Electromagnétisme PEIP 2 Examen janvier 2021

4 Exercices recto-verso / Durée de l'épreuve 2 heures.
Formulaire A4 manuscrit autorisé
Calculettes collège standards autorisées

1. (8pts) **Electrostatique et Magnétostatique :**

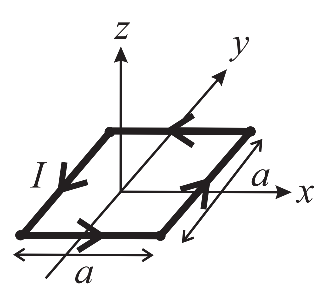
   Au cours d'un orage, un champ électrostaique entre le sol et un cumulonimbus est dirigé selon la verticale ascendante $\vec{u}_z$, de la forme $\vec{E}(z) = \vec{u}_z\,(14 \times 10^{-3} z + 5)(\text{kVm}^{-1})$ où z est mésuré en mètres et notons que le champ électrique est donné en kilovolts par mètre.

   (a) Trouver la différence de potentiel, U entre le sol et la base du nuage à 5 km de la terre.
   Solution :

   $$\Delta U\,(h) = \int_0^h \vec{E}(z) \cdot \vec{u}_z dz = \int_0^h \left(14 \times 10^{-3} z + 5\right) dz = 14 \times 10^{-3} \frac{h^2}{2} + 5h$$
   $$= 175 \times 10^3 + 25 \times 10^3 = 200 \times 10^3 \text{V} = 2 \times 10^5 \text{V}\ .$$

   (b) Un éclair entre le bas du nuage et le sol transporte une charge de 5C. Quelle est l'énergie transférée par l'éclair.
   Solution :

   $$W = q\Delta U\,(h) = 10^4 \text{J}$$



   Considérons un circuit électrique en forme de carré, de côté a, situé dans le plan xOy. Un courant constant I circule dans ce circuit.

   (c) Trouver le moment magnétique, $\vec{m}$, du circuit (en fonction de a et I).
   Solution :

   $$\vec{m} = IS\vec{u}_z = Ia^2\vec{u}_z\ .$$

   Si ce circuit ci-dessus est imergé dans un champ $\vec{B} = B_0\left(\vec{u}_x + \vec{u}_z\right)$T.

   (d) Trouver l'énergie potentielle «mécanique», U_m, du dipole magnétique dans ce champ.
   Solution :

   $$U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B} + \text{Cte}\ .$$

(e) Trouver le moment des forces de Laplace, Γ_y autour de l'axe Oy.

Solution :

$$\begin{aligned}\Gamma_y &= \left(\vec{\boldsymbol{m}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}\right) \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_y = Ia^2 \vec{\boldsymbol{u}}_z \wedge B_0 \left(\vec{\boldsymbol{u}}_x + \vec{\boldsymbol{u}}_z\right) \\ &= Ia^2 B_0 \left(\vec{\boldsymbol{u}}_z \wedge \vec{\boldsymbol{u}}_x\right) \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_y = Ia^2 B_0 \ .\end{aligned}$$

2. (8pts) On considère un système à symétrie sphérique, avec un potentiel électrique, $V_{r\leq a}(r) = V_1 \frac{r^2}{a^2} + V_0$ dans la région $r \leq a$. On suppose qu'il n'y a pas de charge surfacique en $r = a$.

(a) Trouver le champ électrique dans la région $r \leq a$.

