}(r, \theta, \phi)$, associé à $V(r, \theta, \phi)$.
Rappel : En coordonnées sphériques on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \boldsymbol{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

**Solution :** (1 pt)

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{E}}(r, \theta, \phi) &= -\overrightarrow{\text{grad}} V(r, \theta, \phi) \\ &= -\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \end{bmatrix} \frac{C}{\epsilon_0} \cos\theta r^{-2} = \frac{C}{\epsilon_0} \begin{bmatrix} \frac{2}{r^3}\cos\theta \\ \frac{1}{r^3}\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{C}{r^3\epsilon_0} \left[2\cos\theta \widehat{\boldsymbol{u}}_r + \sin\theta \widehat{\boldsymbol{u}}_\theta\right] \text{V.m}^{-1} \end{aligned}$$

Il s'agit du champ d'un dipôle électrique.

(d) (1 pt) Une surface orientée, $\overrightarrow{\boldsymbol{S}S} = S\widehat{\boldsymbol{n}}$, où $\widehat{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y + \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_z)$, est immergée dans un champ $\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = E\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y\right)$.

**i)** Calculer le flux électrique, $\Phi_e$ à travers cette surface.

**Solution :** (0.5 pt)

$$
\begin{aligned}
\Phi_e &= S\widehat{\boldsymbol{n}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \\
&= S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y + \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_z)\right) \cdot E\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x - \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y\right) \\
&= \frac{SE}{\sqrt{6}}2 = SE\sqrt{\frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

**ii)** Spécifier les unités de $\Phi_e$.

**Solution :** (0,5 pt)

$$[\Phi_e] = \mathrm{m}^2.\mathrm{V}.\mathrm{m}^{-1} = \mathrm{V}.\mathrm{m}$$

2. (6 pt) Potentiel, conducteurs et condensateurs

(a) (2 pt) On considère une région où le champ électrique s'écrit $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(x) = 3Cx^2\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x$.

**i)** Quelle est la dimension de la constante $C$ ?

**Solution :** (0,5 pt)

$$[C] = \mathrm{V}.\mathrm{m}^{-3} \; .$$

**ii)** Déterminer le potentiel $V(x)$ dans cette région en prenant définissant $V(x = 0) = 0$.

**Solution :** (0,75 pt)

$$
\begin{aligned}
V(x) - V(0) &= \int_x^0 \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \cdot d\,\overrightarrow{\ell} = -\int_0^x 3x'^2\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x dx' \\
&= -C\int_0^x 3x'^2 dx' = -C\left[x^3\right]_0^x = -Cx^3 \; .
\end{aligned}
$$

**iii)** Déterminer la densité volumique, $\rho_v(x)$ dans cette région.

**Solution :** (0,75 pt)

$$\frac{\rho_v(x)}{\epsilon_0} = \mathrm{div}\,\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \frac{d}{dx}E_x = \frac{d}{dx}3Cx^2,$$

ce qui donne :

$$\rho_v(x) = 6\epsilon_0 Cx \; .$$

Ce n'est pas demandée, mais on peut vérifier les unités :

$$
\begin{aligned}
[\epsilon_0 Cx] &= [\epsilon_0 x]\,[C] = \mathrm{F}.\mathrm{V}.\mathrm{m}^{-3} \\
&= \mathrm{C}.\mathrm{V}^{-1}.\mathrm{V}.\mathrm{m}^{-3} = \mathrm{C}.\mathrm{m}^{-3} \; .
\end{aligned}
$$

ce qui est la bonne unité pour densité volumique.

(b) (1 pt) Déterminer la capacité équivalente, $C_{eq}$, de deux condensateurs de $2\mu$F et $3\mu$F connectés en série.

**Solution :**

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{C_{\mathrm{eq}}} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \\
C_{\mathrm{eq}} &= \frac{6}{5} = 1,2\mu\mathrm{F}
\end{aligned}
$$

(c) (1 pt) On charge un condensateur plan, puis on l'isole électriquement. Ensuite on place un diélectrique entre les deux conducteurs. Sélectionner la bonne réponse pour les trois questions suivantes) :

**i)** Les charges sur les condensateurs (diminuent, augmentent, restent inchangées).

**Solution :**

restent inchangées (car c'est la définition d'isoler électriquement et la charge est toujours conservée )

**ii)** La tension entre les deux conducteurs (diminue, augmente, reste inchangé).

**Solution :**

diminue (car la polarisation du diélectrique diminue le champ électrique)

**iii)** La capacité du condensateur (diminue, augmente, reste inchangée).

**Solution :**

$$\text{augmente car } C = \frac{Q}{U} \,.$$

(d) (2 pt) On considère une distribution de charge linéique sur l'axe $Oz$ entre $z = -a/2$ et $z = a/2$ avec une densité linéique $\lambda(z) = \lambda_0 \cos(\pi z/a)$ :

**i)** Déterminer la charge totale, $Q_{\text{tot}}$, de la tige.

**Solution :**

$$\begin{aligned} Q_{\text{tot}} &= \int_{-a/2}^{a/2} \lambda(z) dz = \int_{-a/2}^{a/2} \lambda_0 \cos(\pi z/a) dz \\ &= \frac{a\lambda_0}{\pi} \left[\sin(\pi z/a)\right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{2a\lambda_0}{\pi} \mathrm{C} \,. \end{aligned}$$

3. (6 pts) **Charges et champs électrostatiques :**
On considère deux charges ponctuelles : $Q_1 = \frac{400}{3}\mu C$ à la position $P_1 = (2,4,3)$m et $Q_2 = -\frac{400}{3}\mu C$ à la position $P_2 = (8,4,11)$m. **Spécifier les unités et A.N. dans vos réponses**. rappel : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9.10^9$SI.