Solution :

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}_{r\leq a}(r) &= -\overrightarrow{\textbf{grad}} V_{r\leq a}(r) = -\vec{\boldsymbol{u}}_r \frac{\partial}{\partial r}\left[V_1 \frac{r^2}{a^2} + V_0\right] = -\vec{\boldsymbol{u}}_r \frac{d}{dr}\left[V_1 \frac{r^2}{a^2}\right] \\ &= -V_1 \frac{2r}{a^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r\end{aligned}$$

(b) Quelle est la charge totale, Q, contenue dans la région $r \leq a$? (en fonction de a et V_1)

Solution : Avec le théorème de Gauss:

$$\begin{aligned}\oiint_{r=a} \vec{\boldsymbol{E}}(r \to a) \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} &= -\int_{r=a} V_1 \frac{2}{a} \vec{\boldsymbol{u}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_r r^2 d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ &= -V_1 \frac{2a^2}{a} \int_{r=a} d\Omega = -V_1 8\pi a = \frac{Q}{\epsilon_0}\end{aligned} \tag{1}$$

$$\Longrightarrow Q = -V_1 8\pi a \epsilon_0 \ .$$

(c) Déterminer la densité de charge électrique $\rho(r)$ dans la région $r \leq a$.

Solution : Avec l'équation de Poisson, $-\frac{\rho}{\epsilon_0} = \Delta V\left(r, \theta, \phi\right)$,

$$\rho(r) = -\epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(V_1 \frac{r^2}{a^2} + V_0\right)\right] = -2 \frac{V_1 \epsilon_0}{a^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^3 = -6 \frac{V_1 \epsilon_0}{a^2} \ .$$

(d) Si l'on sait qu'il n'y a pas de charges dans la région $r > a$, donner l'expression du potentiel électrique, $V_{r>a}(r)$, dans la région $r > a$ (Indice : écrire $V_{r>a}\left(r\right)$ en fonction de Q).

Solution :

$$V_{r>a}\left(r, \theta, \phi\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(e) Utiliser la continuité du potentiel électrique en $r = a$ afin de trouver une relation reliant V_1, et V_0.

Solution :

$$V_{r>a}\left(a\right) = V_{r\leq a}(a) \Longrightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} = V_1 + V_0$$

avec Q trouvé en l'éq.(1)

$$\Longrightarrow -2V_1 = V_1 + V_0 \Longrightarrow V_0 = -3V_1$$

Opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques :

$$\text{Formulaire:} \qquad \overrightarrow{\textbf{grad}} f\,(r,\theta,\phi) = \vec{\boldsymbol{u}}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{\boldsymbol{u}}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{\boldsymbol{u}}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}$$

$$\text{div}\,\vec{\boldsymbol{A}}\,(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left[r^2 A_r\right]}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r}A_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}}\,(r,\theta,\phi) = \frac{\vec{\boldsymbol{u}}_r}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(A_\phi\sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right] + \frac{\vec{\boldsymbol{u}}_\theta}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial\left(rA_\phi\right)}{\partial r}\right] + \frac{\vec{\boldsymbol{u}}_\phi}{r}\left[\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial\left(A_r\right)}{\partial\theta}\right]$$

$$\Delta f\,(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right] + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

3. (8pts) **Magnétostatique et Théorèmes d'Ampère et Laplace**

   Considérons un conducteur rectiligne, supposé infini, parcouru pour un courant dén-tensité I_1. Nous choisissons l'origine du système de coordonnées sur ce fil et l'axe Oz sur celui-ci.

   (a) Trouver le champ $\vec{\boldsymbol{B}}_1(\rho,\phi,z)$ produit par ce courant en coordonnées cylindriques avec le théorème d'Ampère.

   Solution : Sur un contour circulaire de rayon ρ, le théorème d'Ampère

$$\oint_C \vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I_{\text{enl}}$$

   devient :

$$\oint_C \vec{\boldsymbol{B}}_1\cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = 2\pi\rho B_\phi\left(\rho\right) = \mu_0 I_1 \Longrightarrow \vec{\boldsymbol{B}}_1(\rho,\phi,z) = \mu_0\frac{I_1}{2\pi\rho}\vec{\boldsymbol{u}}_\phi\,.$$

   (b) Exprimer le champ $\vec{\boldsymbol{B}}_1(x,y,z)$ en coordonnées cartésiennes à une position $M = (a,a,z)$ (c.-à-d. $x = y = a$). Expliquer pourquoi le champ ne dépend pas de la coordonnée z.

   Solution : Puisque $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ and $\cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ avec la formula de la formulaire :

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{B}}_1(x,y,z) &= \mu_0\frac{I_1}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}\left[-\vec{\boldsymbol{u}}_x\sin\phi + \vec{\boldsymbol{u}}_y\cos\phi\right]\\ &= \mu_0\frac{I_1}{2\pi\left(x^2+y^2\right)}\left(-y\vec{\boldsymbol{u}}_x + x\vec{\boldsymbol{u}}_y\right)\end{aligned}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}_1(a,a,z) = \mu_0\frac{I_1}{4\pi a}\left(-\vec{\boldsymbol{u}}_x + \vec{\boldsymbol{u}}_y\right)$$

   Le courant source est invariant par rapport tranlsation par rapport à z.

(c) Trouver la force de Laplace par unité de longueur sur un deuxième fil infini, parallèle au premier fil, et portant un courant I_2, passant par M (écrite : $\frac{d\vec{F}_{L,1\to 2}}{d\ell_2}$).

Solution : La force de Laplace sur un èlèment de fil $\overrightarrow{d\ell}_2$ est:

$$d\vec{F}_{L,1\to 2} = I_2\overrightarrow{d\ell_2} \wedge \vec{B}_1(x,y,z) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi\left(x^2+y^2\right)} d\ell_2 \vec{u}_z \wedge \left(-y\vec{u}_x + x\vec{u}_y\right)$$
$$= -\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi\left(x^2+y^2\right)} d\ell_2 \left(y\vec{u}_y + x\vec{u}_x\right) \ .$$

La force de Laplace par unitè de longueur sur le fil 2 est:

$$\frac{d\vec{F}_{L,1\to 2}}{d\ell_2} \Longrightarrow -\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi\left(x^2+y^2\right)} \left(y\vec{u}_y + x\vec{u}_x\right)$$
$$\frac{d\vec{F}_{L,1\to 2}}{d\ell_2} \Longrightarrow -\mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi a} \left(\vec{u}_y + \vec{u}_x\right) \ .$$

item On prend un troisième fil infini et parallèle aux deux précédents dont l'axe passe par les coordonnées $(x = a, y = 0)$. Exprimer la force de Laplace par unité de longueur sur la fil 2 : $\frac{d\vec{F}_{L\to 2}}{d\ell_2} = \frac{d\vec{F}_{L,1\to 2}}{d\ell_2} + \frac{d\vec{F}_{L,3\to 2}}{d\ell_2}$, et trouver une expression (en fonction de I_1) du courant, I_3, tel que la force de Laplace sur le fil de courant I_2 à la position, M, soit orientée dans la direction $\vec{u}_x$.

Solution :

$$\vec{B}_3(\rho,\phi,z) = \mu_0 \frac{I_3}{2\pi\rho}\vec{u}_\phi = \mu_0 \frac{I_3}{2\pi\rho}\vec{u}_\phi$$
$$\Longrightarrow \vec{B}_3(a,\phi=\pi/2,z) = -\mu_0 \frac{I_3}{2\pi a}\vec{u}_x$$

$$d\vec{F}_{L,3\to 2} = I_2\overrightarrow{d\ell_2} \wedge \vec{B}_3 = I_2 d\ell_2 \vec{u}_z \wedge -\mu_0 \frac{I_3}{2\pi a}\vec{u}_x = -I_2 d\ell_2 \mu_0 \frac{I_3}{2\pi a}\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x$$
$$= -I_2 d\ell_2 \mu_0 \frac{I_3}{2\pi a}\vec{u}_y$$
$$\frac{d\vec{F}_{L,3\to 2}}{d\ell_2} = -I_2 I_3 \frac{\mu_0}{2\pi a}\vec{u}_y$$