(a) (2 pts) Trouver le champ $\vec{E}_1(P_2)$ créé par la particule 1à la position de la particule 2.

**Solution :**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}} &= \overrightarrow{\boldsymbol{P_1O}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OP_2}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OP_2}} - \overrightarrow{\boldsymbol{OP_1}} = (8,4,11) - (2,4,3) \\ &= (6,0,8) \\ \left|\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}\right| &= \sqrt{6^2+8^2} = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{E}}_1(P_2) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 \overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}\right|^3} = 9\times 10^9 \times \frac{4}{3} \times 10^{-4} \frac{(6,0,8)}{10^3} \\ &= 9\times 10^9 \times \frac{4}{3} \times 10^{-4} \frac{1}{10^2} \frac{(6,0,8)}{10} = 1,2\times 10^4 \times \frac{(6,0,8)}{10} \mathrm{V.m^{-1}} \\ \left|\vec{\mathbf{E}}_1(P_2)\right| &= 1,2\times 10^4 \mathrm{V.m^{-1}} \end{aligned}$$

(b) (1 pts) Calculer la force $\vec{F}_{1\to 2}(P_2)$ exercée sur la particule 2.

**Solution :**

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}}_{1\to 2} &= Q_2 \vec{\mathbf{E}}_1(P_2) = -\frac{4}{3} \times 10^{-4} \times 1,2\times 10^4 \times \frac{(6,0,8)}{10} \\ &= -\frac{4}{3} \times 10^{-4} \times \frac{3\times 4}{10} \times 10^4 \times \frac{(6,0,8)}{10} \mathrm{N} \\ &= -1,6 \times \frac{(6,0,8)}{10} \mathrm{N} \\ \left|\vec{\boldsymbol{F}}_{1\to 2}\right| &= 1,6\mathrm{N} \end{aligned}$$

(c) (1.5 pts) Trouver le moment dipolaire, $\vec{p}$ de ce système.
**Solution :** Le moment dipole d'un dipôle idéal est la charge multiplié par le vecteur depuis la position de la charge négative jusqu'à la position de la charge positive :

$$\vec{p} = Q_1\overrightarrow{P_2P_1} = -Q_1\overrightarrow{P_1P_2} = -\frac{4}{3}\times 10^{-4}\times(6,0,8)\,\text{C.m}$$

On aurait peut également utiliser la définition :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} Q_i\overrightarrow{OP_i} = Q_1\overrightarrow{OP_1} + Q_2\overrightarrow{OP_2} = Q_1\left(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2}\right) = Q_1\overrightarrow{P_2P_1}\ .$$

(d) (1.5 pts) Trouver l'énergie électrostatique potentielle, $\mathcal{E}_e$, du système.
**Solution :**

$$\mathcal{E}_e = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|} = -9\times10^9\,\frac{\frac{4}{3}\times10^{-4}\times\frac{4}{3}\times10^{-4}}{10} = -16\text{J}\ .$$

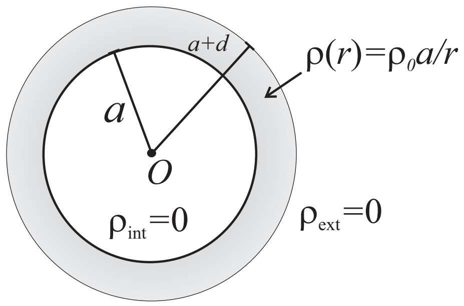


FIGURE 1 – (a) Coque de charge : vide pour $r < a$ et $r > a + d$. $\rho(r) = \rho_0\frac{a}{r}$ pour $a < r < a + d$.

4. (6 pts) **Densité, charge, et théorème de Gauss :**
On considère une coque sphérique centrée sur $O$ et de rayonne intérieure, $a$ (vide à l'intérieur), La densité de charge dans la coque, non-conductrice, dépend uniquement de la coordonnée radiale, $r$ : $\rho(r) = \rho_0\frac{a}{r}$, sur une épaisseur, $d$ (le tout placé dans le vide). Nous identifions tout point $M$ dans l'espace par ses coordonnées sphériques $(r,\theta,\phi)$. On adopte en chaque point le repère $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$.