La Force de Laplace totale est :

$$\frac{d\vec{F}_{L,3\to 2}}{d\ell_2} = -\mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi a}\left(\vec{u}_y + \vec{u}_x\right) - I_2 I_3 \frac{\mu_0}{2\pi a}\vec{u}_y$$
$$= -\frac{\mu_0 I_2}{4\pi a}\left(I_1\left(\vec{u}_y + \vec{u}_x\right) + 2I_3\vec{u}_y\right) \tag{2}$$

et elle orientée uniquement dans la direction $\vec{u}_x$ quand:

$$\left(\frac{d\vec{F}_{L,3\to 2}}{d\ell_2} + \frac{d\vec{F}_{L,1\to 2}}{d\ell_2}\right) \cdot \vec{u}_y = 0$$
$$\Longrightarrow -\frac{\mu_0 I_2}{4\pi a}\left(I_1 + 2I_3\right) = 0 \Longrightarrow I_3 = -\frac{I_1}{2}$$

(d) Application numérique de la force de Laplace par unité de longeur sur le fil 2 : $a = 10$cm, $I_1 = 3$A, I_2=2A.

Solution :

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{F}}_{L,3\to 2}}{d\ell_2} + \frac{d\vec{\boldsymbol{F}}_{L,3\to 2}}{d\ell_2} = -\frac{\mu_0 I_2}{4\pi a}\left(I_1\left(\vec{\boldsymbol{u}}_y + \vec{\boldsymbol{u}}_x\right) + 2I_3\vec{\boldsymbol{u}}_y\right)$$

et si on prend $I_3 = -I_1/2$:

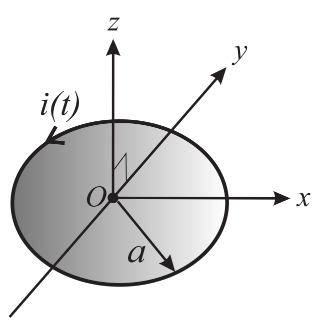
$$\frac{d\vec{\boldsymbol{F}}_{L,3\to 2}}{d\ell_2} + \frac{d\vec{\boldsymbol{F}}_{L,3\to 2}}{d\ell_2} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi a}\vec{\boldsymbol{u}}_x$$

$$\text{A.N.} \qquad \frac{d\vec{\boldsymbol{F}}_{L,3\to 2}}{d\ell_2} + \frac{d\vec{\boldsymbol{F}}_{L,3\to 2}}{d\ell_2} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi a}\vec{\boldsymbol{u}}_x = \frac{6\times 10^{-7}}{10^{-1}}\vec{\boldsymbol{u}}_x = 6\times 10^{-6}\vec{\boldsymbol{u}}_x$$

$$\vec{\boldsymbol{u}}_\phi(\phi) = -\vec{\boldsymbol{u}}_x\sin\phi + \vec{\boldsymbol{u}}_y\cos\phi \quad : \quad \sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

4. (8pts) **Induction :**

Une spire conductrice de forme circulaire (de rayon a et résistance électrique R) est placée dans un plan de z constant. Elle est immergée dans un champ magnétique, $\vec{\boldsymbol{B}}(\rho,t) = \vec{\boldsymbol{u}}_z B_0\frac{\rho}{a}\sin\omega t$ (exprimé en coordonnées cylindriques avec une variation temporelle).



(a) Trouver l'expression pour le flux magnétique, $\Phi(t)$, à travers le circuit.

Solution :

$$\Phi(t) = \iint_{\text{circuit}} \vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \frac{B_0\sin\omega t}{a}\iint \rho\,\vec{\boldsymbol{u}}_z\cdot\vec{\boldsymbol{u}}_z\rho d\rho d\phi =$$
$$= \frac{B_0\sin\omega t}{a}\int_0^a \rho^2 d\rho\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\frac{B_0\sin\omega t}{a}\int_0^a \rho^2 d\rho$$
$$= 2\pi\frac{B_0\sin\omega t}{a}\frac{a^3}{3} = \frac{2\pi B_0 a^2}{3}\sin\omega t\ .$$

(b) Trouver l'expression de la force électromotrice, $e(t)$, dans la spire.

Solution :

$$e\left(t\right)=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{2\pi B_0a^2\omega}{3}\cos\omega t\ \mathrm{V}\ .$$

(c) Donner l'expression du courant induit, $i(t)$, dans la spire.
(A.N. du courant maximal, i_0, avec $a=30\mathrm{cm}$ $B_0=1\mathrm{T}$, $\omega=\frac{100}{\pi}\mathrm{s}^{-1}$ rad/s, et $R=4\Omega$).

Solution :

$$i(t)=\frac{e\left(t\right)}{R}=-\frac{2\pi B_0a^2\omega}{3\times 4}\cos\omega t\ \mathrm{A}=-i_0\cos\omega t$$

et l'application numérique pour le courant maximale est :

$$i_0=\frac{2\pi B_0a^2\omega}{3}=\frac{1800\times 10^{-2}}{3\times 4}\mathrm{A}=\frac{3}{2}\mathrm{A}\ .$$

(d) Donner l'expression de la puissance dissipée, $P_J(t)$, dans la résistance, R, du circuit. (A.N. de la puissance dissipée maximale, P_0)

Solution :

$$P_J(t)=i(t)e\left(t\right)=i^2(t)R=P_0\cos^2\omega t=P_0\frac{1}{2}\left[1+\cos(2\omega t)\right]\ ,$$

avec une application numérique pour la puissance maximale de :

$$P_0=i_0^2R=9\mathrm{W}\ .$$

(e) Trouver l'expression de $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\rho,t)$ (Indice: Vous pouvez utiliser l'équation de Faraday-Maxwell sous forme intégrale).

Solution : La forme intégrale de :

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{E}}=-\frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\ ,$$

est :

$$\oint\overrightarrow{\boldsymbol{E}}\cdot d\overrightarrow{\boldsymbol{\ell}}=-\frac{d}{dt}\iint\overrightarrow{\boldsymbol{B}}\cdot d\overrightarrow{\boldsymbol{S}}\ .$$

Puisque $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\rho,t)=E_\phi(\rho,t)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_\phi$ nous savons que sur un contour circulaire $d\overrightarrow{\boldsymbol{\ell}}=\rho d\phi\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_\phi$:

$$\oint\overrightarrow{\boldsymbol{E}}\cdot d\overrightarrow{\boldsymbol{\ell}}=\oint E_\phi(\rho,t)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_\phi\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_\phi\rho d\phi=E_\phi(\rho,t)\rho\int_0^{2\pi}d\phi=2\pi\rho E_\phi(\rho,t)\ ,$$

et nous avons également:

$$-\frac{d}{dt}\frac{B_0\sin\omega t}{a}\iint\rho\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_z\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_z\rho d\rho d\phi \tag{3}$$

$$=-\frac{B_0\omega\cos\omega t}{a}\int_0^\rho\left[\rho'\right]^2d\rho'\int_0^{2\pi}d\phi=-\frac{B_0\omega 2\pi\cos\omega t}{a}\left[\frac{\rho'^3}{3}\right]_0^\rho \tag{4}$$

$$=-\frac{B_0\omega 2\pi\cos\omega t}{a}\frac{\rho^3}{3}=-\frac{B_0\omega 2\pi\cos\omega t}{a}\frac{\rho^3}{3}\ . \tag{5}$$

L'égalité de l'éq.(5) et (3)

$$2\pi\rho E_\phi(\rho,t) = -\frac{B_0\omega 2\pi\cos\omega t}{a}\frac{\rho^3}{3}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\rho,t) = -\frac{B_0\omega\rho^2\cos\omega t}{3a}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_\phi\ .$$