(a) (2 pts) Trouver la charge totale, $Q_{\text{tot}}$, de la coque de charge (c.-à-d. toute la charge dans la région $a < r < a + d$).
**Solution :** La charge totale de la couche hémisphérique est :

$$Q_{\text{tot}} = \iiint \rho d\mathcal{V} = \rho_0 a\int_a^{a+d}\frac{1}{r}r^2dr\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi = \rho_0 a4\pi\int_a^{a+d}rdr = 4\pi a\rho_0\left[\frac{r^2}{2}\right]_a^{a+d}$$
$$= 2\pi a\rho_0\left[(a+d)^2 - a^2\right]\text{C}\ .$$

(b) (0,5 pts) Justifier à partir de considérations d'invariance et de symétrie de la distribution de charges, que le champ électrostatique créé est de la forme $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$. Donner une expression pour $E_r(r)$ dans la région $r < a$.
**Solution :** Puisque le champ est radial, on a :

$$\oiint_r \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_r(r)4\pi r^2$$

Dans la région $r < a$ :

$$E_r(r)4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0 \Longrightarrow E_r(r) = 0 \qquad r < a\ .$$

Car il n'y a pas de charge dans la région $r < a$, donc $Q_{\text{int}} = 0$.

(c) (0,5 pts) Donner une expression pour $E_r(r)$ dans la région $r > a + d$.

**Solution :** Ici, toute la charge est à l'intérieur d'une sphère de rayon $r > a + d$ ($Q_{\text{int}} = Q_{\text{tot}}$) et on a

$$E_r(r) = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\text{V.m}^{-1} \qquad r > a + d\,.$$

(d) (1 pts) Donner une expression pour $E_r(r)$ dans la région $a < r < a + d$.

**Solution :** La charge à l'intérieur d'une sphère de rayon $r$ dans cette région est donné par la même intégrale que la question (a) sauf qu'il faut remplacer la borne supérieure $a + d$ par $r$ :

$$Q_{\text{int}}(< r) = 4\pi a\rho_0 \int_a^r r'dr' = \frac{4\pi a\rho_0}{2}\left[r^2 - a^2\right]\,.$$

On a toujours pour le flux électrique que :

$$\oiint_r \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{S}} = E_r(r) 4\pi r^2\,,$$

et le champ à l'intérieure de la couche sphérique est :

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q_{\text{int}}(< r)}{\epsilon_0} = \frac{4\pi a\rho_0}{2\epsilon_0}\left[r^2 - a^2\right] \Longrightarrow E_r(r) = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\left[\frac{r^2 - a^2}{r^2}\right]\text{V.m}^{-1}\,.$$

(e) (2 pts) Trouver le potentiel électrique à la surface de la coque, $V(r = a + d)$, et au centre de la sphère, $V(0)$.

**Solution :** Le potentiel pour $r > r + d$

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{\ell}} = \int_r^\infty \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_r dr = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 r}\text{V}\,,$$

en prenant $V(r = \infty) = 0$. Nous aurions pu donné tout de suite ce résultat en tenant compte de la symétrie du problème.

On peut maintenant trouver le potentiel à la surface de la sphère :

$$V(r = a + d) = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0\,(a + d)} = \frac{a\rho_0\left[(a + d)^2 - a^2\right]}{2\epsilon_0\,(a + d)}\text{V}\,.$$

Dans la région $r < a$, $V$ est constant et $V = Cte = V(r = a)$, donc le potentiel au centre est :

$$V(0) = V(r = a)\,.$$

On a déjà déterminé $V(a + d)$, et on peut déterminer $V(a)$ en calculant la circulation de $\vec{\boldsymbol{E}}$ de $a$ jusqu'à $a + d$, c.-à-d. :

$$\begin{aligned}
V(a) - V(a + d) &= \int_a^{a+d} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{\ell}} = \int_a^{a+d} \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\left[\frac{r^2 - a^2}{r^2}\right] dr \\
&= \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\left\{\int_a^{a+d} dr - a^2 \int_a^{a+d} \frac{dr}{r^2}\right\} = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\left\{[r]_a^{a+d} + a^2\left[\frac{1}{r}\right]_a^{a+d}\right\} \\
&= \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\left\{a + d - a + a^2\left(\frac{1}{a + d} - \frac{1}{a}\right)\right\} = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\left\{d - a + \frac{a^2}{a + d}\right\}\,,
\end{aligned}$$

donc on a :

$$V(0) = V(a) = \{V(a) - V(a + d)\} + V(a + d)\,.$$

Enfin, il s'agit de faire de l'algèbre pour simplifier :

$$\begin{aligned}
V(0) = V(a) &= \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\left\{d - a + \frac{a^2}{a + d}\right\} + V(a + d) = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\left\{d - a + \frac{a^2}{a + d}\right\} + \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0\,(a + d)} \\
&= \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\left\{d - a + \frac{a^2}{a + d}\right\} + \frac{a\rho_0\left[(a + d)^2 - a^2\right]}{2\epsilon_0\,(a + d)} \\
&= \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\left\{d - a + \frac{a^2}{a + d} + \frac{(a + d)^2 - a^2}{(a + d)}\right\} = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}2d = \frac{\rho_0 ad}{\epsilon_0}\frac{\text{C.m}^{-1}}{\text{C.V}^{-1}.\text{m}^{-1}} = \frac{\rho_0 ad}{\epsilon_0}\text{V}\,.
\end{aligned}$$